

**FINITE ELEMENTE ANALYSE**

**Theoretische Fragen für die Studenten des  
MSc Studienganges Fahrzeugingenieur**

1. Definieren Sie die Zielstellung der Festigkeitslehre!

*Zielstellung der Festigkeitslehre:*

Untersuchung der Kinematik, der Dynamik und des Materialverhaltens von festen Körpern, die sich sowohl vor der Belastung als auch nach der Belastung im Ruhezustand befinden.

2. Definieren Sie das Körpermodell!

*Definition des Körpermodells:*

Ein Körper, der die wichtigsten Eigenschaften des realen, zu untersuchenden Körpers in Hinblick auf das Untersuchungsziel widerspiegelt.

3. Schreiben Sie die Bestimmung des Starrkörper- und Festkörper-Modells auf!

*Starrkörper:* Der Abstand / die Entfernung zwischen zwei beliebigen Punkten eines Körpers ändert sich nicht. Der Abstand zwischen den Punkten ändert sich auch unter Belastung nicht.

*Festkörper:* Der Körper ist verformbar. Die Entfernung / der Abstand zwischen Punkten des Körpers sowie der Winkel zwischen geraden Linien können sich unter Belastung ändern. Form und Größe / Dimension der Flächen und Volumina des Körpers können sich ändern.

4. Geben Sie die Definition der Formänderung, der elastischen Formänderung und der plastischen Formänderung an!

*Formänderung:*

- Infolge der Belastung werden sich die Punkte des Körpers im Verhältnis zueinander verschieben und deshalb
- werden sich die materiellen geometrischen Formen des Körpers (Längen, Winkel, Flächen, Volumina) ändern.

*Elastische Formänderung:* Der Körper kehrt nach der Entlastung in seine ursprüngliche Form zurück. Der belastete, verzerrte Körper kehrt in seine ursprüngliche Form zurück, wenn er entlastet wird.

*Plastische Formänderung:* Der Körper kehrt nach der Entlastung nicht in seine ursprüngliche Form zurück.

5. In welchem Fall kann man über kleine Verschiebungen sprechen?

*Kleine Verschiebungen:* Die Verschiebungen der Punkte des Körpers sind im Vergleich zu den charakteristischen Dimensionen des Körpers sehr klein.

6. In welchem Fall kann man über kleine Verzerrungen sprechen?

*Kleine Verzerrungen:* Die Verzerrungsgrößen des Körpers sind wesentlich kleiner als 1.

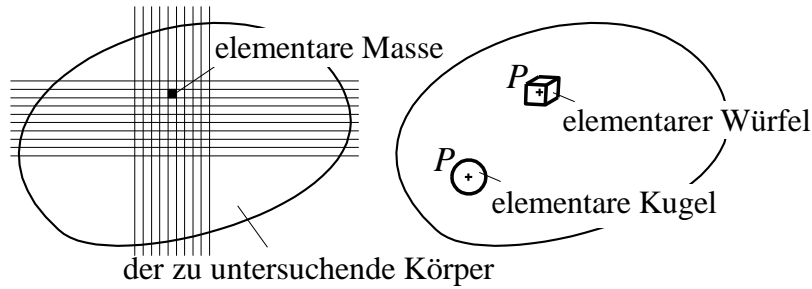
$$\varepsilon \ll 1, \quad \gamma \ll 1. \quad (\varepsilon, \gamma \approx 10^{-3} - 10^{-5})$$

7. Definieren Sie den Begriff einer elementaren Umgebung / einer elementaren Masse!

*Elementare Umgebung, elementare Masse:*

Jeder Körper kann in  $\infty$  (unendlich) viele Teile unterteilt werden. Einen so kleinen Teil betrachten

wir als elementare Masse / Umgebung.

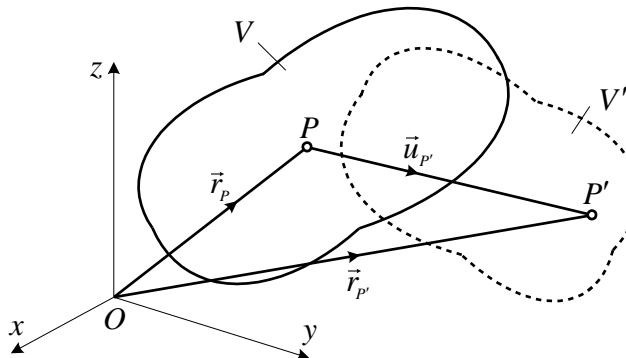


Die elementare Masse (Massenpunkt), die elementare Umgebung ist ein Teil des Körpers, dessen Dimension im Vergleich zu den charakteristischen Dimensionen des gesamten Körpers sehr klein ist.

8. Schreiben Sie den Verschiebungsvektor eines Punktes und das Verschiebungsfeld eines elastischen Körpers auf! Veranschaulichen Sie die Antwort, den Verschiebungszustand eines Punktes  $P$  mit einem Bild! Geben Sie die Benennung der benutzten physikalischen Größen an!

Der Verschiebungsvektor eines Punktes:  $\vec{u}_p = u_p \vec{e}_x + v_p \vec{e}_y + w_p \vec{e}_z$ .

Das Verschiebungsfeld eines Körpers:  $u(\vec{r}) = u(\vec{r}) \vec{e}_x + v(\vec{r}) \vec{e}_y + w(\vec{r}) \vec{e}_z$ .



$V$  - das Volumen des Körpers vor der Belastung,  
 $V'$  - das Volumen des Körpers nach der Belastung,

$P$  - die Lage des Punktes vor der Belastung,  
 $P'$  - die Lage des Punktes nach der Belastung.

9. Schreiben Sie die Definition des Verzerrungstensors in dyadischer und in Matrizenform auf!

Der Verzerrungstensor: - Dyadische Darstellung:  $\underline{\underline{A}}_p = \vec{\alpha}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\alpha}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\alpha}_z \circ \vec{e}_z$ .

- Matrizendarstellung:  $\left[ \underline{\underline{A}}_p \right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$  - symmetrisch.

10. Definieren Sie die spezifischen Verzerrungskennwerte, die Dehnungen  $\varepsilon_n$  und die Gleitungen  $\gamma_{nm}$ . Veranschaulichen Sie den Verzerrungszustand in der Umgebung eines Punktes  $P$ .

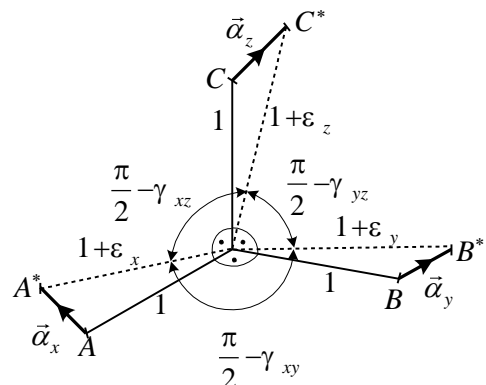
Veranschaulichung des Verzerrungszustandes:

Definition der Dehnungen - die geänderten Längen:

$\overline{PA^*} = 1 + \varepsilon_x$ ,  $\overline{PB^*} = 1 + \varepsilon_y$ ,  $\overline{PC^*} = 1 + \varepsilon_z$ .

Definition der Gleitungen - die geänderten Winkel:

$\left( \frac{\pi}{2} - \gamma_{xy} \right)$ ,  $\left( \frac{\pi}{2} - \gamma_{yz} \right)$ ,  $\left( \frac{\pi}{2} - \gamma_{xz} \right)$ .



11. Geben Sie die Vorzeichenregel für die Dehnungen und die Gleitungen an!

Vorzeichen:  $\varepsilon > 0$  - Verlängerung,  $\gamma > 0$  - der ursprünglich rechte Winkel verringert sich,  
 $\varepsilon < 0$  - Verkürzung.  $\gamma < 0$  - der ursprünglich rechte Winkel vergrößert sich.

12. Was ist der Spannungsvektor?

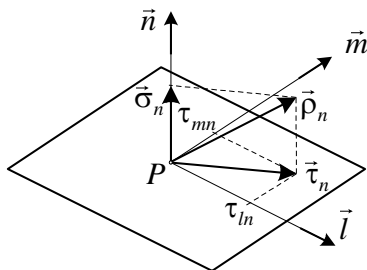
Der Spannungsvektor ist an einer Schnittfläche entstehende innere Flächenkraftintensität.  
 Flächenkraftintensität  $\equiv$  spezifische Flächenkraft.

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(\vec{r}, \vec{n}) = \vec{\rho}_n \left[ \text{N/m}^2 = \text{Pa}, \text{N/mm}^2 = \text{MPa} \right].$$

Der Spannungsvektor in einem gegebenen Punkt  $P$  hängt von dem Normalenvektor  $\vec{n}$  der Schnittfläche ab.

13. Wie kann man die Komponenten des Spannungsvektors berechnen?

Komponenten des Spannungsvektors: -Normalspannungsvektor:  $\vec{\sigma}_n = \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{\rho}_n)}_{\sigma_n} \vec{n}$ ,



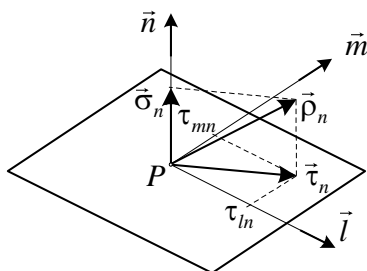
- Schubspannungsvektor:  $\vec{\tau}_n = \vec{\rho}_n - \sigma_n \vec{n} = (\vec{n} \times \vec{\rho}_n) \times \vec{n}$ .

$\vec{n}$  - der Normaleneinheitsvektor des Flächenelementes  $dA$ ,  
 $\vec{l}, \vec{m}$  - Einheitsvektoren in der Ebene des Flächenelementes.

$$|\vec{n}| = |\vec{m}| = |\vec{l}| = 1, \quad \vec{n} \cdot \vec{m} = \vec{m} \cdot \vec{l} = \vec{n} \cdot \vec{l} = 0.$$

14. Wie kann man die Koordinaten des Spannungsvektors berechnen?

Koordinaten des Spannungsvektors: - Normalspannung:  $\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{\rho}_n \cdot \vec{n}$ ,  
 - Schubspannungen:  $\tau_{mn} = \vec{m} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{m} \cdot \vec{\tau}_n$ ,  
 $\tau_{ln} = \vec{l} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{l} \cdot \vec{\tau}_n$ .



$\vec{n}$  - der Normaleneinheitsvektor des Flächenelementes  $dA$ ,  
 $\vec{l}, \vec{m}$  - Einheitsvektoren in der Ebene des Flächenelementes.

$$|\vec{n}| = |\vec{m}| = |\vec{l}| = 1, \quad \vec{n} \cdot \vec{m} = \vec{m} \cdot \vec{l} = \vec{n} \cdot \vec{l} = 0.$$

15. Schreiben Sie die Definition des Spannungstensors in dyadischer und in Matrizenform auf!

Der Spannungstensor: - Dyadische Darstellung:  $\underline{\underline{F}} = \vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z$ .

- Matrizendarstellung:  $\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$  - symmetrischer Tensor.

16. Definieren Sie die Hauptspannungen und der Hauptspannungsachsen!

Definition: Wenn  $\vec{\tau}_e = \vec{0}$ , das heißt  $\vec{\rho}_e = \sigma_e \vec{e}$  gültig ist, wobei der Einheitsvektor  $\vec{e}$  zu der elementaren Fläche senkrecht ist, dann ist  $\vec{e}$  eine Haupttrichtung / Hauptachse,  $\sigma_e$  eine Hauptspannung und die Ebene senkrecht zu  $\vec{e}$  ist eine Hauptschnittebene.

17. Formulieren Sie das Hauptachsenproblem / das Eigenwertproblem!

Hauptachsenproblem = Eigenwertproblem

Für den Spannungszustand: Für den Verzerrungszustand:

$$\vec{\rho}_e = \sigma_e \vec{e},$$

$$\underline{\underline{F}} \cdot \vec{e} = \sigma_e \underline{\underline{E}} \cdot \vec{e},$$

$$\vec{\alpha}_e = \varepsilon_e \vec{e},$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{e} = \varepsilon_e \underline{\underline{E}} \cdot \vec{e},$$

$$\text{Einheitstensor: } \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alle Glieder werden auf die linke Seite umgeordnet und danach wird der Vektor  $\vec{e}$  ausgeklammert:

$$\left(\underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{E}}\right) \cdot \vec{e} = \vec{0}. \quad \left(\underline{\underline{A}} - \varepsilon_e \underline{\underline{E}}\right) \cdot \vec{e} = \vec{0}.$$

Das Hauptachsenproblem kann sowohl für den Spannungszustand als auch für den Verzerrungszustand in gleicher Weise formuliert werden.

18. Beschreiben Sie die Fragestellung und die Antwort auf diese Fragestellung bei dem Hauptachsenproblem!

*Frage:* Gibt es eine Richtung  $\vec{e}$ , die die obigen Gleichungen befriedigt?

*Antwort:* Es gibt mehrere, und zwar drei

$\vec{e}$  - drei Richtungsvektoren der Hauptachsen,

$\sigma_e$  - drei Hauptspannungen und

$\varepsilon_e$  - drei Hauptdehnungen.

19. Schreiben Sie die charakteristische Gleichung des Hauptachsenproblems und die Definition der skalaren Invarianten des Spannungstensors auf!

