

### 3. Das Verschiebungsverfahren der Finiten Elemente Methode (FEM)

#### Der Grundgedanke der FEM

- Die unbekanntes Felder werden an Teilbereichen des Körpers angenähert.
- Die Näherungsfunktionen der Felder werden für den Gesamtkörper gekoppelt.
- Die Lösung der gestellten Aufgabe erfolgt mit Hilfe eines Energieprinzips:
  - mit dem Prinzip von *Lagrange* ( $\delta\Pi = 0$ ),
  - mit dem Prinzip von *Castigliano* ( $\delta K = 0$ ),
  - mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit.

#### 3.1. Der Aufbau der Verschiebungsmethode

Der Gedankengang des Aufbaus:

- Das Bauteil / Der Körper wird in eine finite (endliche) Anzahl an Teilbereichen mit theoretisch beliebiger Form zerlegt. Die Teilbereiche heißen finite Elemente.
- Die Verschiebungsfelder werden gesondert für die einzelnen Elemente / Teilbereiche angenähert. Die Vorgehensweise heißt lokale Näherung / Approximation.
- Die Näherungsfunktionen, die sogenannten Ansatzfunktionen sind im Allgemeinen Polynome.
- An den Elementen / an den Elementrändern werden ausgewählte Punkte, sogenannte Knotenpunkte aufgenommen.
- Die Ansatzfunktionen werden mit den bestimmten Parametern / mit den Verschiebungswerten der Knotenpunkte gekoppelt.
- Mittels Anwendung des *Lagrangeschen* Variationsprinzips erhält man ein lineares algebraisches Gleichungssystem für die Parameter / für die Verschiebungen der Knotenpunkte.
- Aus dem algebraischen Gleichungssystem werden die Knotenpunktverschiebungen bestimmt.
- Bei Kenntnis der Knotenpunktverschiebungen kann man die gesuchten unbekanntes Felder (wie Verschiebungen, Verzerrungen, Spannungen, usw.) in allen angegebenen Punkten / Stellen berechnen.

##### 3.1.1. Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{r}) &\rightarrow \bar{u}(x, y, z) \rightarrow \bar{u}(X), \\ \underline{\underline{B}}(\bar{r}) &\rightarrow \underline{\underline{B}}(x, y, z) \rightarrow \underline{\underline{B}}(X). \end{aligned}$$

Der Spaltenvektor des Verschiebungsfeldes:  $\underline{\underline{u}}(X) = \underbrace{\begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix}}_{(3 \times 1)}$ .

Der Spaltenvektor des Verzerrungs – und Spannungsfeldes:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(X) = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x(x, y, z) \\ \varepsilon_y(x, y, z) \\ \varepsilon_z(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \\ \gamma_{yz}(x, y, z) \\ \gamma_{xz}(x, y, z) \end{bmatrix}}_{(6 \times 1)}, \quad \underline{\underline{\sigma}}(X) = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x(x, y, z) \\ \sigma_y(x, y, z) \\ \sigma_z(x, y, z) \\ \tau_{xy}(x, y, z) \\ \tau_{yz}(x, y, z) \\ \tau_{xz}(x, y, z) \end{bmatrix}}_{(6 \times 1)}.$$

Die Koordinaten / Elemente des Verzerrungs – und Spannungstensors werden im Weiteren immer in Spaltenvektoren geordnet.

### 3.1.2. Die Formulierung der elastischen Randwertaufgabe

Gegeben sind:

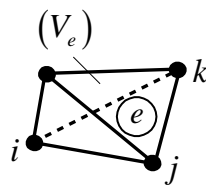
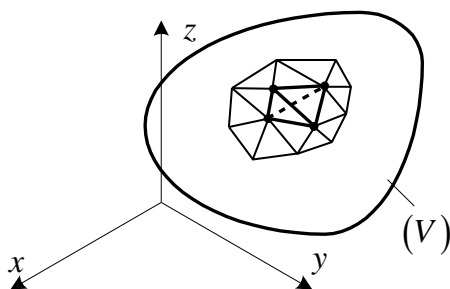
- die Form und Geometrie des Bauteiles,
- die Belastungen:  $\vec{q}(x)$  an  $(V)$  und  $\vec{p}_0(x)$  an  $(A_p)$ .
- die Abstützung / die Lagerung:  $\vec{u}_0(x)$  an  $(A_u)$ .

Gesucht sind:

- das Verschiebungsfeld  $\underline{u}(X)$ ,
- das Verzerrungsfeld  $\underline{\varepsilon}(X)$ ,
- das Spannungsfeld  $\underline{\sigma}(X)$ .

### 3.1.3. Die Näherungslösung für die gestellte Aufgabe

Der Bauteil wird in eine finite Anzahl an Teilgebieten, in sogenannte finite Elemente zerlegt.



Ein Element, z.B. ein Tetraeder.

An den Elementen werden Knotenpunkte  $i, j, k$ , usw. definiert.

Das Verschiebungsfeld wird für die einzelnen Elemente gesondert angenähert / approximiert:

$$\underline{u}^e(X) = \underline{A}^e(X) \underline{q}^e, \text{ wobei}$$

$\underline{u}^e(X)$  - das Verschiebungsfeld des Elementes ist.

