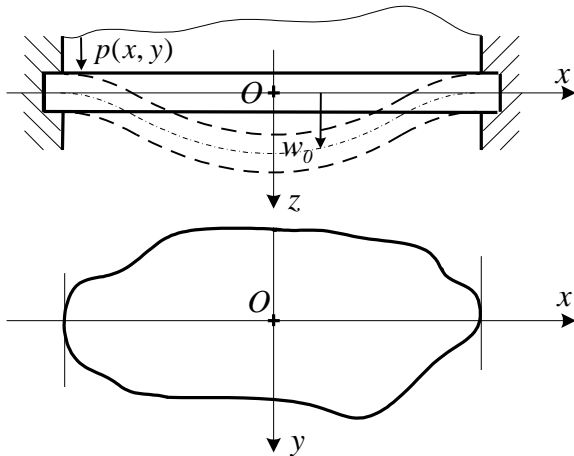


## 8. Plattenaufgaben

**Platte:** Ein Körper bei dem die eine Dimension des Körpers wesentlich kleiner ist als die zwei anderen. Man kann eine ebene Mittelfläche definieren. Die Belastung des Körpers erfolgt senkrecht zur Mittelebene.

**Mittelebene:** Punkte, die die Dicke halbieren, bilden eine ebene Fläche.



Der Verschiebungsvektor der Punkte P der Mittelebene:

$$\vec{u} = w_0 \vec{e}_z$$

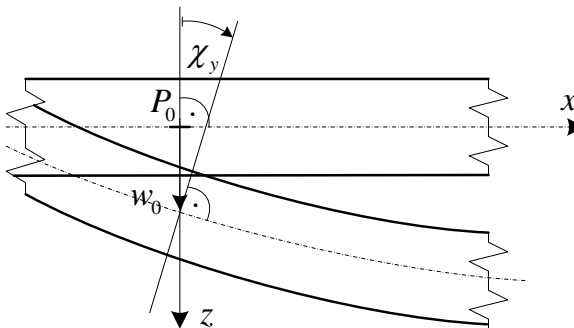
Die Verschiebungscoordinate in z-Richtung heißt bei Platten Durchbiegung:

$$w_0 = w_0(x, y),$$

$$w_0 = w_0(R, \varphi).$$

### 8.1. Die Kirchhoffsche Plattentheorie

**Die Kirchhoffsche Hypothese:** Die Normalen zur unverformten Mittelebene bleiben Normalen zur deformierten Mittelebene und der Abstand zwischen den Punkten auf der Normalen ändert sich nicht.



$P_0$  - Punkt auf der Mittelebene,

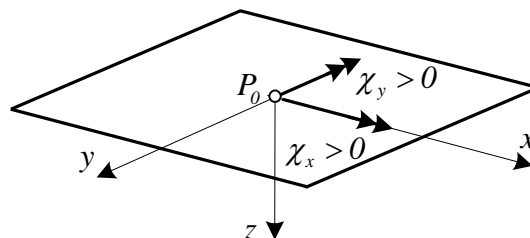
$P$  - ein beliebiger Punkt,

Die Verschiebung des Punktes  $P_0$ :

$$u_0 = v_0 = 0,$$

$$w_0 = w_0(x, y).$$

Die Verschiebung des Punktes  $P$ :  $u = -\chi_y z = -\frac{\partial w_0}{\partial x} z$ ,  $v = -\chi_x z = -\frac{\partial w_0}{\partial y} z$ ,  $w = w_0(x, y)$ .



Die Annahmen der Kirchhoffschen Hypothese:

- Der Abstand zwischen den Punkten auf einer Normalen ändert sich nicht:  $\varepsilon_z = 0$ .
- Eine Normale zur unverformten Mittelebene bleibt auch bei der Verformung erhalten:  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ,

Der Verzerrungszustand:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-\partial \chi_y}{\partial x} z = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z = \kappa_x z, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-\partial \chi_x}{\partial y} z = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z = \kappa_y z, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( -\frac{\partial \chi_y}{\partial y} - \frac{\partial \chi_x}{\partial x} \right) z = -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z = -2 \kappa_{xy} z.\end{aligned}$$

Die Krümmungen der deformierten Mittelebene in kartesischen Koordinaten:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}.$$

Die Krümmungen der deformierten Mittelebene in Zylinderkoordinaten:

$$\kappa_R = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial R^2}, \quad \kappa_\varphi = -\left( \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2} \right), \quad \kappa_{R\varphi} = \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \right)$$

Die Deformation / Formänderung der Platte wird durch die Krümmungen eindeutig bestimmt.

Die Verzerrungen in kartesischen Koordinaten:  $\varepsilon_x = \kappa_x z$ ,  $\varepsilon_y = \kappa_y z$ ,  $\gamma_{xy} = -2 \kappa_{xy} z$ .

Die Verzerrungen in Zylinderkoordinaten:  $\varepsilon_R = \kappa_R z$ ,  $\varepsilon_\varphi = \kappa_\varphi z$ ,  $\gamma_{R\varphi} = -2 \kappa_{R\varphi} z$ .