Die charakteristische Gleichung des Spannungshauptachsenproblems:

$$\sigma_e^3 - F_I \sigma_e^2 + F_{II} \sigma_e - F_{III} = 0.$$

Es ist eine algebraische Gleichung dritten Grades für die Unbekannten  $\sigma_e$ . Die Lösungen (die Wurzeln) der Gleichung sind die Hauptspannungen  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Die (erste, zweite und dritte) skalaren Invarianten des Spannungstensors:

$$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$F_{II} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3,$$

$$F_{III} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$$

20. Geben Sie die beiden Formeln für die Berechnung der spezifischen Formänderungsenergie an!

Die Formänderungsenergiedichte: Formänderungsenergie in einer Volumeneinheit:

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\vec{\rho}_x \cdot \vec{\alpha}_x + \vec{\rho}_y \cdot \vec{\alpha}_y + \vec{\rho}_z \cdot \vec{\alpha}_z),$$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}).$$

21. Schreiben Sie die Gleichgewichtsbedingungen in vektorieller Form und in skalarer Form in kartesischen Koordinaten auf!

*Die Gleichgewichtsbedingungen:*

- Die vektorielle Form:  $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$ ,  $\vec{q}$  - die Dichte / die Intensität der Volumenkräfte.

- Die skalare Form in kartesischen Koordinaten:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0.$$

22. Schreiben Sie die kinematischen Gleichungen in tensorieller Form und in skalarer Form in kartesischen Koordinaten auf!

Die kinematischen Gleichungen:

- Die tensorielle Form:  $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \underline{\underline{u}})$

- Die skalare Form in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} = \gamma_{zy} &= \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{xz} = \gamma_{zx} &= \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

23. Geben Sie das Hookesche Gesetz für isotropes Material in tensorieller Form und in Matrizenform mit der Benennung der Materialkennwerte an!

- Die tensorielle Form:  $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G} \left( \underline{\underline{F}} - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \underline{\underline{E}} \right), \quad \underline{\underline{F}} = 2G \left( \underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \underline{\underline{E}} \right).$

- Die Matrizenform:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}.$$

24. Schreiben Sie das Hookesche Gesetz für orthotropes Material in Matrizenform auf! Geben Sie die Benennung der Materialkennwerte und die Zusammenhänge zwischen der Materialkennwerte an!

Das orthotrope Materialgesetz in Matrizenform:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{bmatrix}.$$

Die Richtungen 1,2,3 sind die Material-Hauptrichtungen des orthotropen Verbundwerkstoffes.

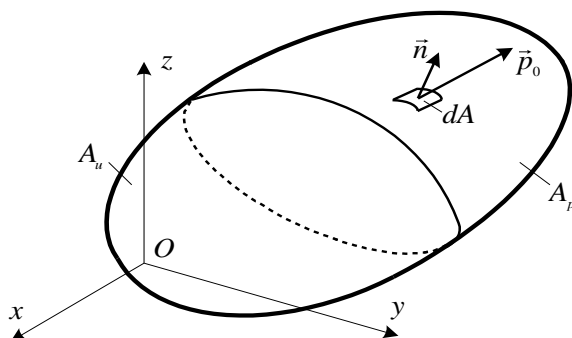
$E_1, E_2, E_3$  sind die Elastizitätsmodule in den Richtungen 1,2,3;  
 $G_{12}, G_{23}, G_{13}$  sind die Schubmodule,  
 $\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{32}, \nu_{13}, \nu_{31}$  sind die *Poissonschen* Koeffizienten.

Die Formänderungsenergie  $u$  ist immer eine positive skalare Größe. Es gilt nur in dem Fall, wenn die Matrix der Materialkennwerte symmetrisch ist:

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}.$$

Die sechs *Poissonschen* Koeffizienten sind also nicht voneinander abhängig. Es gibt nur neun unabhängige Materialkennwerte.

25. Schreiben Sie die kinematischen und dynamischen Randbedingungen einer elastischen Randwertaufgabe auf!



*Kinematische Randbedingungen:*

$\underline{\underline{u}}|_{A_u} = \underline{\underline{u}}_0$  an der Oberfläche  $A_u$ , wobei

$\underline{\underline{u}}_0$  - bekannte Verschiebungen,

$A_u$  - der Oberflächenteil, auf dem die Verschiebungen vorgegeben sind.

*Dynamische Randbedingungen:*

$\underline{\underline{F}}|_{A_p} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{p}}_0$  an der Oberfläche  $A_p$ , wobei

$\underline{\underline{p}}_0$  - bekannte Flächenlast,

$A_p$  - der Oberflächenteil, auf dem die Oberflächenbelastung vorgegeben ist.

26. In welchem Fall kann man über die exakte und die Näherungslösung der elastischen Randwertaufgabe sprechen?

*Exakte Lösung:* Die unbekanntes Felder  $\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{F}}$  befriedigen alle Gleichungen des Gleichungssystems und der Randbedingungen.

*Näherungslösung:* Die unbekanntes Felder  $\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{F}}$  erfüllen nicht alle Gleichungen des Gleichungssystems und der Randbedingungen.

27. Definieren Sie das kinematisch mögliche Verschiebungsfeld! Was ist das kinematisch mögliche Verzerrungs- und Spannungsfeld?

*Definition:* Ein Verschiebungsfeld ist kinematisch möglich, wenn

- das Feld genügend oft differenzierbar ist (die kinematischen Gleichungen erfüllt):

$$\underline{\underline{A}}^* = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{u}}^* \circ \nabla + \nabla \circ \underline{\underline{u}}^* \right) \text{ und}$$

- das Feld auch die kinematischen Randbedingungen befriedigt:

$$\underline{\underline{u}}^* = \underline{\underline{u}}_0 \text{ auf der Oberfläche } A_u.$$

- Das kinematisch mögliche Verzerrungsfeld:  $\underline{\underline{A}}^* = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{u}}^* \circ \nabla + \nabla \circ \underline{\underline{u}}^* \right)$

- Das kinematisch mögliche Spannungsfeld:  $\underline{\underline{F}}^* = 2G \left( \underline{\underline{A}}^* + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \underline{\underline{E}}^* \right).$

28. Definieren Sie das statisch mögliche Spannungsfeld! Bestimmen Sie das statisch mögliche Verzerrungsfeld!

*Definition:* ein Spannungsfeld ist statisch möglich, wenn das Feld

- die Gleichgewichtsbedingungen  $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \underline{\underline{q}} = \vec{0}$  erfüllt und

- die dynamischen Randbedingungen  $\underline{\underline{F}}|_{A_p} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0$  auf der Oberfläche  $A_p$  befriedigt.

- Das statisch mögliche Verzerrungsfeld:  $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G} \left( \underline{\underline{F}} - \frac{\nu}{1+\nu} \underline{\underline{F}}_I E \right)$ .

29. Beschreiben Sie das Prinzip der virtuellen Arbeit erstens in allgemeiner Form und zweitens auch für dieselbe Randwertaufgabe!

Die allgemeinste Form: 
$$\int_{(V)} \left( \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{A}} \right) dV = \int_{(V)} \vec{u} \cdot \vec{q} dV + \int_{(A)} \vec{u} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA .$$

die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte
die virtuelle Arbeit der Volumenkräfte
die virtuelle Arbeit der inneren und äußeren Oberflächenkräfte

Das Prinzip für dieselbe Randwertaufgabe:

$$\int_{(V)} \left( \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{A}} \right) dV = \int_{(V)} \vec{u} \cdot \vec{q} dV + \underbrace{\int_{(A_u)} \vec{u}_0 \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA}_* + \underbrace{\int_{(A_p)} \vec{u} \cdot \vec{p}_0 dA}_{**} .$$

\* die Arbeit der inneren Kräfte aus den gegebenen Verschiebungen,

\*\* die virtuelle Arbeit der bekannten Oberflächenkräfte.

30. Definieren Sie das konservative Kraftfeld!

*Das konservative Kraftfeld:* Die Arbeit in diesem Kraftfeld hängt nicht vom Weg ab. Die Arbeit hängt nur vom Anfangs- und vom Endzustand ab.

31. Geben Sie die Definition der gesamten potentiellen Energie an!

Definition des Gesamtpotentials:  $\Pi = U - W_k$ .

$U$  – die Verzerrungsenergie des Körpers,  $W_k$  - die Arbeit der äußeren Kräfte.

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{A}} dV}_{\text{die Formänderungsenergie}} - \underbrace{\int_{(V)} \vec{u} \cdot \vec{q} dV}_{\text{die Arbeit der Volumenkräfte}} - \underbrace{\int_{(A_p)} \vec{u} \cdot \vec{p}_0 dA}_{\text{die Arbeit der Oberflächenkräfte}} .$$

32. Beschreiben Sie das Prinzip des Minimums der gesamten potentiellen Energie! Wie kann man mittels des Prinzips eine exakte und eine Näherungslösung vorstellen?

*Das Prinzip des Minimums der gesamten potentiellen Energie*

Es ist zu beweisen, dass die vollständige (gesamte) potentielle Energie aus allen möglichen Verschiebungsfeldern für das reale Verschiebungsfeld einen Minimalwert ergibt.

$$\Pi^* - \Pi \geq 0 .$$

*Exakte Lösung:* Wenn wir den Minimalwert / das Minimum aus allen kinematisch möglichen Werten von  $\Pi^*$  auswählen:  $\Pi_{\min}^* = \Pi$ .

*Näherungslösung:* Wenn wir nicht den Minimalwert / das Minimum aus allen kinematisch möglichen Werten von  $\Pi^*$  auswählen:  $\Pi_{\min}^* \neq \Pi$ .

33. Beschreiben Sie das Variationsprinzip von Lagrange!

Die gesamte potentielle Energie kann als ein Funktional betrachtet werden:

$$\Pi[\bar{u}] = U[\bar{u}] - \int_{(V)} \bar{u} \cdot \bar{q} dV - \int_{(A_p)} \bar{u} \cdot \bar{p}_0 dA.$$

Randbedingung:  $\delta \bar{u}|_{A_u} = 0$ , weil  $\bar{u}$  auf der Oberfläche  $A_u$  gegeben ist.

*Das Variationsprinzip von Lagrange:*

Das Funktional (die gesamte potentielle Energie) stellt für das reale Verschiebungsfeld einen Extremwert dar. Die notwendige Bedingung für den Extremwert:

$$\delta \Pi = 0.$$

Der Extremwert ist nur dann ein Minimalwert / ein Minimum, wenn  $\delta^2 \Pi \geq 0$  erfüllt ist. Es ist zu beweisen, dass das Funktional  $\Pi$  die beiden obigen Bedingungen erfüllt.

34. Was ist der physikalische Inhalt des Prinzips des Minimums der gesamten potentiellen Energie und des Variationsprinzips von Lagrange?

*Der physikalische Inhalt der Gleichung  $\delta \Pi = 0$ :*

Das Prinzip des Minimums der gesamten potentiellen Energie, bzw. das Lagrangesche Variationsprinzip beinhaltet die folgenden Beziehungen:

- $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \bar{q} = \bar{0}$  - die Gleichgewichtsbedingungen,
- $\underline{\underline{F}} \cdot \bar{n} = \bar{p}_0$  - die dynamischen Randbedingungen,
- $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}$  - das Stoffgesetz.

Die kinematischen Gleichungen und die kinematischen Randbedingungen werden beim Einsetzen eines kinematisch möglichen Verschiebungsfeldes befriedigt.

35. Beschreiben Sie den Gedankengang der Ritzschen Methode!

- Wir wählen eine Teilmenge aus allen kinematisch möglichen Verschiebungsfeldern aus:

$$\bar{u} = \bar{u}^*(c_1, c_2, \dots, c_n).$$

- Die Teilmenge der Verschiebungsfelder hängt von einer endlichen Anzahl  $n$  unbekannter Parameter ab:  $\bar{u} = \bar{u}^*(c_1, c_2, \dots, c_n)$ .

- Die Teilmenge  $\bar{u}^*(c_1, c_2, \dots, c_n)$  kann als eine Funktion der Parameter  $c_1, c_2, \dots, c_n$  betrachtet werden. Die beste Näherung erhält man aus der folgenden Bedingung:

$$\delta \Pi^* = \frac{\partial \Pi^*}{\partial c_1} \delta c_1 + \frac{\partial \Pi^*}{\partial c_2} \delta c_2 + \dots + \frac{\partial \Pi^*}{\partial c_n} \delta c_n = 0. \quad *$$

- Die Parameter  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sind voneinander unabhängig und beliebig wählbar, deshalb gilt

$$\delta c_1 \neq 0, \quad \delta c_2 \neq 0, \quad \dots \quad \delta c_n \neq 0.$$

- Die Bedingung \* kann nur dann erfüllt werden, wenn



$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi^*}{\partial c_1} = 0, \\ \frac{\partial \Pi^*}{\partial c_2} = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial \Pi^*}{\partial c_n} = 0. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Inhomogenes lineares algebraisches Gleichungssystem mit den Unbekannten} \\ c_1, c_2, \dots, c_n. \end{array}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist eine Näherungslösung der ursprünglichen Aufgabe.

36. Geben Sie die Definition der gesamten komplementären Formänderungsenergie an!

Die spezifische komplementäre Formänderungsenergie:  $e = e(\underline{\underline{F}}) = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{A}} - u(\underline{\underline{A}}).$

Die komplementäre Formänderungsenergie:  $E = \int_{(V)} e dV = \int_{(V)} (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{A}} - u) dV.$

Die gesamte komplementäre Formänderungsenergie:  $K = K(\underline{\underline{F}}) = E - \int_{(A_u)} \vec{u}_0 \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA.$

37. Beschreiben Sie das Prinzip des Minimums der gesamten komplementären Energie! Wie kann man mittels des Prinzips eine exakte und eine Näherungslösung vorstellen?