Ergänzungsannahme:

$$\sigma_z \ll \sigma_x, \sigma_y,$$

↓

$$\sigma_z \approx 0.$$

Angewendet wird das allgemeine *Hookesche* Gesetz für isotropes Material.

Die eine mögliche Form des Gesetzes:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x = \kappa_x z &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \\ \varepsilon_y = \kappa_y z &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \\ \gamma_{xy} = -2 \kappa_{xy} z &= \frac{1}{G} \tau_{xy} = 2 \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}.\end{aligned}$$

Es werden die folgenden Bezeichnungen eingeführt:  $E_I = \frac{E}{1-\nu^2}$ ,  $2G = \frac{E}{1+\nu} = (1-\nu)E_I$ .

Da man die Krümmungen der Mittelfläche als Verzerrungsgrößen betrachten kann, lautet die andere mögliche Form des Stoffgesetzes folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E_I (\kappa_x + \nu \kappa_y) z = -E_I \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) z, \\ \sigma_y &= E_I (\nu \kappa_x + \kappa_y) z = -E_I \left( \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) z, \\ \tau_{xy} &= -2G \kappa_{xy} z = -E_I (1-\nu) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z.\end{aligned}$$

Lineare Verteilung über die Dicke.

Die Gleichgewichtsbedingungen:

Bei Platten sind alle Belastungen (auch die Volumenlasten) senkrecht zur Mittelebene:  $\vec{q} = q_z \vec{e}_z$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= -q_z.\end{aligned}$$

Wenn man die dynamischen Randbedingungen berücksichtigt:

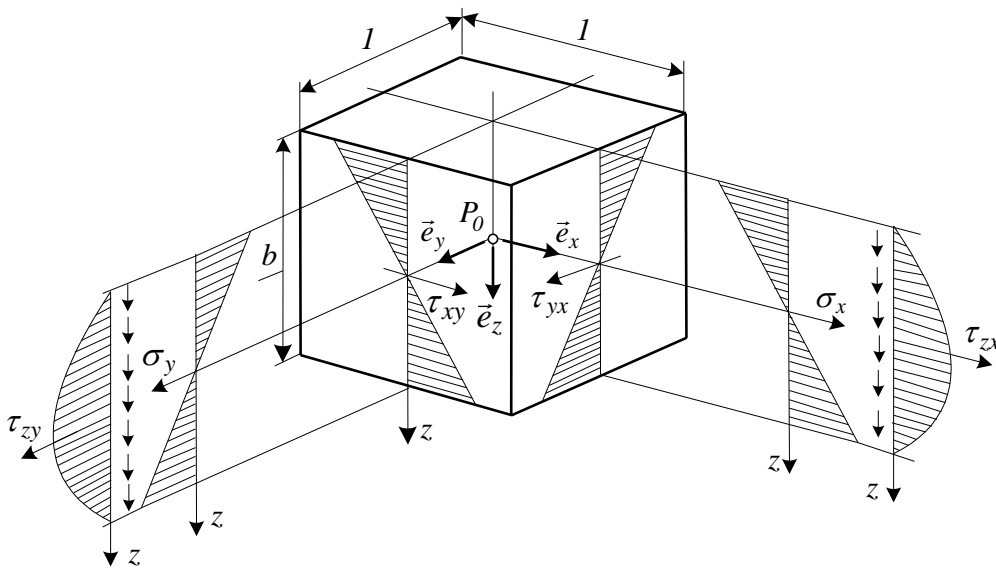
$$z = \pm \frac{b}{2}, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad (\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0),$$

und setzt die Spannungen  $\sigma_x, \sigma_y$  in die ersten beiden Gleichungen ein, ergeben sich für die Schubspannungen die folgenden Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= -\frac{1}{2} E_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \left( \frac{b^2}{4} - z^2 \right), \\ \tau_{zy} &= -\frac{1}{2} E_1 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \left( \frac{b^2}{4} - z^2 \right).\end{aligned}$$

Quadratische Verteilungen über die Dicke.

Spannungsverteilung über die Dicke:



Spannungsergebnisse über die Dicke – Schnittgrößen:

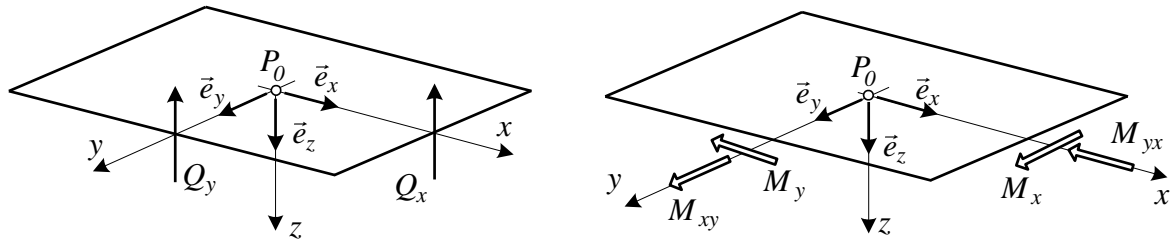
Flächenkräfte / Querkräfte:  $\vec{F}_x = \left( \int_{(b)} \tau_{zx} dz \right) \vec{e}_z = -Q_x \vec{e}_z,$

$$\vec{F}_y = \left( \int_{(b)} \tau_{zy} dz \right) \vec{e}_z = -Q_y \vec{e}_y.$$