*Das Prinzip des Minimums der gesamten komplementären Energie:*

Es ist zu beweisen, dass die gesamte komplementäre Energie aus allen statisch möglichen Spannungsfeldern für das reale Spannungsfeld einen Minimalwert / ein Minimum ergibt.

$$\bar{K} - K \geq 0.$$

*Exakte Lösung:* Wenn wir den Minimalwert / das Minimum aus allen statisch möglichen Werten von  $\bar{K}$  auswählen:  $\bar{K}_{\min} = K$

*Näherungslösung:* Wenn wir nicht den Minimalwert / das Minimum aus allen statisch möglichen Werten von  $\bar{K}$  auswählen:  $\bar{K}_{\min} \neq K$

38. Beschreiben Sie das Variationsprinzip von Castigliano!

Die gesamte komplementäre Energie kann als ein Funktional betrachtet werden:

$$K[\underline{\underline{F}}] = E[\underline{\underline{F}}] - \int_{(A_u)} \vec{u}_0 \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA.$$

Die Variation des Spannungsfeldes:  $\bar{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{F}} + \delta \underline{\underline{F}}.$

Statisch möglich:  $\bar{\underline{\underline{F}}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0} \Rightarrow \delta \underline{\underline{F}} \cdot \nabla = \vec{0}.$   
 $\bar{\underline{\underline{F}}} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0 \Rightarrow \delta \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{0}.$

*Das Variationsprinzip von Castigliano:*

Das Funktional (die gesamte komplementäre Energie) stellt für das reale Spannungsfeld einen Extremwert dar. Die notwendige Bedingung für den Extremwert

$$\delta K = 0.$$

Der Extremwert ist nur dann ein Minimum, wenn  $\delta^2 K = 0$  erfüllt ist. Es ist zu beweisen, dass das Funktional  $K$  die beiden obigen Bedingungen erfüllt.

39. Was ist der physikalische Inhalt des Prinzips des Minimums der gesamten komplementären

Energie und des Variationsprinzips von Castigliano?

*Der physikalische Inhalt der Gleichung  $\delta K = 0$ :*

Das Prinzip der gesamten komplementären Energie und das Variationsprinzip von Castigliano beinhaltet:- die kinematischen Gleichungen und

- die kinematischen Randbedingungen.

Die Gleichgewichtsbedingungen und die dynamischen Randbedingungen werden beim Einsetzen eines statisch möglichen Verschiebungsfeldes befriedigt.

40. Schreiben Sie den allgemeinen Gedankengang des Aufbaus der Verschiebungsmethode auf!

*Der Gedankengang des Aufbaus der Verschiebungsmethode:*

- Das Bauteil / Der Körper wird in eine finite (endliche) Anzahl an Teilbereichen mit theoretisch beliebiger Form zerlegt. Die Teilbereiche heißen finite Elemente.
- Die Verschiebungsfelder werden gesondert für die einzelnen Elemente / Teilbereiche angenähert. Die Vorgehensweise heißt lokale Näherung / Approximation.
- Die Näherungsfunktionen, die sogenannten Ansatzfunktionen sind im Allgemeinen Polynome.
- An den Elementen / an den Elementrändern werden ausgewählte Punkte, sogenannte Knotenpunkte aufgenommen.
- Die Ansatzfunktionen werden mit den bestimmten Parametern / mit den Verschiebungswerten der Knotenpunkte gekoppelt.
- Mittels Anwendung des Lagrangeschen Variationsprinzips erhält man ein lineares algebraisches Gleichungssystem für die Parameter / für die Verschiebungen der Knotenpunkte.
- Aus dem algebraischen Gleichungssystem werden die Knotenpunktverschiebungen bestimmt.
- Bei Kenntnis der Knotenpunktverschiebungen kann man die gesuchten unbekanntes Felder (wie Verschiebungen, Verzerrungen, Spannungen, usw.) in allen angegebenen Punkten / Stellen berechnen.

41. Wie wird das Verschiebungsfeld in den einzelnen Elementen im 3D-Fall im Allgemeinen genähert?

Das Verschiebungsfeld wird für die einzelnen Elemente gesondert angenähert /approximiert:

$$\underbrace{\underline{\underline{u}}^e(X)}_{(3 \times 1)} = \underbrace{\underline{\underline{A}}^e(X)}_{(3 \times n)} \underbrace{\underline{q}^e}_{(n \times 1)}, \text{ wobei}$$

$\underline{\underline{u}}^e(X)$  - das Verschiebungsfeld des Elementes  $e$ ,

$\underline{\underline{A}}^e(X)$  - die Approximationsmatrix des Elementes  $e$ ,

$\left(\underline{q}^e\right)^T = \left[ \underline{q}_i^T \quad \underline{q}_j^T \quad \underline{q}_k^T \quad \dots \quad \underline{q}_N^T \right]^e$  - die Matrix / der Vektor der Knotenpunktverschiebungen ist.

$N$  - die Anzahl der Knotenpunkte des Elementes  $e$  und

$n = 3 \times N$  - die Anzahl der Knotenpunktparameter / der Knotenpunktverschiebungen des Elementes  $e$ .

Die Anzahl der Knotenpunktparameter  $n$  des Elementes ist der Freiheitsgrad des Elementes.

Der Verschiebungsvektor des Knotenpunktes  $i$  am Element  $e$  im 3D-Fall:  $\underline{q}_i^e = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}^e$ .

42. Wie kann man die Approximationsmatrix des Elementes  $e$  im 3D-Fall zerlegen?

Zerlegung der Approximationsmatrix: 
$$\underline{\underline{A}}^e(X) \underline{\underline{q}}^e = \underbrace{\left[ \underbrace{\underline{\underline{A}}_i^e(X)}_{(3 \times 3)} \underbrace{\underline{\underline{A}}_j^e(X)}_{(3 \times 3)} \underbrace{\underline{\underline{A}}_k^e(X)}_{(3 \times 3)} \dots \underbrace{\underline{\underline{A}}_N^e(X)}_{(3 \times 3)} \right]}_{(3 \times 3N)} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_i^e \\ \underline{\underline{q}}_j^e \\ \vdots \\ \underline{\underline{q}}_N^e \end{bmatrix} \quad (3N \times 1)$$

$N$  – die Anzahl der Knotenpunkte des Elementes  $e$ .

43. Schreiben Sie den Approximationsmatrixblock  $\underline{\underline{A}}_i^e(X)$  im 3D-Fall auf, der zum Knotenpunktverschiebungsvektor  $i$  gehört! Geben Sie den kinematischen Inhalt des Elementes  $\underline{\underline{A}}_{xzi}^e(X)$  der Approximationsmatrix an!

Der Matrixblock  $\underline{\underline{A}}_i^e(X)$  der Approximationsmatrix: 
$$\underline{\underline{A}}_i^e(X) = \begin{bmatrix} A_{xx}(X) & A_{xy}(X) & A_{xz}(X) \\ A_{yx}(X) & A_{yy}(X) & A_{yz}(X) \\ A_{zx}(X) & A_{zy}(X) & A_{zz}(X) \end{bmatrix}_i^e$$

Der kinematische Inhalt der Koordinate / des Elementes  $\underline{\underline{A}}_{xzi}^e(X)$  der Approximationsmatrix: das Verschiebungsfeld im Element  $e$  in Richtung  $x$  infolge einer Einheitsverschiebung in Richtung  $z$  im Knotenpunkt  $i$ .

44. Geben Sie die Eigenschaften der Approximationsmatrix im 3D Fall an!

- Das Verschiebungsfeld  $\underline{\underline{u}}^e(X)$  muss kinematisch möglich sein  $\Rightarrow \underline{\underline{A}}^e(X)$  muss differenzierbar sein.
- Die Blöcke der Approximationsmatrix müssen die folgenden Zusammenhänge erfüllen:

$$\underline{\underline{A}}_i^e(X_i) = \underline{\underline{E}},$$

$$\underline{\underline{A}}_i^e(X_j) = \underline{\underline{A}}_i^e(X_k) = \dots = \underline{\underline{A}}_i^e(X_N) = \underline{\underline{0}}.$$

45. Schreiben Sie den Näherungsansatz am Element  $e$  für die Verzerrungen im 3D-Fall auf!

Die Näherung des Verzerrungsfeldes am Element  $e$  im 3D Fall:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e(X) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}_i^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix}_i^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}_i^e \underbrace{\begin{bmatrix} u^e(X) \\ v^e(X) \\ w^e(X) \end{bmatrix}}_{(3 \times 1)}$$

In kompakter Form geschrieben:  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e(X) = \underline{\underline{D}}_\varepsilon^e \underline{\underline{u}}^e(X) = \underline{\underline{D}}_\varepsilon^e \underline{\underline{A}}^e(X) \underline{\underline{q}}^e = \underline{\underline{B}}^e(X) \underline{\underline{q}}^e$ , wobei

$\underline{\underline{D}}^e$  - die Matrix der Differentialoperationen für das Element  $e$  ist.

46. Schreiben Sie den Näherungsansatz am Element  $e$  für die Spannungen im 3D-Fall auf!

Die Näherung für das Spannungsfeld am Element  $e$ :

$$\underbrace{\underline{\underline{\sigma}}^e(X)}_{(6 \times 1)} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \underbrace{\underline{\underline{C}}^e(X)}_{(6 \times 6)} \underbrace{[\underline{\underline{\varepsilon}}^e(X) - \underline{\underline{\varepsilon}}_T^e(X)]}_{(6 \times 1)} = \underbrace{\underline{\underline{C}}^e(X)}_{(6 \times 6)} \underbrace{[\underline{\underline{B}}^e(X)q^e - \underline{\underline{\varepsilon}}_T^e(X)]}_{(6 \times 1)}.$$

$\underline{\underline{C}}^e(X)$  - die Matrix der Materialkennwerte (im Allgemeinen hängt sie vom Ort ab),

$\underline{\underline{\varepsilon}}_T^e(X)$  - die Verzerrungen infolge der Wärmedehnung.

47. Wie kann man die Verzerrungen infolge der Wärmedehnung im Element  $e$  im 3D-Fall formulieren?

Verzerrungen infolge der Wärmedehnung:  $\underbrace{\underline{\underline{\varepsilon}}_T^e(X)}_{(6 \times 1)} = \underbrace{\underline{\underline{\alpha}}^e}_{(6 \times 1)} \underbrace{\Delta T(X)}_{(1 \times 1)}.$

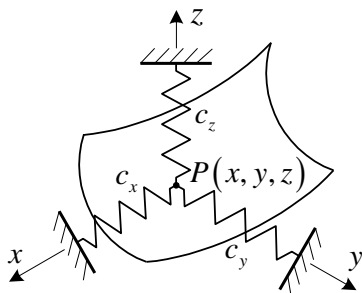
$\Delta T^e(X)$  - das bekannte Temperaturfeld am Element  $e$ .

Der Spaltenvektor der Wärmedehnungskoeffizienten:  $\underline{\underline{\alpha}}^e = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

48. Wie kann man die elastische Lagerung in der gesamten potentiellen Energie im 3D Fall berücksichtigen?

Es wird angenommen, dass auf der Oberfläche  $A_r$  eine Flächenlast  $\vec{p}_r$  auftritt, die proportional zur Verschiebung der Punkte auf der Oberfläche ist:

$$\underbrace{\underline{\underline{p}}_r^e(X)}_{(3 \times 1)} = - \underbrace{\underline{\underline{R}}^e(X)}_{(3 \times 3)} \underbrace{\underline{\underline{u}}^e(X)}_{(3 \times 1)}.$$



Matrix der elastischen Bettung / der Federkoeffizienten:

$$\underline{\underline{R}}^e(X) = \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & c_z \end{bmatrix}.$$

$c_x, c_y, c_z$  - Federkoeffizienten in den Richtungen  $x, y$  und  $z$ .

Die gesamte potentielle Energie des Elementes  $e$ , das elastisch gelagert ist:

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \int_{(V^e)} (\underline{\underline{\varepsilon}}^e)^T \underline{\underline{\sigma}}^e dV - \int_{(V^e)} (\underline{\underline{u}}^e)^T \underline{\underline{q}}^e dV - \int_{(A_r^e)} (\underline{\underline{u}}^e)^T \underline{\underline{p}}^e dA - \frac{1}{2} \int_{(A_r^e)} (\underline{\underline{u}}^e)^T \underline{\underline{p}}_r^e dA.$$

49. Geben Sie die gesamte potentielle Energie des Elementes  $e$  in Abhängigkeit von den Knotenpunktverschiebungen / Knotenpunktparametern an!

$$\begin{aligned} \Pi^e = & \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{q}}^e \right)^T \int_{(V^e)} \left[ \left[ \underline{\underline{B}}^e(X) \right]^T \underline{\underline{C}}^e(X) \underline{\underline{B}}^e(X) \right] dV \underline{\underline{q}}^e - \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{q}}^e \right)^T \int_{(V^e)} \left[ \left[ \underline{\underline{B}}^e(X) \right]^T \underline{\underline{C}}^e(X) \underline{\underline{\varepsilon}}_T^e(X) \right] dV - \\ & - \left( \underline{\underline{q}}^e \right)^T \int_{(V^e)} \left[ \underline{\underline{A}}^e(X) \right]^T \underline{\underline{q}}^e(X) dV - \left( \underline{\underline{q}}^e \right)^T \int_{(A_p^e)} \left[ \underline{\underline{A}}^e(X) \right]^T \underline{\underline{p}}_0^e(X) dA + \\ & + \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{q}}^e \right)^T \int_{(A_r^e)} \left[ \underline{\underline{A}}^e(X) \right]^T \underline{\underline{R}}^e(X) \underline{\underline{A}}^e(X) dA \underline{\underline{q}}^e . \end{aligned}$$

50. Schreiben Sie die allgemeine Form der Steifigkeitsmatrix des Elementes  $e$  auf!

$$\text{Die Steifigkeitsmatrix des Elementes } e: \quad \underline{\underline{K}}^e = \int_{(V^e)} \underbrace{\left[ \underline{\underline{B}}^e(X) \right]^T}_{(n \times 6)} \underbrace{\underline{\underline{C}}^e(X)}_{(6 \times 6)} \underbrace{\underline{\underline{B}}^e(X)}_{(6 \times n)} dV .$$

Die Steifigkeitsmatrix ist symmetrisch.

$n$  ist der Freiheitsgrad des Elementes  $e$  (die Anzahl der Knotenpunktparameter / der Knotenpunktverschiebungs koordinaten des Elementes  $e$ ).

51. Geben Sie der physikalische Inhalt des Elementes  $K_{xzij}^e$  der Steifigkeitsmatrix des Elementes  $e$  an!

Die Koordinate / das Element  $K_{xzij}^e$  bedeutet die Kraft in  $x$ -Richtung im Knotenpunkt  $i$ , die aus der Einheitsverschiebung in  $z$ -Richtung im Knotenpunkt  $j$  des Elementes  $e$  stammt.

52. Schreiben Sie die allgemeine Form der Steifigkeitsmatrix aus der elastischen Bettung des Elementes  $e$  auf!

Die Steifigkeitsmatrix aus der elastischen Bettung des Elementes:

$$\underline{\underline{K}}_r^e = \int_{(A_r^e)} \left[ \left[ \underline{\underline{A}}^e(X) \right]^T \underline{\underline{R}}^e(X) \underline{\underline{A}}^e(X) \right] dA .$$

$\underline{\underline{K}}_r^e$  ist ebenfalls symmetrisch.

In dieser Steifigkeitsmatrix erscheinen Blöcke bei den Knotenpunkten, die an der elastisch gebetteten Oberfläche des Elementes  $e$  liegen.

53. Schreiben Sie die allgemeine Form des Vektors der Knotenlasten aus den Volumenkräften des Elementes  $e$  auf!

Der Vektor der Knotenlasten aus den Volumenkräften:

$$\underline{\underline{f}}_q^e = \int_{(V^e)} \underbrace{\left[ \underline{\underline{A}}^e(X) \right]^T}_{(n \times 3)} \underbrace{\underline{\underline{q}}^e(X)}_{(3 \times 1)} dV , \quad \text{wobei } \underline{\underline{q}}^e(X) \text{ bekannte Volumenkraft ist.}$$

$n$  ist der Freiheitsgrad des Elementes  $e$  (die Anzahl der Knotenpunktparameter / der Knotenpunktverschiebungs koordinaten des Elementes  $e$ ).

54. Schreiben Sie die allgemeine Form des Vektors der Knotenlasten aus der Temperaturänderung des Elementes  $e$  auf!

Knotenlasten aus der Temperaturänderung:

$$\underline{\underline{f}}_T^e = \int_{(V^e)} \left[ \left[ \underline{\underline{B}}^e(X) \right]^T \underline{\underline{C}}^e(X) \underline{\underline{\varepsilon}}_T^e(X) \right] dV = \int_{(V^e)} \left[ \underline{\underline{B}}^e(X) \right]^T \underline{\underline{C}}^e(X) \underbrace{\underline{\underline{\alpha}}^e(X) \Delta T^e(X)}_{\underline{\underline{\varepsilon}}_T^e(X)} dV .$$

Bekannte Größen:  $\underline{\underline{\alpha}}^e(X)$  Wärmedehnungskoeffizienten,  
 $\Delta T^e(X)$  Temperaturfeld,  
 $\underline{\underline{C}}^e(X)$  Materialkennwerte.

55. Schreiben Sie die allgemeine Form des Vektors der Knotenlasten aus der Temperaturänderung des Elementes  $e$  auf!

*Knotenlasten aus den Flächenkräften:*

$$\underline{\underline{f}}_{=p}^e = \int_{(A_p^e)} \left[ \underline{\underline{A}}^e(X) \right]^T \underline{\underline{p}}_{=0}^e(X) dA, \quad \text{wobei } \underline{\underline{p}}_{=0}^e(X) \text{ bekannte Flächenkraft ist.}$$

56. Geben Sie die gesamte potentielle Energie des Körpers / des Bauteiles in Abhängigkeit von den Knotenpunktverschiebungen / Knotenpunktparametern an!

Die gesamte potentielle Energie des Elementes:

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{q}}^e \right)^T \left[ \underline{\underline{K}}^e + \underline{\underline{K}}_{=r}^e \right] \underline{\underline{q}}^e - \left( \underline{\underline{q}}^e \right)^T \left[ \underline{\underline{f}}_{=q}^e + \underline{\underline{f}}_{=p}^e + \underline{\underline{f}}_{=T}^e \right].$$

Die gesamte potentielle Energie des Körpers erhält man mittels Addition / Summation:

$$\Pi = \sum_{e=1}^Q \Pi^e. \quad Q - \text{die Anzahl der Elemente / der Teilbereiche.}$$

57. Schreiben Sie die allgemeine Form der Steifigkeitsmatrix des ganzen Körpers auf!

*Die Steifigkeitsmatrix des ganzen Körpers:*

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \sum_{e \in 1,1} K^e & \sum_{e \in 1,2} K^e & \dots & \sum_{e \in 1,j} K^e & \dots & \sum_{e \in 1,M} K^e \\ \sum_{e \in 2,1} K^e & \sum_{e \in 2,2} K^e & \dots & \sum_{e \in 2,j} K^e & \dots & \sum_{e \in 2,M} K^e \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{e \in i,1} K^e & \sum_{e \in i,2} K^e & \dots & \sum_{e \in i,j} K^e & \dots & \sum_{e \in i,M} K^e \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{e \in M,1} K^e & \sum_{e \in M,2} K^e & \dots & \sum_{e \in M,j} K^e & \dots & \sum_{e \in M,M} K^e \end{bmatrix}.$$

(3M × 3M)

*Die Bedeutung des Blockes  $\sum_{e \in i,j} K^e$ :*

Man muss alle Blöcke  $K_{ij}^e$  des Elementes  $e$  für alle Elemente, die die Knotenpunkte  $i$  und  $j$  enthalten, aufsummieren.

58. Schreiben Sie die allgemeine Form des Knotenpunktbelastungsvektors des ganzen Körpers auf!

*Der Knotenpunktbelastungsvektor des ganzen Körpers:*

$$\underline{\underline{f}}_{=q} = \underline{\underline{f}}_{=q} + \underline{\underline{f}}_{=p} + \underline{\underline{f}}_{=T} = \begin{bmatrix} \sum_{e \in 1=q1} f^e \\ \sum_{e \in 2=q2} f^e \\ \vdots \\ \sum_{e \in M=qM} f^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{e \in 1=p1} f^e \\ \sum_{e \in 2=p2} f^e \\ \vdots \\ \sum_{e \in M=pM} f^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{e \in 1=T1} f^e \\ \sum_{e \in 2=T2} f^e \\ \vdots \\ \sum_{e \in M=TM} f^e \end{bmatrix}.$$

*Die Bedeutung des Blockes  $\sum_{e \in i} f^e$ :*

Man muss alle Blöcke  $\underline{f}_i^e$  des Elementes  $e$  für alle Elemente, die den Knotenpunkt  $i$  enthalten, aufsummieren.

59. Wie kann man die kinematischen Randbedingungen berücksichtigen?

*Die Berücksichtigung der kinematischen Randbedingungen:*

Es seien z.B.:  $\underline{q}_i = 0$  und  $\underline{q}_j = 0$ .

Die gesamte potentielle Energie des ganzen Körpers:

$$\Pi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{q}_1^T & \dots & \underline{q}_i^T & \underline{q}_j^T & \dots & \underline{q}_M^T \\ & & = 0 & = 0 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & \dots & \underline{K}_{1i} & \underline{K}_{1j} & \dots & \underline{K}_{1M} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{K}_{i1} & & \underline{K}_{ii} & \underline{K}_{ij} & & \underline{K}_{iM} \\ \underline{K}_{j1} & & \underline{K}_{ji} & \underline{K}_{jj} & & \underline{K}_{jM} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{K}_{M1} & & \underline{K}_{Mi} & \underline{K}_{Mj} & & \underline{K}_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q}_1 \\ \vdots \\ \underline{q}_i = 0 \\ \underline{q}_j = 0 \\ \vdots \\ \underline{q}_M \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{q}_1^T & \dots & \underline{q}_i^T & \underline{q}_j^T & \dots & \underline{q}_M^T \\ & & = 0 & = 0 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{f}_1 \\ \vdots \\ \underline{f}_i \\ \underline{f}_j \\ \vdots \\ \underline{f}_M \end{bmatrix}.$$

Die Konsequenzen:

- Multiplikation von der linken Seite mit  $\underline{q}_i^T$ : die Blockzeilen  $i$  und  $j$  der Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}$  werden mit Null multipliziert – die Blockreihen  $i$  und  $j$  werden gestrichen / verschwinden.
- Multiplikation von der linken Seite mit  $\underline{q}_j^T$ : die Blockzeile  $i$  des Belastungsvektors  $\underline{f}$  wird mit Null multipliziert – die Blockzeile  $i$  wird gestrichen / verschwinden.
- Multiplikation von der rechten Seite mit  $\underline{q}_i$ : die Blockspalten  $i$  und  $j$  der Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}$  werden mit Null multipliziert – die Blockspalten  $i$  und  $j$  werden gestrichen.

Im weiteren werden die Blöcke  $\underline{q}_i$  und  $\underline{q}_j$  nicht mehr vorkommen.

60. Zählen Sie die typischen Datenvorbereitungsfehler auf!

*Typische Datenvorbereitungsfehler bei einer FE - Berechnung:*

- Die Materialkennwerte werden nicht eingegeben.
- Die kinematischen Randbedingungen werden nicht vorgeschrieben / berücksichtigt.

Bei beiden Fehlern wird die Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}$  des Systems (Körpers) singulär.

Im singulären Fall gibt es für das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

61. Wie kann man die kinematischen Belastungen berücksichtigen?

*Eine kinematische Belastung* entsteht, wenn man keine Null-Verschiebungen in bestimmten Knotenpunkten vorschreibt:

Z.B.:  $\underline{q}_k$  und  $\underline{q}_l$  seien gegebene bekannte Werte.

Wenn die Konstruktion nur kinematisch belastet ist, dann gilt  $\underline{\tilde{f}} = 0$ .

Das Lagrangesche Variationsprinzip im Falle einer kinematischen Belastung:

$$\delta \Pi = (\delta \underline{q})^T \underline{K} \underline{q} = \left[ (\delta \underline{q}_{=1})^T \quad (\delta \underline{q}_{=2})^T \quad \cdots \quad (\delta \underline{q}_{=k})^T \quad (\delta \underline{q}_{=l})^T \quad \cdots \quad (\delta \underline{q}_{=M})^T \right] \underline{K} \begin{bmatrix} \underline{q}_{=1} \\ \underline{q}_{=2} \\ \vdots \\ \underline{q}_{=k} \\ \underline{q}_{=l} \\ \vdots \\ \underline{q}_{=M} \end{bmatrix} = \underline{0}.$$

$\underline{q}_{=k}$  und  $\underline{q}_{=l}$  sind gegeben, deshalb ist  $\delta \underline{q}_{=k} = \delta \underline{q}_{=l} = \underline{0}$ .

$\underline{K}_{=ki}$  und  $\underline{K}_{=li}$  der Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}$  werden mit Null multipliziert, das heißt die Gleichungen werden gelöscht.

Die Blockspalten  $\underline{K}_{=ki}$  und  $\underline{K}_{=li}$  der Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}$  werden mit den gegebenen Verschiebungen multipliziert und damit sind diese Werte bekannt; sie können dann auf die rechte Seite des Gleichungssystems umgeordnet werden.

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{=11} & \underline{K}_{=12} & \cdots & \underline{K}_{=1M} \\ \underline{K}_{=21} & \underline{K}_{=22} & \cdots & \underline{K}_{=2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{K}_{=M1} & \underline{K}_{=M2} & \cdots & \underline{K}_{=MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q}_{=1} \\ \underline{q}_{=2} \\ \vdots \\ \underline{q}_{=M} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{K}_{=1k} \underline{q}_{=k} + \underline{K}_{=1l} \underline{q}_{=l} \\ \underline{K}_{=2k} \underline{q}_{=k} + \underline{K}_{=2l} \underline{q}_{=l} \\ \vdots \\ \underline{K}_{=Mk} \underline{q}_{=k} + \underline{K}_{=Ml} \underline{q}_{=l} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{bekannte kinematische} \\ \text{Knotenpunktsbelastung}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

62. Geben Sie die Voraussetzungen der monotonen Konvergenz bei den FE-Verschiebungsmethoden an!

- Die Elementvernetzung und das Verschiebungsfeld müssen kompatibel / verträglich sein. Bei der Verknüpfung der Elemente darf weder eine Spalte /Lücke noch eine Überlappung entstehen.

*Kompatibles Verschiebungsfeld:* - Das Verschiebungsfeld muss an den Elementgrenzen stetig sein. Die Ableitungen des Verschiebungsfeldes bis hin zur Ordnung, die um eins kleiner ist, als die Ordnung des Funktionals, müssen an den Elementgrenzen stetig sein.

- Das Element muss vollständig sein.

*Definition der Vollständigkeit:*

- Die Näherungsfunktionen müssen einen konstanten Verzerrungszustand am Element exakt beschreiben.
- Im Falle einer Starrkörperbewegung dürfen keine Verzerrungen / Spannungen im Element auftreten.

Diese Bedingungen sind nur dann erfüllt, wenn die Ansatzfunktionen ein vollständiges Polynom ersten Grades enthalten.