Flächenmomente:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{(b)} z \sigma_x dz \\ M_y &= \int_{(b)} z \sigma_y dz \end{aligned} \right\} \text{Biegemomente,} \quad \left. \begin{aligned} M_{yx} &= \int_{(b)} z \tau_{yx} dz \\ M_{xy} &= \int_{(b)} z \tau_{xy} dz \end{aligned} \right\} \text{Torsionsmomente.}$$

Veranschaulichung:



Nach der Ausrechnung der Integrale:

$$M_x = \int_{(b)} z \sigma_x dz = -E_1 I_1 \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right),$$

$$M_y = \int_{(b)} z \sigma_y dz = -E_1 I_1 \left( \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right),$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{(b)} z \tau_{yx} dz = -E_1 I_1 (1-\nu) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}, \quad \text{wobei: } I_1 = \frac{b^3}{12}, \quad E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}.$$

Zusammenhänge zwischen den Spannungen und den Schnittgrößen:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I_1} z, \quad \sigma_y = \frac{M_y}{I_1} z, \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{I_1} z,$$

$$\tau_{xz} = -\frac{Q_x}{2I_1} \left( \frac{b^2}{4} - z^2 \right), \quad \tau_{zy} = -\frac{Q_y}{2I_1} \left( \frac{b^2}{4} - z^2 \right).$$

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = p_z,$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0,$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0.$$

Umformung: Die Formeln für  $M_x, M_y, M_{xy}$  setzt man in die 2. und 3. Gleichung ein.

Die 2. und 3. Gleichung stellen wir nach  $Q_x$ , und  $Q_y$  um. Die Ausdrücke für  $Q_x$ , und  $Q_y$  setzt man in die 1. Gleichung ein und erhält damit die Plattengleichung:

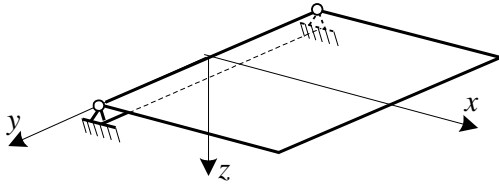
$$\Delta \Delta w_0 = \frac{p_z(x, y)}{I_1 E_1}, \quad \text{wobei } w_0(x, y), \text{ oder } w_0(R, \varphi).$$

Der Laplacesche Differentialoperator:  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$

Plattengleichung in kartesischen Koordinaten:  $\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = \frac{p_z(x, y)}{I_1 E_1}.$

Randbedingungen zur Lösung der Plattengleichung:

a) Einfache / gelenkige Lagerung



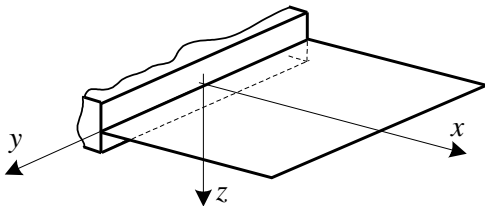
$$x=0 \quad w_0 \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0,$$

$$M_x = 0 = -E_1 I_1 \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) = 0,$$

⇓

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0.$$

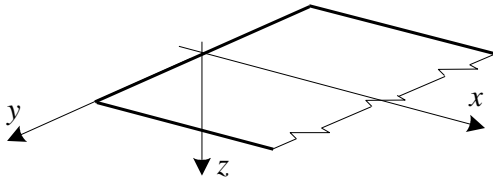
b) Einspannung:



$$x=0 \quad w_0 = 0,$$

$$\chi_y = \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0.$$

c) Freier Rand:



$$x=0 \quad M_x = 0,$$

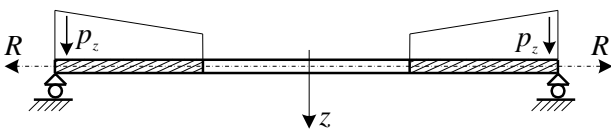
$$Q_x - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = 0.$$

## 8.2. Kreis- und Kreisringplatten mit rotationssymmetrischer Belastung

*Annahme:* Sowohl die Geometrie, als auch die Belastung und die Lagerung sind rotations-/ axialsymmetrisch.

Alle mechanischen Kenngrößen hängen nur von der Ortskoordinate  $R$  ab.

Z. B.:  $w_0 = w_0(R)$ ,  $p_z = p_z(R)$ .

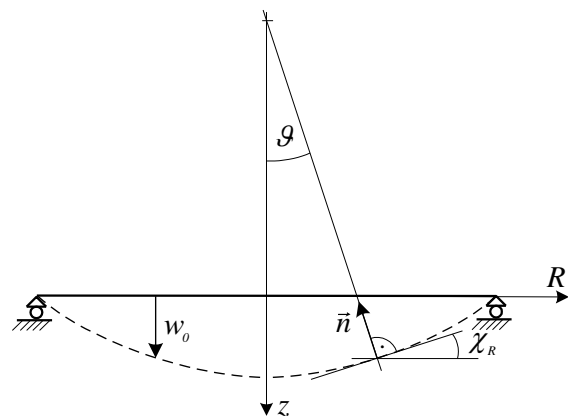


Zylinder-KS  $R, \varphi, z$

Der Winkel zwischen der Normalen und der  $z$ -Achse:

$$\vartheta = -\chi_R = -\frac{dw_0}{dR}, \quad \vartheta = \vartheta(R).$$

$w_0(R)$  - die Verschiebung der Punkte der Mittelfläche  
in  $z$ -Richtung (Durchbiegung)



a) Die Gleichungen für den rotationssymmetrischen Fall:

- Kinematische Gleichungen:

$$\mathcal{G} = -\chi_R = -\frac{dw_0}{dR}, \quad \kappa_R = \frac{d\mathcal{G}}{dR} = -\frac{d^2w_0}{dR^2}, \quad \kappa_{R\varphi} = 0.$$

$$\chi_\varphi = 0, \quad \kappa_\varphi = \frac{\mathcal{G}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{dw_0}{dR},$$

- Materialgesetz (Hooke, Isotropie):

$$M_R = I_1 E_1 (\kappa_R + \nu \kappa_\varphi) = I_1 E_1 \left( \frac{d\mathcal{G}}{dR} + \nu \frac{\mathcal{G}}{R} \right), \quad M_\varphi = I_1 E_1 (\nu \kappa_R + \kappa_\varphi) = I_1 E_1 \left( \nu \frac{d\mathcal{G}}{dR} + \frac{\mathcal{G}}{R} \right)$$

$$M_{R\varphi} = M_{\varphi R} = 0, \text{ wobei } I_1 = \frac{b^3}{12}, \quad E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}.$$

$$Q_R = -I_1 E_1 \frac{d}{dR} \left( \frac{1}{R} \frac{d}{dR} (R \mathcal{G}) \right),$$

$$Q_\varphi = 0.$$

- Gleichgewichtsbedingungen:  $\frac{d(RQ_R)}{dR} = R p_z,$

$$\frac{dM_R}{dR} + \frac{1}{R} (M_R - M_\varphi) + Q_R = 0.$$

- Die Plattengleichung:  $\Delta \Delta w_0(R) = \frac{1}{I_1 E_1} p_z(R)$

$$\left( \frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \right) \left( \frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \right) w_0(R) = \frac{p_z(R)}{I_1 E_1}.$$

## b) Lösung von rotationssymmetrischen Kreis- und Kreisringplatten-Aufgaben

- Mit der Lösung der Plattengleichung:

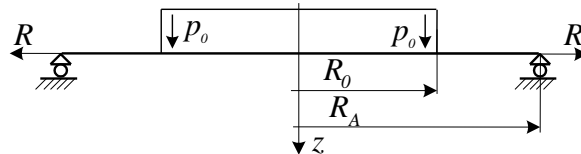
Allgemeine Lösung:  $w_0(R) = w_{0h}(R) + w_{0p}(R).$

Homogene Lösung:  $w_{0h}(R) = \frac{A}{2} R^2 + B \ln R + C + D R^2 \ln R.$

Partikuläre Lösung, wenn  $p_z(R) = p_0 = \text{konst.}$ :  $w_{0p}(R) = \frac{p_0}{I_1 E_1} \frac{R^4}{64}.$

Es gibt ein Problem, wenn die Funktion  $p_z(R)$  eine nicht stetige Funktion ist.

Z. B.:

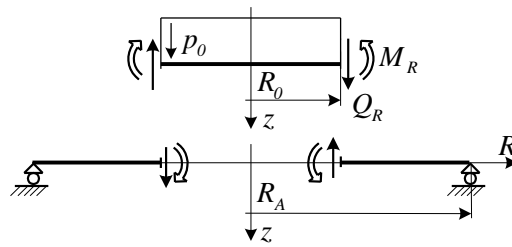


Bekannt sind:  $R_0, R_A, p_0$

Die Belastung:  $0 < R < R_0 \quad p_z(R) = p_0,$

$R_0 < R < R_A \quad p_z(R) = 0.$

Lösung des Problems mittels Superposition:



An der Stelle  $R=R_0$  muss man vier Kopplungsbedingungen für  $w_0, \vartheta, M_R, Q_R$  vorschreiben.

Für die Bereiche  $0 < R < R_0$  und  $R_0 < R < R_A$  muss man gesondert Lösungen aufschreiben.

Die unbekannt Konstanten kann man mit Hilfe der Rand- und Übergangsbedingungen bestimmen.

Dieser Lösungsweg ist ziemlich kompliziert.