63. Beschreiben Sie die Bernoullische Hypothese der Biegestäbe und die Folge der Hypothese! Veranschaulichen Sie die Hypothese!

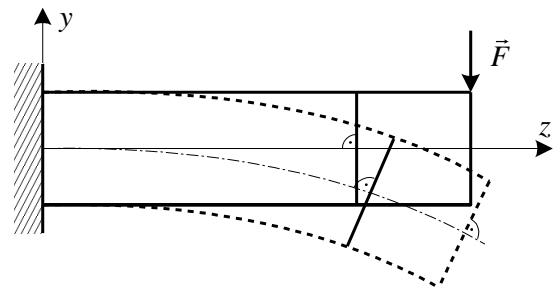


*Die Bernoullische Hypothese:*

Bei der Biegung von Stäben bleiben die Querschnitte des Stabes eben und senkrecht zur deformierten Mittellinie des Stabes.

Die Folge der Hypothese:  $\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0$ .

Die Bernoullische Theorie vernachlässigt die Schubverzerrungen.



64. Beschreiben Sie die Timoshenkosche Hypothese der Biegestäbe und die Folge der Hypothese! Veranschaulichen Sie die Hypothese!

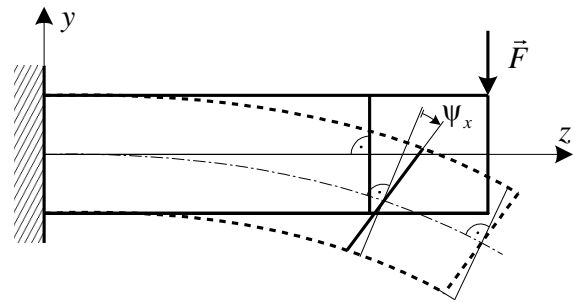
*Die Timoshenkosche Hypothese:*

Bei der Biegung bleiben die Querschnitte des Stabes eben, bleiben aber nicht senkrecht zu der deformierten Mittellinie des Stabes.

Die Folge der Hypothese:

$\gamma_{yz} = \psi_x \neq 0 \Rightarrow \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = G\psi_x = \text{konst.}$

Die Timoshenkosche Theorie berücksichtigt die Schubverzerrungen.



65. Schreiben Sie den verallgemeinerten Knotenverschiebungsvektor des 3D-Stabelementes auf! Warum spricht man über verallgemeinerten Verschiebungen?

Der verallgemeinerte Knotenverschiebungsvektor des Elementes:

$$\underline{\underline{q}}^e = \begin{bmatrix} \underline{q}_i^e \\ \underline{q}_j^e \end{bmatrix}, \quad \text{wobei} \quad \underline{q}_i^e = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_{\xi i} \\ \varphi_{\eta i} \\ \varphi_{\zeta i} \end{bmatrix}^e.$$

Hier bezeichnen  $i$  und  $j$  die Knotenpunkte des Elementes und  $\xi, \eta, \zeta$  die Koordinatenrichtungen des lokalen Koordinatensystems.

Verallgemeinert, weil nicht nur Verschiebungen, sondern auch Verdrehungen enthalten sind.

66. Schreiben Sie den verallgemeinerten Verschiebungsfeldvektor des 3D-Stabelementes nach Bernoulli auf! Wovon hängen die verallgemeinerten Verschiebungsfelder ab? Warum spricht man bei dem 3D-Stabelement über verallgemeinerte Verschiebungsfelder?

Der verallgemeinerte Verschiebungsfeldvektor des Elementes:  $\underline{\underline{u}}^e(\zeta) = \begin{bmatrix} u^e(\zeta) \\ v^e(\zeta) \\ w^e(\zeta) \\ \varphi_\zeta^e(\zeta) \end{bmatrix}^e.$

Alle Verschiebungs- / Verdrehungsgrößen hängen nur von der Veränderlichen  $\zeta$  ab.

Verallgemeinert, weil nicht nur Verschiebungsfelder, sondern auch ein Verdrehungsfeld enthalten sind.

67. Schreiben Sie die Annahmen für die Modellierung von ebenen Stabtragwerken auf!

Annahmen für ebene Stabtragwerke:

- Zwischen den Stabelementen gibt es eine starre Verbindung / Kopplung.
- Die Mittellinien der Stäbe liegen in derselben Ebene.
- Die Belastung wirkt in der Ebene der Mittellinien.

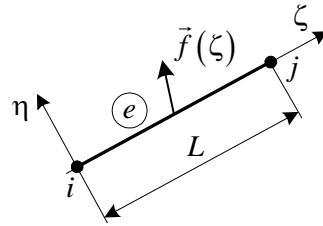
- Die Achse  $x \equiv \xi_i$  ist die Hauptträgheitsachse der Querschnitte  $\Rightarrow$  Es ist eine gerade Biegung.

68. Schreiben Sie den Näherungsansatz für die Verschiebungsfelder von ebenen Stabtragwerken nach der Bernoullischen Theorie auf!

Die folgenden Verschiebungsfelder werden im lokalen Koordinatensystem angenähert:

$$v^e(\zeta) = a_1^e + a_2^e \zeta + a_3^e \zeta^2 + a_4^e \zeta^3,$$

$$w^e(\zeta) = a_5^e + a_6^e \zeta.$$



69. Schreiben Sie den verallgemeinerten Knotenverschiebungsvektor des 2D-Stabelementes auf! Warum spricht man über verallgemeinerte Verschiebungen?

Der Knotenpunktverschiebungsvektor des Stabelementes:

Hier bezeichnen  $i$  und  $j$  die Knotenpunkte des Elementes.

Verallgemeinert, weil nicht nur Verschiebungen, sondern auch Verdrehungen enthalten sind.

$$\underline{q}^e = \begin{bmatrix} q_{=i}^e \\ q_{=j}^e \end{bmatrix}_{(6 \times 1)} \quad \underline{q}_{=i}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} v_i \\ w_i \\ \phi_i \end{bmatrix}}_{(3 \times 1)}^e$$

70. Schreiben Sie die Annahmen für die Modellierung von ebenen Fachwerken auf!

Annahmen für ebene Fachwerke:

- Die Mittellinien der Stäbe liegen in derselben Ebene.
- Die Mittellinien der Stäbe sind Geraden.
- Die Gelenk-Kopplungen liegen an den Enden der Stäbe.
- Die Kopplungspunkte heißen Knotenpunkte.
- Die Einzelkräfte der Belastung greifen ausschließlich an den Knotenpunkten an.
- Die Linienbelastung erfolgt in Richtung der Mittellinie.

Folge: Die Beanspruchung der Stäbe in Fachwerken ist ausschließlich Zug-Druck.

71. Welche Operationen enthält das Dateneingabe-Modul eines FE-Programmsystems?

- Die Angabe des geometrischen Aufbaus der Konstruktion: Punkte, Linien, Flächen, Volumina.
- Der Aufbau des FE-Netzes der Konstruktion: Elemente, Knotenpunkte

Anhaltspunkte: - Die FE-Verteilung / das FE-Netz muss in den Bereichen dichter sein, in denen man bedeutende Änderungen der mechanischen Größen erwartet.

- Auf die Angriffspunkte der Einzelkräfte / Momente sollen Knotenpunkte entfallen.

- Auf die Lagerpunkte sollen ebenfalls Knotenpunkte entfallen.

- Die Eingabe der Materialparameter der Konstruktion:

Die Materialkenngrößen können sowohl der Geometrie (Linie, Fläche, Volumen) als auch den FE-Größen (Element, Knotenpunkte) zugeordnet werden.

Spezielle Fälle:

- Bei Stabtragwerken muss man an dieser Stelle auch die Querschnittskenngrößen  $A, I_x, \dots$  eingeben.
- Bei Schalen-, Platten- und Scheibenaufgaben muss man an dieser Stelle die Dicke angeben.

- Die Eingabe der Belastung der Konstruktion:

- Einzelkräfte / Momente,
- Linien-, Flächen- und Volumenkräfte,
- Temperaturverteilung.

- Die Angabe der Lagerung:

- Lagerung: es gibt keine Verschiebung
- elastische Lagerung / Bettung (Federkoeffizienten)
- vorgeschriebene Verschiebungen – kinematische Belastung

72. Welche Operationen enthält das FE-Berechnungs-Modul eines FE-Programmsystems?

- Aufbau / Berechnung der Steifigkeitsmatrizen und Knotenpunktbelastungsvektoren der Elemente.
- Bestimmung / Bereitstellung der Steifigkeitsmatrix und des Belastungsvektors der Konstruktion.
- Die Berücksichtigung der Randbedingungen (Löschung von Zeilen und Spalten).
- Die Lösung des linearen algebraischen Gleichungssystems der Konstruktion  $\Rightarrow$  die Bestimmung der Knotenpunktverschiebungen.
- Die Berechnung von Verzerrungen und Spannungen auf der Elementebene. An den Knotenpunkten werden Durchschnittswerte berechnet.

73. Welche Funktionen enthält das Ergebnisauswertungsmodul eines FE-Programmsystems?

- Veranschaulichung der deformierten Struktur,
- Veranschaulichung von Spannungen / Beanspruchungen / Vergleichsspannungen, Lagerkräfte, usw.

74. Definieren Sie den ebenen Verzerrungszustand!

*Definition:* Der Körper hat eine hervorgehobene Ebene. Die Formänderungen in den Ebenen, die zur hervorgehobenen Ebene parallel sind, sind identisch und auch der Abstand der Ebenen zueinander ändert sich nicht.

75. Geben Sie die unabhängigen mechanischen Kenngrößen bei dem ebenen Verzerrungszustand an!

Die unabhängigen Verschiebungsfelder:  $u(x, y), v(x, y)$ .

Die unabhängigen Verzerrungsfelder:  $\varepsilon_x(x, y), \varepsilon_y(x, y), \gamma_{xy}(x, y)$ .

Die unabhängigen Spannungsfelder:  $\sigma_x(x, y), \sigma_y(x, y), \tau_{xy}(x, y)$ .

76. Definieren Sie, was man in der Mechanik als eine Scheibe betrachtet!

*Scheibe:* Ein Körper, bei dem eine Dimension wesentlich kleiner ist als die beiden anderen. Man kann eine Mittelebene definieren. Die resultierende Belastung / Kraft entlang der Dicke liegt in der Mittelebene.

77. Geben Sie die Annahmen für den verallgemeinerten ebenen Spannungszustand / für die Scheibenaufgabe an!

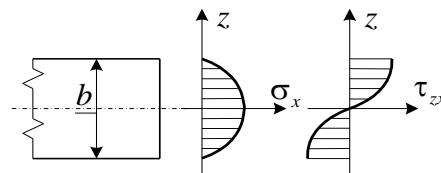
- $b \ll$  als die anderen Dimensionen der Körper.
- Die Mittelfläche  $z=0$  ist eine Ebene.
- Bei der äußeren Belastung gibt es keine Kräfte in  $z$ -Richtung.
- Die Resultierende der zur  $xy$ -Ebene parallelen Kräfte liegt in der  $xy$ -Ebene.

- Die Oberflächen  $z = \pm \frac{b}{2}$  sind unbelastet  $\Rightarrow \sigma_z \Big|_{z=\pm \frac{b}{2}} = 0$ .

- Wenn die Dicke  $b$  klein ist, dann gilt  $\sigma_z = 0$  nicht nur an den Oberflächen  $z = \pm \frac{b}{2}$ , sondern auch innerhalb des Körpers.

-  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  sind gerade Funktionen von  $z$ .

-  $\tau_{zx}, \tau_{zy}$  sind ungerade Funktionen von  $z$ .



78. Definieren Sie die Durchschnittsspannungen für Scheiben!

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_x dz, & \bar{\sigma}_y &= \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_y dz, & \bar{\tau}_{xy} &= \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{xy} dz, \\ \bar{\sigma}_z &= \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_z dz = 0, & \bar{\tau}_{zx} &= \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{zx} dz = 0, & \bar{\tau}_{zy} &= \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{zy} dz = 0. \end{aligned}$$

79. Definieren Sie das mechanische Modell für Scheiben!

*Mechanisches Modell:* Der Körper (die Scheibe) wird durch seine (ihre) Mittelebene ersetzt und die mechanischen Kenngrößen (die Durchschnittswerte) werden an die Mittelebene gebunden.

80. Geben Sie die unabhängigen mechanischen Durchschnittskenngrößen bei den Scheiben an!

Die unabhängigen Verschiebungsfelder:  $\bar{u}(x, y), \bar{v}(x, y)$ .

Die unabhängigen Verzerrungsfelder:  $\bar{\varepsilon}_x(x, y), \bar{\varepsilon}_y(x, y), \bar{\gamma}_{xy}(x, y)$ .

Die unabhängigen Spannungsfelder:  $\bar{\sigma}_x(x, y), \bar{\sigma}_y(x, y), \bar{\tau}_{xy}(x, y)$ .

81. Definieren Sie die rotationssymmetrische Aufgabe / die axialsymmetrische Aufgabe! Geben Sie die Folge der Definition an!

*Definition:* Sowohl die Geometrie als auch die Belastung des Körpers sind axialsymmetrisch / rotationssymmetrisch.

Folge der Definition: - Weder die Geometrie, noch die Belastung des Körpers hängen von der  $\varphi$ -Koordinate ab.

- Die Punkte des Körpers verschieben sich in der Meridianebene. Die Meridianebene ist die  $R_z$ -Ebene in Zylinderkoordinaten.

82. Geben Sie die unabhängigen mechanischen Kenngrößen bei der rotationssymmetrischen Aufgabe an!

Die unabhängigen Verschiebungsfelder:  $u(R, z), v(R, z)$ .

Die unabhängigen Verzerrungsfelder:  $\varepsilon_R(R, z), \varepsilon_z(R, z), \gamma_{Rz}(R, z), \varepsilon_\varphi(R, z)$ .