- Lösung des Problems mittels Belastungsfunktionen:

Die homogene Lösung wird ebenso angegeben, wie im vorherigen Fall.

Diese Methode vereinfacht das Finden der partikularen Lösung im Falle einer nicht stetigen Belastung  $p_z(R)$ .

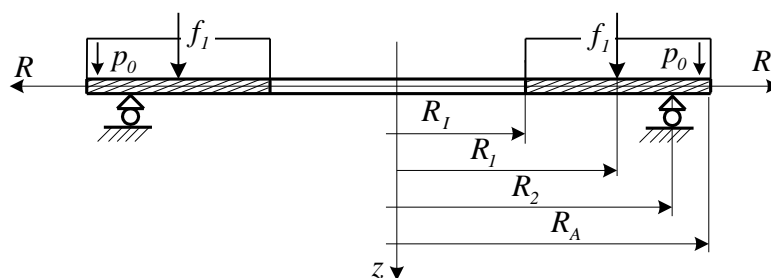
Der erste Schritt der Lösung ist die Integration der ersten skalaren Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{d(RQ_R)}{dR} = R p_z / \int_{R_I}^R \dots\dots dR,$$

$$RQ_R(R) - R_I Q_R(R_I) = \int_{R=R_I}^R R p_z(R) dR,$$

$$Q_R(R) = \frac{1}{R} \left( R_I Q_R(R_I) + \int_{R_I}^R R p_z(R) dR \right).$$

Beispiel: Bestimmung der Querkraft  $Q_R$ .



Bekannt sind  $p_0, f_1, R_1, R_2, R_A, b$

Gesucht ist die Querkraft-Funktion  $Q_R(R)$

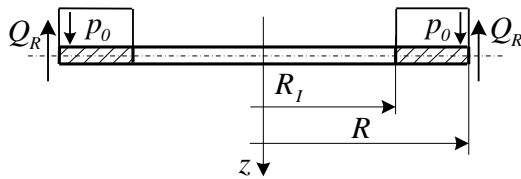
$\alpha$ ) Bestimmung der Lagerkraft aus der Gleichgewichtsbedingung in  $z$ -Richtung:

$$p_0(R_2^2 - R_1^2)\pi + f_1 2R_1\pi - f_1 2R_2\pi = 0,$$

$$f_1 = \frac{p_0}{2} \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{R_2} + f_1 \frac{R_1}{R_2} \quad (\uparrow).$$

$\beta$ ) Bestimmung der Querkraft  $Q_R(R)$  aus der Gleichgewichtsbedingung in  $z$ -Richtung:

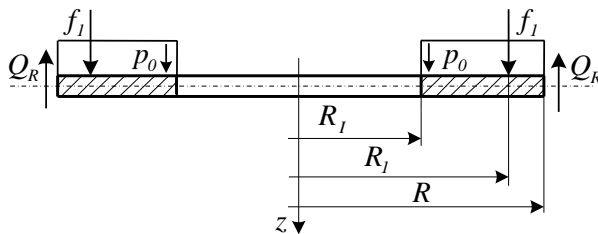
-  $R_I < R < R_I$



$$p_0 (R^2 - R_I^2) \pi = Q_R 2R\pi = 0,$$

$$Q_R(R) = \frac{p_0}{2} R - \frac{p_0}{2} \frac{R_I^2}{R}.$$

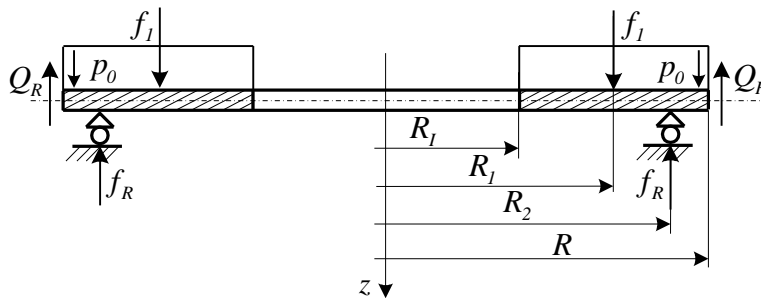
-  $R_I < R < R_2$



$$p_0 (R^2 - R_I^2) \pi + f_1 2R_I \pi - Q_R 2R\pi = 0,$$

$$Q_R(R) = \frac{p_0}{2} R - \frac{p_0}{2} \frac{R_I^2}{R} + f_1 \frac{R_I}{R}.$$

-  $R_2 < R < R_A$



$$p_0 (R^2 - R_I^2) \pi + f_1 2R_I \pi - f_R 2R_2 \pi - Q_R 2R\pi = 0,$$

$$Q_R(R) = \frac{p_0}{2} R - \frac{p_0}{2} \frac{R_I^2}{R} + f_1 \frac{R_I}{R} - f_R \frac{R_2}{R}.$$

$\gamma$ ) Weiterer Gedankengang zur Lösung:

Zusammenhang zwischen der Querkraft  $Q_R$  und der Verdrehung  $\mathcal{G}$ :

$$Q_R = -E_I I_1 \frac{d}{dR} \left( \frac{1}{R} \frac{d}{dR} (R \mathcal{G}) \right).$$