Die unabhängigen Spannungsfelder:  $\sigma_R(R, z), \sigma_z(R, z), \tau_{Rz}(R, z), \sigma_\varphi(R, z)$ .

83. Schreiben Sie die Ähnlichkeiten zwischen den 2D-Aufgaben auf!

- Alle mechanischen Kenngrößen hängen bei allen drei 2D-Aufgaben nur von zwei Ortskoordinaten ab.

- Es gibt bei allen drei 2D-Aufgaben nur zwei unabhängige Verschiebungsfelder.

$$\begin{array}{ccc} \left. \begin{array}{l} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} \bar{u} = \bar{u}(x, y) \\ \bar{v} = \bar{v}(x, y) \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} u = u(R, z) \\ v = v(R, z) \end{array} \right\} \\ \text{EVZ} & \text{ESZ} & \text{RSA} \end{array}$$

- Alle mechanischen Kenngrößen des Körpers können aus den zwei unabhängigen Verschiebungsfeldern abgeleitet werden.

84. Schreiben Sie die Unterschiede zwischen den 2D-Aufgaben auf!

- Die Festigkeitszustände (Verzerrungen, Spannungen) sind aufgabenabhängig.

- Die Form des Materialgesetzes.

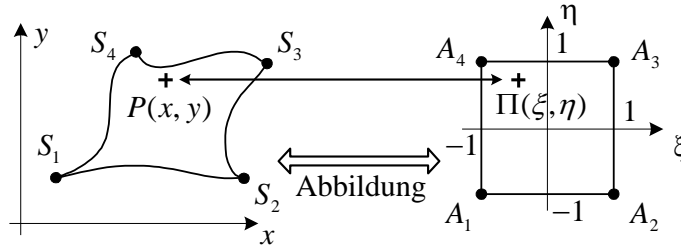
85. Definieren Sie die isoparametrische Näherung!

Eine Näherung ist isoparametrisch, wenn sowohl die Formulierung / die Beschreibung der Geo-

metrie des Elementes - als auch die Näherung des Verschiebungsfeldes mit denselben Funktionen erfolgt.

86. Beschreiben Sie die isoparametrische Abbildung / Zuordnung!

Ein krummlinig umrandeter Viereckbereich wird auf ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 2 abgebildet.



Zu jedem Punkt  $P$  wird wechselseitig eindeutig ein Punkt  $\Pi$  zugeordnet:  $P \Leftrightarrow \Pi$ .

Die Abbildung muss wechselseitig (hin und zurück) funktionieren.

Die Formulierung der Zuordnung:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) \\ y &= y(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^m h_i(\xi, \eta) x_i \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^m h_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned}$$

$m$  - die Anzahl der Punkte  $S_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ), die die Grenzen des Rechteckbereiches angeben.

$x_i, y_i, (i=1, 2, \dots, m)$  - die Ortskoordinaten der Punkte  $S_i$ .

$h_i(\xi, \eta)$  - Formfunktionen / Approximationsfunktionen / Ansatzfunktionen.

87. Geben Sie die Definition und die Berechnung der Jacobischen Matrix an! Schreiben Sie die Voraussetzung für die Wechselseitigkeit und die Eindeutigkeit der isoparametrischen Abbildung / Zuordnung auf!

Definition der Jacobischen Matrix:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{J}}(\xi, \eta)} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

die *Jacobische* Matrix

Berechnung der Jacobischen Matrix

$$\underline{\underline{J}}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \frac{\partial h_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^m \frac{\partial h_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^m \frac{\partial h_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^m \frac{\partial h_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}$$

*Voraussetzung:*

Die Abbildung ist wechselseitig eindeutig, wenn die *Jacobische*-Matrix invertierbar ist.

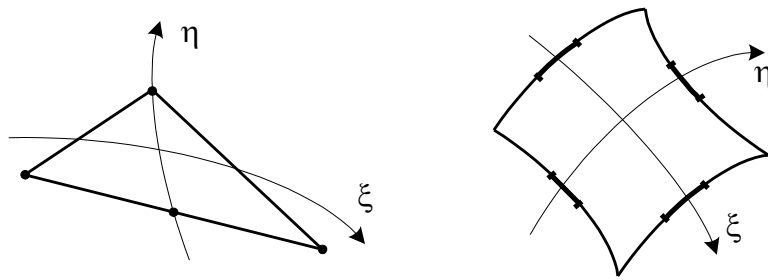
Voraussetzung der Invertierbarkeit ist:  $\det|\underline{\underline{J}}(\xi, \eta)| \neq 0$ .

88. In welchem Fall ist die Abbildung wechselseitig eindeutig bei quadratischen isoparametrischen Elementen?

*Anforderungen für die wechselseitige Eindeutigkeit:*

- die Form des Bereiches muss konvex sein (der gerade Fall im Bild ist noch erlaubt),

- die Punkte mit gerader Numerierung (in der Seitenmitte) müssen bei quadratischen Elementen in dem mittleren Drittel der Seiten liegen.



89. Was bedeutet die Degeneration / das Degenerationsverfahren bei den isoparametrischen 2D-Elementen?

*Degeneration:* Ausgehend von einem Viereckelement erstellt man ein Dreieckelement durch die Zusammenlegung von zwei Eckpunkten (durch die Schrumpfung einer Seite auf Null).

*Folge:* Man muss die Formfunktionen modifizieren.

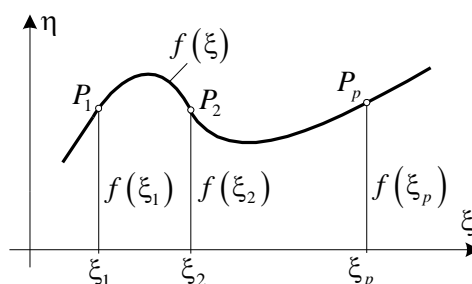
90. Was ist die Zielstellung der Interpolation?

*Zielstellung:* Wir wollen eine Funktion bilden, die eine diskrete, gegebene Menge von Punkten und in diesen Punkten die Funktionswerte, oder zusätzlich in diesen Punkten die Ableitungen der diskreten Funktion enthält.

Mit der Interpolation kann man die Funktionswerte und die Ableitungen zwischen den gegebenen diskreten Punkten annähern.

91. Formulieren Sie die Lagrangesche Interpolation!

*Bekannt:* Die Funktionswerte einer Funktion  $f(\xi)$  in den Punkten  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ .



*Aufgabe:* Bildung einer Funktion  $\eta(\xi)$ , die die gegebenen Punkte  $P_i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) enthält, und die Funktion  $f(\xi)$  annähert.

$$\eta(\xi) \approx f(\xi).$$

Die Näherungsfunktion:  $\eta(\xi) = \sum_{j=1}^p L_j(\xi) f(\xi_j)$ .

$p$  ist die Anzahl der Punkte, an denen die Funktionswerte zur Verfügung stehen.

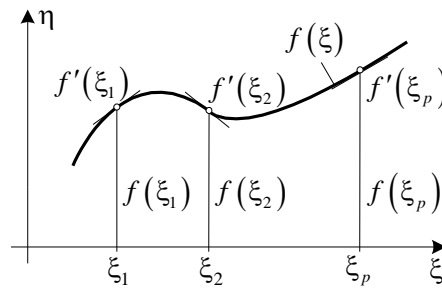
Die allgemeine Form der *Lagrangeschen* Interpolationspolynome:

$$L_j(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_p)}{(\xi_j - \xi_1)(\xi_j - \xi_2) \dots (\xi_j - \xi_p)}.$$

92. Formulieren Sie die Hermitesche Interpolation!

*Bekannt sind:* Die Funktionswerte  $f(\xi_1), f(\xi_2) \dots f(\xi_p)$  und die ersten Ableitungen

$f'(\xi_1), f'(\xi_2), \dots, f'(\xi_p)$  in den gegebenen Punkten  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ .



*Aufgabe:* Die Bildung einer Funktion  $\eta(\xi)$ , die nicht nur die gegebenen Funktionswerte enthält, sondern auch die in diesen Punkten vorgeschriebenen Ableitungen.

Die Näherungsfunktion:  $\eta(\xi) = \sum_{j=1}^p H_{0j}(\xi)f(\xi_j) + \sum_{j=1}^p H_{1j}(\xi)f'(\xi_j)$ .

$p$  – die Anzahl der Punkte, für welche die Funktionswerte  $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_p)$  und die Ableitungswerte  $f'(\xi_1), f'(\xi_2), \dots, f'(\xi_p)$  zur Verfügung stehen.

Die *Hermiteschen* Interpolationspolynome:  $H_{0j}(\xi) = [1 - 2(\xi - \xi_j)L_j'(\xi_j)]L_j^2(\xi)$ ,  
 $H_{1j}(\xi) = (\xi - \xi_j)L_j^2(\xi)$ .

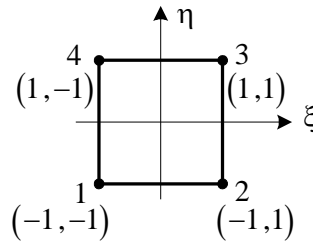
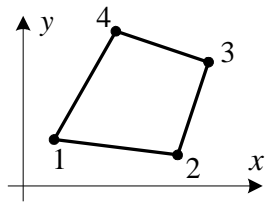
93. Schreiben Sie die Eigenschaften der traditionellen finiten Elemente auf!

- Die Elementgrenzen sind gerade Linien oder ebene Flächen.
- Zur Integration benutzt man ein an das Element gebundenes, lokales Koordinatensystem.
- Das Verschiebungsfeld wird in dem lokalen KS mit einer Potenzreihe / mit einem Polynom angenähert. Die Koeffizienten der Reihe haben keine physikalische Bedeutung.
- Die Koeffizienten der Reihe werden durch die Knotenpunktparameter im lokalen Koordinatensystem ausgedrückt. Auf der Elementebene muss man ein lineares Gleichungssystem lösen.
- Die Steifigkeitsmatrix und der Knotenbelastungsvektor werden im lokalen Koordinatensystem gebildet. (Die Integration in geschlossener Form ist auch bei geraden / ebenen Seiten nicht einfach.)
- Zur Kopplung der Elemente müssen die Steifigkeitsmatrizen und die Knotenpunktbelastungsvektoren in ein globales Koordinatensystem transformiert werden.

94. Schreiben Sie die Eigenschaften der isoparametrischen finiten Elemente auf!

- Die Elementgrenzen können auch gekrümmte Linien, oder gekrümmte Flächen sein.
- Die Beschreibung der Elementgeometrie erfolgt mit einer Abbildung. Dazu führen wir ein elementgebundenes „natürliches“  $\xi, \eta$ -Koordinatensystem ein.
- Die Näherung der Verschiebungsfelder erfolgt elementweise in dem globalen  $x, y, z$ -Koordinatensystem.
- In den Ansatzfunktionen erscheinen die Knotenpunktparameter unmittelbar im globalen Koordinatensystem.
- Die Integration wird nach den natürlichen Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  für einen Quadratbereich durchgeführt.
- Die Integration wird numerisch vorgenommen.

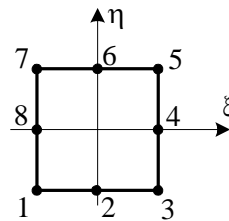
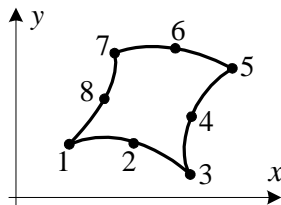
95. Schreiben Sie die Formfunktionen des linearen isoparametrischen Viereckelementes (siehe Bild) auf!



Formfunktionen:  $h_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$ ,  $h_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$ ,  
 $h_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$ ,  $h_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$ .

Bemerkung: Jede Formfunktion enthält auch ein quadratisches Glied.

96. Schreiben Sie die Formfunktionen des krummlinig umrandeten isoparametrischen Viereckelementes (siehe Bild) auf!



Die Formfunktionen:

$$h_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1), \quad h_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta),$$

$$h_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1), \quad h_4(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2),$$

$$h_5(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1), \quad h_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta),$$

$$h_7(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1), \quad h_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2).$$

Bemerkung: Jede Formfunktion enthält auch Glieder dritten Grades.

97. Die Ortskoordinaten  $x_i$ ,  $y_i$  und  $z_i$  der Knotenpunkte und die Formfunktionen  $h_i(\xi, \eta, \zeta)$  eines isoparametrischen 2D oder 3D Element sind gegeben. Wie kann man dem Punkt  $\Pi(\xi, \eta, \zeta)$  den Punkt  $P(x, y, z)$  zuordnen?

2D Fall

$$\left. \begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta) x_i \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned} \right\}$$

3D Fall

$$\left. \begin{aligned} x(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta, \zeta) x_i, \\ y(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta, \zeta) y_i, \\ z(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta, \zeta) z_i. \end{aligned} \right\}$$

$N$  ist die Anzahl der Knotenpunkte des Elementes

98. Die Knotenpunktverschiebungen  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $w_i$  und die Formfunktionen  $h_i(\xi, \eta, \zeta)$  eines isoparametrischen 2D oder 3D Elementes sind gegeben. Wie kann man die Verschiebungen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  eines beliebigen Punktes  $\Pi(\xi, \eta, \zeta) / P(x, y, z)$  des isoparametrischen Elementes bestimmen?