Umgeformt: 
$$\frac{d}{dR} \left( \frac{1}{R} \frac{d}{dR} (R \mathcal{G}) \right) = -\frac{Q_R(R)}{E_I I_1}$$

Durchführung der Differentiation der linken Seite:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dR} \left( \frac{1}{R} \mathcal{G} + \frac{d\mathcal{G}}{dR} \right) &= -\frac{Q_R(R)}{E_I I_1}, \\ -\frac{1}{R^2} \mathcal{G} + \frac{1}{R} \frac{d\mathcal{G}}{dR} + \frac{d^2 \mathcal{G}}{dR^2} &= -\frac{Q_R(R)}{E_I I_1}, \\ R^2 \frac{d^2 \mathcal{G}}{dR^2} + R \frac{d\mathcal{G}}{dR} - \mathcal{G} &= -\frac{R^2 Q_R(R)}{E_I I_1}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung *Eulerschen* Typs.

Die Lösung der Differentialgleichung:  $\mathcal{G}(R) = \mathcal{G}_h(R) + \mathcal{G}_p(R)$ .

Homogene Gleichung:  $R^2 \mathcal{G}'' + R \mathcal{G}' - \mathcal{G} = 0,$



Homogene Lösung:  $\mathcal{G}_h(R) = R^n$ .

Eingesetzt in die *Eulersche* Differentialgleichung:

$$R^2 n(n-1)R^{n-2} + RnR^{n-1} - R^n = 0,$$

$$n(n-1)R^n + nR^n - R^n = 0,$$

$$n(n-1) + n - 1 = 0,$$

$$(n-1)(n+1) = 0 \Rightarrow n = \pm 1.$$

Die homogene Lösung ist also:  $\mathcal{G}_h(R) = C_1 R + \frac{C_2}{R}$ .

Partikuläre Lösung: man erhält sie mittels Integration der Differentialgleichung.

$$\frac{d}{dR} \left[ \frac{1}{R} \frac{d}{dR} (R \mathcal{G}_p) \right] = - \frac{Q_R(R)}{I_1 E_1} \quad \Bigg/ \int_{R_1}^R \dots dR$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} (R \mathcal{G}_p) = - \frac{1}{E_1 I_1} \int_{R=R_1}^R Q_R(R) dR$$

$$R \mathcal{G}_p(R) = - \frac{1}{I_1 E_1} \int_{R=R_1}^R R \left( \underbrace{\int_{\xi=R_1}^R Q_R d\xi}_{v'} \right) dR \quad \text{- partielle Integration.}$$

$$u = \frac{R^2}{2} \quad v' = Q_R.$$

$$R \mathcal{G}_p(R) = - \frac{1}{I_1 E_1} \left\{ \left[ \frac{R^2}{2} \int_{\xi=R_1}^R Q_R d\xi \right]_{R_1}^R - \int_{\xi=R_1}^R \frac{R^2}{2} Q_R d\xi \right\},$$

$$\mathcal{G}_p(R) = - \frac{1}{2 I_1 E_1} \left\{ R \int_{\xi=R_1}^R Q_R dR - \frac{1}{R} \int_{\xi=R_1}^R R^2 Q_R d\xi \right\}.$$

Die allgemeine /vollständige Lösung:

$$\mathcal{G}(R) = \mathcal{G}_h + \mathcal{G}_p = C_1 R + C_2 \frac{1}{R} - \frac{1}{2 I_1 E_1} \left\{ R \int_{R_1}^R Q_R dR - \frac{1}{R} \int_{R_1}^R R^2 Q_R dR \right\}$$

Die Koeffizienten  $C_1$  und  $C_2$  können mit Hilfe der Randbedingungen bestimmt werden.

Unter Verwendung des allgemeinen *Hookeschen* Gesetzes erhält man die Biegemomente:

$$M_R(R) = I_1 E_1 \left( \frac{d\mathcal{G}}{dR} + \nu \frac{\mathcal{G}}{R} \right) = I_1 E_1 \left\{ (1+\nu) C_1 - (1-\nu) \frac{C_2}{R^2} \right\} - \left[ \underbrace{\frac{1+\nu}{2} \int_{R=R_1}^R Q_R dR}_{K_0(R)} + \underbrace{\frac{1-\nu}{2} \frac{1}{R^2} \int_{R=R_1}^R R^2 Q_R(R) dR}_{K_2(R)} \right],$$

$$M_\varphi(R) = I_1 E_1 \left( \nu \frac{d\vartheta}{dR} + \frac{\vartheta}{R} \right) = I_1 E_1 \left\{ (1+\nu) C_1 + (1-\nu) \frac{C_2}{R^2} \right\} - \left[ \underbrace{\frac{1+\nu}{2} \int_{R=R_1}^R Q_R dR}_{K_0(R)} - \underbrace{\frac{1-\nu}{2} \frac{1}{R^2} \int_{R=R_1}^R R^2 Q_R dR}_{K_2(R)} \right].$$

Einführung einer neuen Veränderlichen:  $\lambda = \frac{R^2}{R_A^2}$ .