2D Fall

$$\left. \begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta) u_i \\ v(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta) v_i \end{aligned} \right\}$$

$N$  ist die Anzahl der Knotenpunkte des Elementes

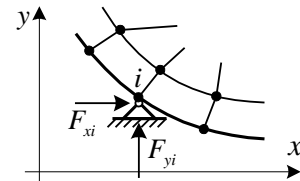
3D Fall

$$\left. \begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta, \zeta) u_i, \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta, \zeta) v_i, \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta, \zeta) w_i. \end{aligned} \right\}$$

99. Was ist der physikalische Inhalt einer gelenkigen Abstützung in einem Knotenpunkt bei 2D-Aufgaben?

Gelenkige Abstützung / Lagerung in einem Punkt:

$u_i = 0, v_i = 0 \Rightarrow$  Im Knotenpunkt  $i$  tritt eine Einzelkraft auf.



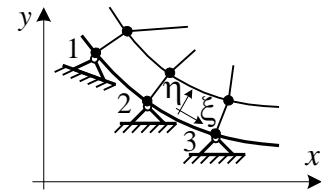
100. Was ist der physikalische Inhalt einer gelenkigen Abstützung in mehreren Knotenpunkten nebeneinander bei 2D-Aufgaben mit der Benutzung von isoparametrischen Elementen?

Gelenkige Abstützung / Lagerung in mehreren Knotenpunkten nebeneinander:

$u_i = 0, v_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow$

- In jedem Knotenpunkt tritt eine Einzelkraft auf.
- Aus dem Verschiebungsfeld am Rand bei isoparametrischen Näherung:

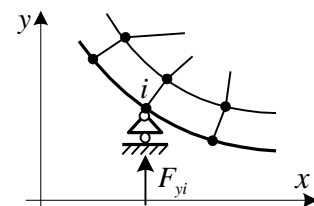
$$\left. \begin{aligned} u(\xi, \eta = -1) &= \sum_i h_i(\xi) u_i, \\ v(\xi, \eta = -1) &= \sum_i h_i(\xi) v_i. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} u &\equiv 0, \\ v &\equiv 0. \end{aligned}$$



101. Was ist der physikalische Inhalt eines Einrollenlagers in einem Knotenpunkt  $i$  bei 2D-Aufgaben?

Einrollenlager in einem Knotenpunkt  $i$ :

$v_i = 0 \Rightarrow$  Im Knotenpunkt  $i$  tritt eine Einzelkraft in  $y$ -Richtung auf.

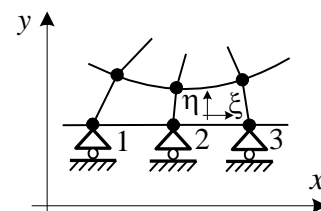


102. Was ist der physikalische Inhalt des Einrollenlagers in mehreren Knotenpunkten nebeneinander bei 2D-Aufgaben mit der Benutzung von isoparametrischen Elementen?

- Einrollenlager in mehreren Knotenpunkten nebeneinander  
 $v_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow$
- In jedem Knotenpunkt tritt eine Einzelkraft in  $y$  Richtung auf.
- Aus dem Verschiebungsfeld am Rand bei isoparametrischen Näherung:

$$v^e(\xi, \eta = -1) = \sum_i h_i(\xi) v_i \Rightarrow v \equiv 0.$$

Der Rand mit den Knotenpunkten 1, 2, 3 bleibt gerade.



103. Was ist das Ziel bei der Erhöhung des Grades / bei Potenserhöhung der Ansatzfunktionen der

finiten Elemente?

Ziel: - Die Verbesserung der Genauigkeit der Berechnungsergebnisse bei der FE-Näherung.

- Man will den Grad der Ansatzfunktionen für die Elemente ohne zusätzliche Knotenpunkte und infolge dessen ohne Freiheitsgraderhöhung des Elementes / des Systems erhöhen.

104. Wie wird das Verschiebungsfeld mit der Erhöhung des Grades / der Potenserhöhung der Ansatzfunktion bei einem Zug-Druck Stabelementen genähert?

$$w^e(\zeta) = \underline{\underline{A}}^e(\zeta) \underline{\underline{q}}^e + \hat{\underline{\underline{A}}}^e(\zeta) \hat{\underline{\underline{a}}}^e = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}^e & \hat{\underline{\underline{A}}}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}^e \\ \hat{\underline{\underline{a}}}^e \end{bmatrix}.$$

$1 \times (2+p) \quad (2+p) \times 1$

$p$  - die Anzahl der Koeffizienten, die man nicht durch Knotenpunktverschiebungen ausdrücken kann.

$\hat{\underline{\underline{a}}}^e$  - die Spaltenmatrix, die die zusätzlichen Konstanten enthält, die nur bei einem einzigen Element  $e$  vorkommen.

105. Wie wendet man das Prinzip der gesamten potentiellen Energie bei der Potenserhöhung (p-Version) an?

Anwendung des Prinzips der gesamten potentiellen Energie:

$$\min \pi \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \pi}{\partial \underline{\underline{q}}} = \underline{\underline{0}}, \\ \frac{\partial \pi}{\partial \hat{\underline{\underline{a}}}^e} = \frac{\sum_e \partial \pi^e}{\partial \hat{\underline{\underline{a}}}^e} = \frac{\partial \pi^e}{\partial \hat{\underline{\underline{a}}}^e} = \underline{\underline{0}}. \end{array} \right\}$$

Die Parameter  $\hat{\underline{\underline{a}}}^e$  kommen nur bei dem Element  $e$ , das heißt nur bei einem einzigen Element vor.  $\Rightarrow$  Die Bestimmung des Minimalwertes von  $\hat{\underline{\underline{a}}}^e$  kann man gesondert für die einzelnen Elemente  $e$  vornehmen.

106. Schreiben Sie die reduzierte Steifigkeitsmatrix und den reduzierten Knotenpunktbelastungsvektor eines Elementes bei der Potenserhöhung (p-Version) auf!

- Die reduzierte Steifigkeitsmatrix des Elementes im lokalen Koordinatensystem:

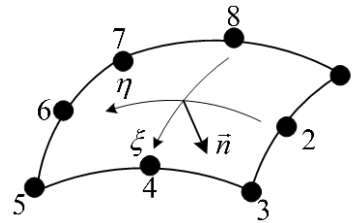
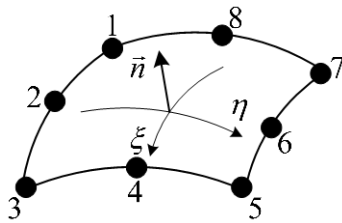
$$\underline{\underline{K}}_{red}^e = \underline{\underline{K}}_{qq}^e - \underline{\underline{K}}_{qa}^e \left( \underline{\underline{K}}_{aa}^e \right)^{-1} \underline{\underline{K}}_{aq}^e.$$

- Der reduzierte Knotenpunktbelastungsvektor des Elementes im lokalen Koordinatensystem:

$$\underline{\underline{f}}_{red}^e = \underline{\underline{f}}_q^e - \underline{\underline{K}}_{qa}^e \left( \underline{\underline{K}}_{aa}^e \right)^T \underline{\underline{f}}_a^e.$$

107. Wie kann man die Richtung des Oberflächen-Normalenvektors eindeutig angeben?

Die Richtung des Normaleneinheitsvektors ist durch die lokale Knotenpunktnumerierung der Elementseite bestimmt.



108. Geben Sie die Definition und die Eigenschaften einer elastischen Bettung an!

*Elastische Bettung* ist eine Flächenbelastung, wobei die Intensität der Belastung zu den Verschiebungen der Oberflächenpunkte proportional ist.

Die elastische Bettung modelliert die Wirkung anderer elastischer Bauteile auf den zu untersuchenden Körper / das zu untersuchende Bauteil.

*Eigenschaften:*

- Das Bettungsmedium ist linear elastisch.
- Zwischen dem zu untersuchenden Körper und dem Bettungsmedium gibt es eine zweiseitige Kopplung (davon ist keine Abweichung möglich).
- Zwischen den Kräften (Flächenkräften) und den Verschiebungen auf der Oberfläche gilt eine homogene, lineare Beziehung.

109. Ist es zweckmäßig, eine starre Lagerung in einem Knotenpunkt / einen Kugellager in einem Knotenpunkt bei 3D-Aufgaben anzuwenden?

Im gelagerten einzigen Punkt tritt eine Einzelkraft / eine konzentrierte Belastung auf.

Die Einzelkräfte verursachen bei räumlichen Aufgaben in der Umgebung der Kraftangriffspunkte eine Spannungskonzentration.

Bei räumlichen Aufgaben sind die Einzelkraft-Belastungen nicht realistisch – man muss sie möglichst vermeiden.

*Einzelkraft, Kugellager sollte man bei 3D-Aufgaben möglichst nicht anwenden!*

110. Ist es zweckmäßig, starre Lagerung in allen Punkten einer Oberfläche bei 3D-Aufgaben anzuwenden? Was ist die bevorzugte Lösung des Problems?

Die starre Lagerung einer Oberfläche bei räumlichen Aufgaben muss man möglichst vermeiden.

Die reale Modellierungsmöglichkeit: die Anwendung einer elastischen Bettung statt kinematischer Randbedingungen.

111. Geben Sie die Definition der Schale in der Mechanik an!

- Ein Körper, bei dem die eine Dimension wesentlich kleiner ist als die beiden anderen. Die kleinste Dimension ist die Dicke der Schale.
- Mittels Halbierung der Dicke kann man eine gekrümmte Mittelfläche definieren.
- Die Belastung der Schale ist beliebig, es gibt sowohl parallele als auch senkrechte Belastungskomponenten zur Mittelfläche.

112. Geben Sie die Definition der Platte in der Mechanik an!

- Ein Körper, bei dem die eine Dimension wesentlich kleiner ist als die beiden anderen.
- Man kann eine ebene Mittelfläche definieren. Die Mittelfläche ist die Mittelebene.
- Die Belastung der Platte erfolgt senkrecht zur Mittelebene.

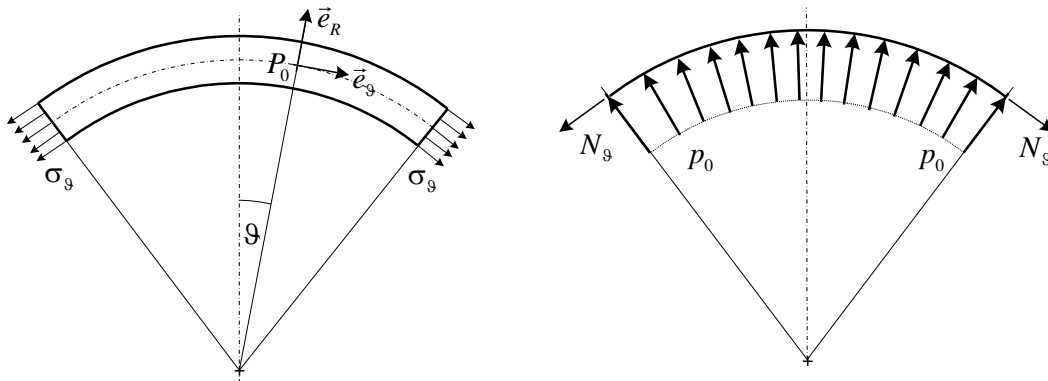
113. Wie verwendet man das Superpositionsprinzip bei Schalen und Platten?

- Bei Aufgabenstellungen zur beliebig belasteten Schale erhält man die Lösung mittels Superposition einer Membran-Aufgabe und einer Biegungsaufgabe der Schale.
- Bei Aufgabenstellungen zur beliebig belasteten Platte mit ebener Mittelfläche erhält man die Lösung mittels Superposition einer Scheiben-Aufgabe und einer Plattenbiegung.

114. Definieren Sie die Scheiben-Aufgabe in der Mechanik!

Scheibenaufgabe: Wenn die Platte in Richtung ihrer Mittelebene belastet wird. In diesem Fall ist die Spannungsverteilung über die Dicke konstant.

115. Definieren Sie die Membran-Aufgabe von Schalen!



Wenn die Spannungsverteilung über die Dicke der Schale konstant ist, z.B.: Luftballon.

116. Wie lautet die Kirchhoff-Lovesche Hypothese?

Bei der Biegung bleiben die Normalen der Mittelfläche / Mittelebene gerade und senkrecht zur deformierten Mittelfläche der Schale / Platte. Der Abstand der Punkte auf den Normalen ändert sich bei der Deformation nicht.

117. Was ist die Konsequenz der Kirchhoff-Loveschen Hypothese?

Die Konsequenz der Hypothese:  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  und  $\varepsilon_z = 0$ .

Die *Kirchhoff-Lovesche* Theorie berücksichtigt die Schubverzerrungen, Schubspannungen nicht.

118. Welche charakteristischen Eigenschaften hat die Kirchhoff-Loveschen Theorie?

- In Kenntnis der Durchbiegungsfunktion  $w_0(x, y)$  kann man jede Kenngröße der Schale / Platte bestimmen.
- In der gesamten potentiellen Energie treten die zweiten Ableitungen des Durchbiegungsfeldes  $w_0(x, y)$  auf.

119. Welche Verteilung haben die Verzerrungs- und Spannungsgrößen über die Dicke in der Kirchhoff-Loveschen Theorie?

Die Verzerrungs- und Spannungsgrößen haben eine lineare Verteilung über die Dicke in der Kirchhoff-Loveschen Theorie.

120. Wie lautet die Reissner-Mindlinsche Hypothese?

Bei der Biegung bleiben die Normalen der Mittelfläche / Mittelebene gerade, aber sie bleiben nicht senkrecht zur deformierten Mittelfläche der Schale / Platte. Der Abstand der Punkte auf den Normalen ändert sich bei der Deformation nicht.

121. Was ist die Konsequenz der Reissner-Mindlinschen Hypothese?

Die Konsequenz der Hypothese:  $\gamma_{xz} = \text{konst.}$ ,  $\gamma_{yz} = \text{konst.}$  und  $\varepsilon_z = 0$ .