Die Biegemomente:

$$\left. \begin{aligned} M_R(\lambda) &= A - \frac{B}{\lambda} - K_R(\lambda) \\ M_\varphi(\lambda) &= A + \frac{B}{\lambda} - K_\varphi(\lambda) \end{aligned} \right\}$$

Die Koeffizienten A und B können mit Hilfe der Randbedingungen bestimmt werden.

Belastungsfunktionen:  $K_R(\lambda) = K_0(\lambda) + K_2(\lambda)$ ,

$$K_\varphi(\lambda) = K_0(\lambda) - K_2(\lambda).$$

Die Belastungsfunktionen kann man unmittelbar aus den Belastungen berechnen:

$$K_0(\lambda) = \frac{1+\nu}{2} \int_{R=R_1}^R Q_R dR = \frac{1+\nu}{4} \int_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda} \frac{R_A Q_R(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} d\lambda,$$

$$K_2(\lambda) = \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{R^2} \int_{R=R_1}^R R^2 Q_R dR = \frac{1-\nu}{4} \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda} (R_A Q_R) \sqrt{\lambda} d\lambda.$$

Die Verdrehung  $\vartheta$  erhält man mittels des *Hookeschen* Gesetzes:

$$\vartheta = \frac{1}{I_1 E_1} \frac{1}{1-\nu^2} (M_\varphi - \nu M_R) = \frac{1}{I_1 E} (M_\varphi - \nu M_R).$$

Die Durchbiegung  $w_0$  kann man aus der Verdrehung mittels Integration bestimmen:

$$-\frac{dw_0}{dR} = \vartheta \Rightarrow w_0(R) = w_{0_1} - \int_{R=R_1}^R \vartheta(R) dR.$$

### c) Dimensionierung und Sicherheitsnachweis von Kreis- und Kreisringplatten:

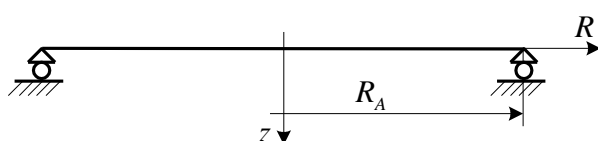
- Bestimmung der Querkraft  $Q_R(R)$  aus der Gleichgewichtsbedingung in  $z$ -Richtung.
- Ermittlung der Momente  $M_R(R)$ ,  $M_\varphi(R)$  mittels der Methode der Belastungsfunktionen.

$$\left. \begin{aligned} M_R(\lambda) &= A - \frac{B}{\lambda} - K_R(\lambda) \\ M_\varphi(\lambda) &= A + \frac{B}{\lambda} - K_\varphi(\lambda) \end{aligned} \right\} \lambda = \frac{R^2}{R_A^2}.$$

Die Koeffizienten A, B werden mit Hilfe der Randbedingungen berechnet.

Die häufigsten Randbedingungen:

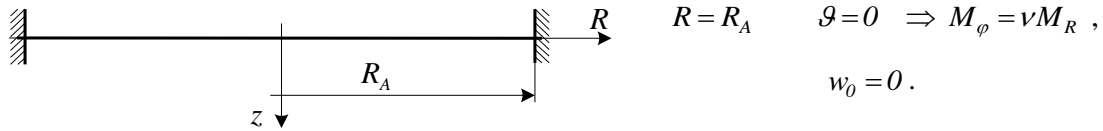
- Einfache (gelenkige) Lagerung:



$$R = R_A$$

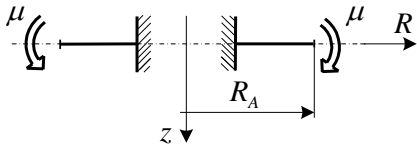
$$M_R = 0, \quad w_0 = 0.$$

- Einspannung:



$$R = R_A \quad \mathcal{G} = 0 \Rightarrow M_\varphi = \nu M_R, \\ w_0 = 0.$$

- Belasteter und eingespannter Rand:



$$R = R_I \quad w_0 = 0, \quad \mathcal{G} = 0, \\ R = R_A \quad M_R = -\mu.$$

- Bestimmung des kritischen Ortes mit dem Platten / Momenten-Diagramm:

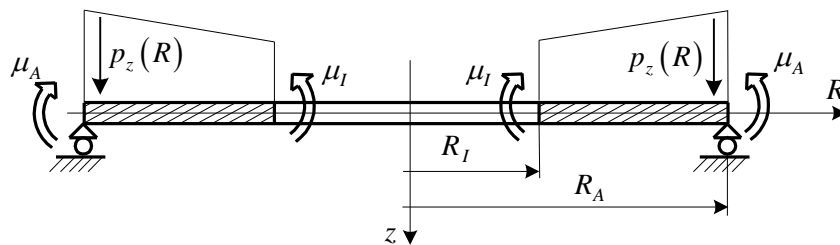
$$\left. \begin{aligned} M_R(\lambda) &= A - \frac{B}{\lambda} - K_R(\lambda) \\ M_\varphi(\lambda) &= A + \frac{B}{\lambda} - K_\varphi(\lambda) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} K_R(\lambda) &= K_0(\lambda) + K_2(\lambda), \\ K_\varphi(\lambda) &= K_0(\lambda) - K_2(\lambda). \end{aligned}$$

$h_R(\lambda)$                        $h_\varphi(\lambda)$

$h_R(\lambda)$  und  $h_\varphi(\lambda)$  sind hyperbolische Funktionen.

- Bestimmung der maximalen Vergleichsspannung an der Oberfläche  $z = \pm b/2$  der Platte.
- Durchführung des Sicherheitsnachweises.

### 8.3. Beispiel zur Darstellung eines Plattendiagrammes und zum Sicherheitsnachweis



Bekannt sind: die Geometrie, die Dimensionen des Materials, die Belastung.

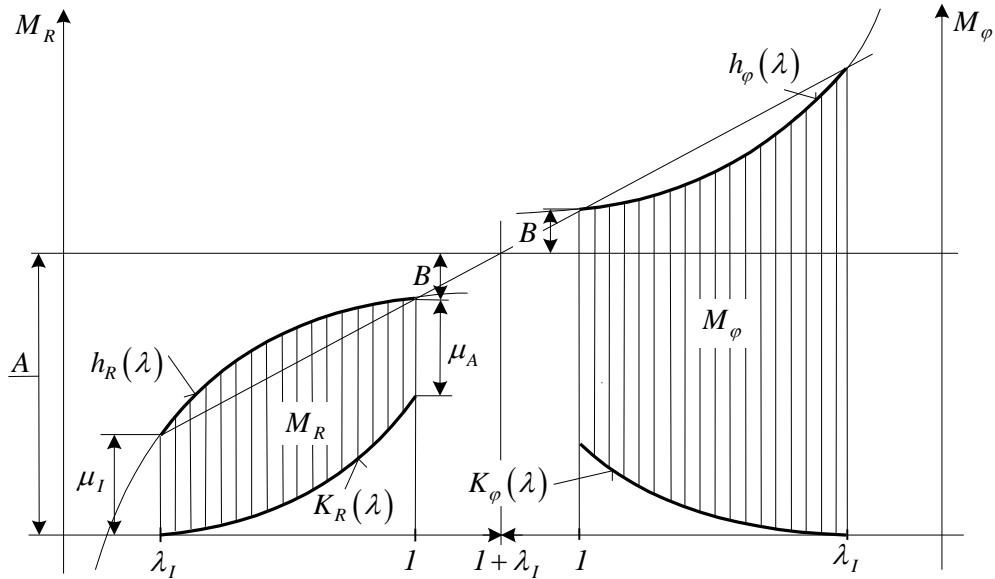
Aufgabe: Durchführung des Sicherheitsnachweises.

Darstellung des Momenten-/ Plattendiagrammes:  $M_R(\lambda) = A - \frac{B}{\lambda} - K_R(\lambda),$

$$M_\varphi(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda} - K_\varphi(\lambda).$$

Randbedingungen:  $\lambda = \lambda_I, M_R = \mu_I \Rightarrow h_R(\lambda_I) = \mu_I + K_R(\lambda_I)$

$$\lambda = I, M_R = \mu_A \Rightarrow h_R(\lambda = I) = \mu_A + K_R(\lambda = I).$$



In diesem Fall gilt:  $M_R > 0$  und  $M_\varphi > 0$

Aus dem Momenten-Diagramm kann man den kritischen Radius bestimmen.

In diesem Fall ist der kritische Ort:  $R = R_I$ , ( $\lambda = \lambda_I$ ).

- Berechnung der Spannungen:

$$\sigma_R = \frac{M_R}{I_I} z, \quad \sigma_\varphi = \frac{M_\varphi}{I_I} z, \quad \tau_{zR} = -\frac{Q_R}{2I_I} \left( \frac{b^2}{4} - z^2 \right), \quad \sigma_z = 0.$$

Im rotationssymmetrischen Fall:  $\tau_{zR} = 0$ .

- Die maximalen Spannungen treten an der oberen und unteren Oberfläche der Platte auf.

$$\sigma_{Rmax} = \frac{M_R}{I_I} \frac{b}{2}, \quad \sigma_{\varphi max} = \frac{M_\varphi}{I_I} \frac{b}{2}.$$

Im rotationssymmetrischen Fall sind die Hauptspannungen aus dem Diagramm:  $\sigma_\varphi > \sigma_R > \sigma_z = 0$ .

- Die Vergleichsspannung nach Mohr ist in diesem Fall:  $\sigma_{Vmax} (Mohr) = (\sigma_\varphi - \sigma_R) \Big|_{\lambda=\lambda_I}$ .

- Sicherheitsnachweis:  $\sigma_{Vmax} \leq \sigma_{zul}$ .