Die *Reissner-Mindlinsche* Theorie berücksichtigt auch die Schubverzerrungen / Schubspannungen.

122. Welche charakteristischen Eigenschaften hat die *Reissner-Mindlinsche* Theorie?

- Zur Bestimmung der Festigkeitszustände braucht man drei unabhängige Felder:

$$w_0 = (x, y), \varphi_x(x, y), \varphi_y(x, y).$$

- In der gesamten potentiellen Energie stehen nur die ersten Ableitungen der Felder

$$w_0(x, y), \varphi_x(x, y), \varphi_y(x, y).$$

123. Welche Verteilung haben die Verzerrungs- und Spannungsgrößen über die Dicke in der Kirchhoff-Loveschen Theorie?

Die Verzerrungsgrößen  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  und die Spannungsgrößen  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  haben eine lineare Verteilung und die  $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ , beziehungsweise die  $\tau_{yz}, \tau_{xz}$  Größen haben aber eine konstante Verteilung über die Dicke in der *Reissner-Mindlinschen* Theorie.

124. Geben Sie die Definition der Flächenspannungen / der resultierenden Kräfte und der Flächenmomente / der resultierenden Momente an!

Flächenspannungen / Resultierende Kräfte in Bezug auf die Dicke:

$$N_x = \int_{(t)} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{(t)} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = N_{yx} = \int_{(t)} \tau_{xy} dz, \quad Q_x = \int_{(t)} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{(t)} \tau_{yz} dz.$$

Flächenmomente / Resultierende Momente in Bezug auf die Dicke:

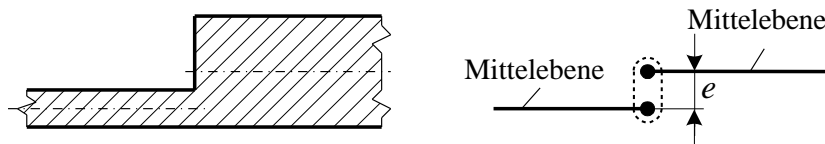
$$M_x = \int_{(t)} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{(t)} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = M_{yx} = \int_{(t)} \tau_{xy} z dz.$$

125. Wie kann man die Spannungen aus den Flächenmomenten bei Schalen / Platten berechnen?

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I_1} z, \quad \sigma_y = \frac{M_y}{I_1} z, \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{I_1} z, \quad \text{wobei } I_1 = \frac{b^3}{12}.$$

126. Welche Verbindungen kann man mit einer exzentrischen Kopplung modellieren? Wie erfolgt die exzentrische Modellierung?

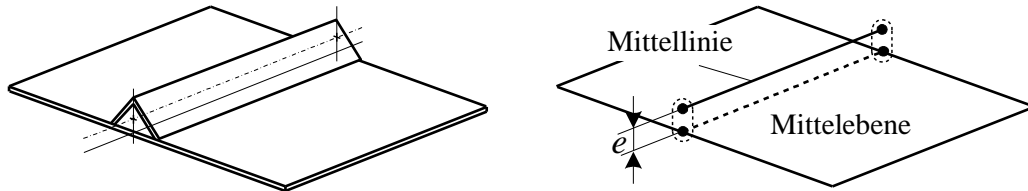
- *Plötzliche Dickenänderung einer Platte / Schale:*



$e$  – Exzentrizität.

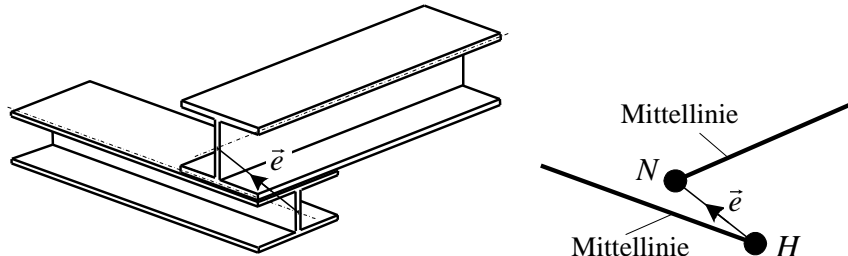
Die beiden Mittelflächen liegen nicht in der gleichen Ebene. Der Abstand zwischen den Mittelflächen ist die Exzentrizität  $e$ .

- *Versteifung mit einem dünnwandigen Stab:*



$e$  – Exzentrizität.

- *Räumliche Kopplung von Stäben:*



Der Vektor der Exzentrizität:  $\vec{e} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z$ .

Modellierung der exzentrischen Kopplung: Es gibt eine starre Verbindung zwischen den Knotenpunkten  $N$  und  $H$ .

127. Zählen Sie die Annahmen der klassischen Laminattheorie auf!

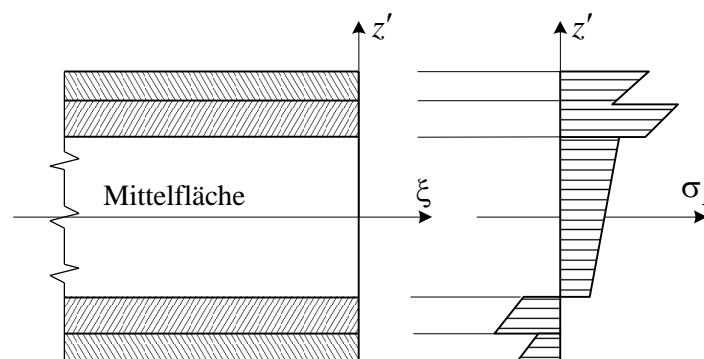
- Die Schichten sind sehr dünn ( $t_i \ll t$ ).
- Das Material der Schichten ist linear elastisch, homogen und orthotrop.
- Die Schichten sind im ESZ / Membranspannungszustand.
- Zwischen den Schichten gibt es eine perfekte zweiseitige Haftung – es gibt weder Zwischenräume noch Verschiebungen / Trennung.
- Die geometrische / kinematische Annahme ist auch gültig: *Kirchoff-Love* oder *Reissner-Mindlin*.

128. Geben Sie die charakteristischen Eigenschaften des geschichteten Kompositenschalenelementes an! Schreiben Sie das Versagenskriterium nach Tsai-Wu auf!

- Es ist nicht sicher, dass die höchsten Spannungswerte an den Oberflächen  $z' = \pm \frac{t}{2}$  auftreten.

Die Spannungen muss man in jeder Schicht an den Grenzflächen bestimmen.

- Den Festigkeitsnachweis muss man für jede Schicht gesondert durchführen. Die üblichen Versagenskriterien kann man hier nicht benutzen.



*Das Versagenskriterium nach Tsai-Wu:*

Eine Schicht versagt (in einem Punkt), wenn die folgende Beziehung gilt:

$$\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_{1H}\sigma_{1N}}\right) + \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_{2H}\sigma_{2N}}\right) + \left(\frac{1}{\sigma_{1H}} - \frac{1}{\sigma_{1N}}\right)\sigma_1 + \left(\frac{1}{\sigma_{2H}} - \frac{1}{\sigma_{2N}}\right)\sigma_2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{12S}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{\tau_{23S}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{13}}{\tau_{13S}}\right)^2 - \sqrt{\frac{1}{\sigma_{1H}\sigma_{1N}} - \frac{1}{\sigma_{2H}\sigma_{2N}}}\sigma_1\sigma_2 \geq 1$$

$\sigma_{1H}, \sigma_{2H}$  - Zugfestigkeiten in den Richtungen 1 und 2,

$\sigma_{1N}, \sigma_{2N}$  - Druckfestigkeiten in den Richtungen 1 und 2,  $\tau_{12S}, \tau_{23S}, \tau_{13S}$  - Schubfestigkeiten.

129. Geben Sie die Definition der Freiheitsgrade und der verallgemeinerten Koordinate an!

*Freiheitsgrade:* Anzahl der unabhängigen skalaren Koordinaten, die die momentane Lage, oder Bewegung des zu untersuchenden Systems eindeutig bestimmen.

*Verallgemeinerte Koordinate:* Die unabhängigen skalaren Koordinaten, die die momentane Lage, oder Bewegung des zu untersuchenden Systems eindeutig bestimmen.

Bezeichnung:  $q$  - Verschiebung oder Verdrehung,

$q = q(t)$  - die verallgemeinerte Koordinate ist eine nach der Zeit mindestens zweimal differenzierbare Funktion.

130. In welchem Fall spricht man über Schwingungen?

Wenn die verallgemeinerte Koordinate  $q$ , die verallgemeinerte Geschwindigkeit  $\dot{q}$ , oder die verallgemeinerte Beschleunigung  $\ddot{q}$  während der Bewegung mehrmals das Vorzeichen wechseln.

131. Geben Sie die Definition und die Bauteile eines diskreten Schwingungssystems an!

*Diskretes Schwingungssystem:* Ein Schwingungssystem, die endlich viele Massenpunkte / Starrkörper und elastische Elemente enthält.

Bauteile: - Starrkörper oder Massenpunkt,  
- Elastische Körper / elastische Bauteile  $\equiv$  Federn,  
- Dämpfungselemente.

132. In welchem Fall spricht man über Kontinuum-Schwingungen?

Schwingungen der elastischen Körper mit kontinuierlicher / stetiger Massenverteilung. z.B. Schwingungen von Stäben, Platten, Schalen, usw.

133. Wie lautet das D'Alembertsche - Prinzip?

Die dynamischen Aufgaben können immer auf ein statisches Problem zurückgeführt werden, wenn man neben den äußeren Kräften auch Trägheitskräfte / Massenkräfte berücksichtigt, oder einleitet.

$$\text{Bei einem Massenpunkt: } m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{0} = \vec{F}_i - m_i \vec{a}_i$$

Die Trägheitskraft / Massenkraft:  $\vec{T}_i = m_i \vec{a}_i$ .

134. Wie nähert man das Verschiebungsfeld, das Geschwindigkeitsfeld, und das Beschleunigungsfeld bei dynamischen Aufgaben am Element  $e$  an?

Annäherung für: - das Verschiebungsfeld:  $\underline{\underline{u}}^e(X, t) = \underline{\underline{A}}^e(X) \underline{\underline{q}}^e(t)$ ,

- das Geschwindigkeitsfeld:  $\underline{\underline{v}}^e(X,t) = \underline{\underline{A}}^e(X)\underline{\underline{\dot{q}}}^e(t)$ ,
- das Beschleunigungsfeld:  $\underline{\underline{a}}^e(X,t) = \underline{\underline{A}}^e(X)\underline{\underline{\ddot{q}}}^e(t)$ .

135. Schreiben Sie das FE-Bewegungsgleichungssystem für ein Kontinuum / einen festen Körper auf!

$$\underline{\underline{M}}\underline{\underline{\ddot{q}}} + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{f}}_p + \underline{\underline{f}}_q.$$

Diese Matrixgleichung ist ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem für die unbekanntenen Funktionen  $q_i(t)$ .

Die Massenmatrix des Körpers:  $\underline{\underline{M}} =$

$$\begin{bmatrix} \sum_{e \in 1,1} \underline{\underline{M}}_{11}^e & \sum_{e \in 1,2} \underline{\underline{M}}_{12}^e & \dots & \sum_{e \in 1,j} \underline{\underline{M}}_{1j}^e & \dots & \sum_{e \in 1,N} \underline{\underline{M}}_{1N}^e \\ \sum_{e \in 2,1} \underline{\underline{M}}_{21}^e & \sum_{e \in 2,2} \underline{\underline{M}}_{22}^e & \dots & \sum_{e \in 2,j} \underline{\underline{M}}_{2j}^e & \dots & \sum_{e \in 2,N} \underline{\underline{M}}_{2N}^e \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{e \in i,1} \underline{\underline{M}}_{i1}^e & \sum_{e \in i,2} \underline{\underline{M}}_{i2}^e & \dots & \sum_{e \in i,j} \underline{\underline{M}}_{ij}^e & \dots & \sum_{e \in i,N} \underline{\underline{M}}_{iN}^e \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

wobei  $N$  die Anzahl der Knotenpunkte des elastischen Körpers und

$\underline{\underline{M}}_{ij}^e$  der zu den Knotenpunkten  $i, j$  gehörende Block der Massenmatrix des Elementes  $e$ .

(3x3)

136. Schreiben Sie den Grundgedanken der Lösung durch direkte Integration des Bewegungsgleichungssystems  $\underline{\underline{M}}\underline{\underline{\ddot{q}}} + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{f}}(t)$  auf!

Bei der direkten Integration wird die Bewegungsgleichung mit einem numerischen Schritt-für-Schritt-Verfahren integriert. Direkt bedeutet hier, dass die Bewegungsgleichung vor der Integration nicht in eine andere Form transformiert wird.

*Grundgedanke der Integration:* nicht die Funktion  $q(t)$  selbst, sondern die diskrete Funktionswerte  $q(t_1), q(t_2), \dots$  in den gegebenen Zeitpunkten  $t_1, t_2, \dots$  werden ermittelt. (Wir diskretisieren die Funktion in Bezug auf die Zeit.)

137. Definieren Sie die Erregung und schreiben Sie das Bewegungsgleichungssystem für harmonische Erregung auf!

*Erregung (Krafterregung):* die Belastung des zu untersuchenden Systems ändert sich periodisch mit der Zeit. Erregung  $\equiv$  periodische Belastung.

Die Bewegungsgleichungssystem für harmonische Erregung:  $\underline{\underline{M}}\underline{\underline{\ddot{q}}} + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{f}}_0 \cos \omega t$ ,

wobei  $\underline{\underline{f}}_0$  die Amplituden der Erregung enthält und  $\omega$  die Kreisfrequenz der Erregung ist.