$\underline{A}^e(X)$  - die Approximationsmatrix des Elementes,

$\left(\underline{q}^e\right)^T = \left[ \underline{q}_i^T \quad \underline{q}_j^T \quad \underline{q}_k^T \quad \dots \quad \underline{q}_N^T \right]^e$  - die Matrix / der Vektor der Knotenpunktverschiebungen.

$N$  - die Anzahl der Knotenpunkte des Elementes  $e$  und

$n = 3 \times N$  - die Anzahl der Knotenpunktparameter / der Knotenpunktverschiebungen des Elementes  $e$ .

Die Anzahl der Knotenpunktparameter  $n$  des Elementes ist der Freiheitsgrad des Elementes.

Der Verschiebungsvektor des Knotenpunktes  $i$  am Element  $e$  im 3D Fall:  $\underline{q}_i^e = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}^e$ .

Zerlegung der Approximationsmatrix: 
$$\underline{A}^e(X) \underline{q}^e = \underbrace{\left[ \begin{array}{cccc} \underline{A}_i^e(X) & \underline{A}_j^e(X) & \underline{A}_k^e(X) & \dots & \underline{A}_N^e(X) \\ \hline (3 \times 3) & (3 \times 3) & (3 \times 3) & & (3 \times 3) \end{array} \right]}_{(3 \times 3N)} \cdot \begin{bmatrix} \underline{q}_i^e \\ \underline{q}_j^e \\ \vdots \\ \underline{q}_N^e \end{bmatrix} \quad (3N \times 1)$$

Zu jedem Knotenpunktverschiebungsvektor  $i$  gehört ein Matrixblock  $\underline{\underline{A}}_i^e(X)$  der Approximationsmatrix:

$$\underline{\underline{A}}_i^e(X) = \begin{bmatrix} A_{xx}(X) & A_{xy}(X) & A_{xz}(X) \\ A_{yx}(X) & A_{yy}(X) & A_{yz}(X) \\ A_{zx}(X) & A_{zy}(X) & A_{zz}(X) \end{bmatrix}_i^e.$$

Der kinematische Inhalt einer Koordinate / eines Elementes der Approximationsmatrix:

Z.B.:  $A_{xz}^e(X)$  - das Verschiebungsfeld im Element  $e$  in Richtung  $x$  infolge einer Einheitsverschiebung in Richtung  $z$  im Knotenpunkt  $i$ .

Die Anforderungen für die Approximationsmatrix:

- Das Verschiebungsfeld  $\underline{\underline{u}}^e(X)$  muss kinematisch möglich sein  $\Rightarrow \underline{\underline{A}}^e(X)$  muss differenzierbar sein.
- Die Blöcke der Approximationsmatrix müssen die folgenden Zusammenhänge erfüllen:

$$\underline{\underline{A}}_i^e(X_i) = \underline{\underline{E}},$$

$$\underline{\underline{A}}_i^e(X_j) = \underline{\underline{A}}_i^e(X_k) = \dots = \underline{\underline{A}}_i^e(X_N) = \underline{\underline{0}}.$$

Die Näherung des Verzerrungsfeldes am Element  $e$ :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e(X) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} u^e(X) \\ v^e(X) \\ w^e(X) \end{bmatrix}^e.$$

In kompakter Form geschrieben:  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e(X) = \underline{\underline{D}}_\varepsilon^e \underline{\underline{u}}^e(X) = \underline{\underline{D}}_\varepsilon^e \underline{\underline{A}}^e(X) \underline{\underline{q}}^e = \underline{\underline{B}}^e(X) \underline{\underline{q}}^e$ , wobei

$\underline{\underline{D}}_\varepsilon^e$  - die Matrix der Differentialoperationen für das Element  $e$  ist.

Die Näherung für das Spannungsfeld am Element  $e$ :

$$\underline{\underline{\sigma}}^e(X) = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}^e = \underline{\underline{C}}^e(X) \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}^e(X) - \underline{\underline{\varepsilon}}_T^e(X) \right] = \underline{\underline{C}}^e(X) \left[ \underline{\underline{B}}^e(X) \underline{\underline{q}}^e - \underline{\underline{\varepsilon}}_T^e(X) \right].$$

$\underline{\underline{C}}^e(X)$  - die Matrix der Materialkennwerte (im Allgemeinen hängt sie vom Ort ab),

$\underline{\underline{\varepsilon}}_T^e(X)$  - die Verzerrungen infolge der Wärmedehnung.

Für linear elastisches, isotropes Material:

$$\underline{\underline{C}}^e = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix},$$

$$c_1 = E \frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad c_2 = E \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad c_3 = E \frac{1}{2(1+\nu)} = G.$$

Für linear elastisches, orthotropes Material:

$$\underline{\underline{C}}^e(X) = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} & \frac{\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}}{E_2E_3\Delta} & \frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}}{E_2E_3\Delta} & \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} & \frac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} & \frac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} & \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} \end{bmatrix}^e,$$

wobei  $\Delta = \frac{1}{E_1E_2E_3} (1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13})$ .

Die Inverse der Matrix der Materialkennwerte kann in einfacherer Form aufgeschrieben werden:

$$[\underline{\underline{C}}^e(X)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & -\frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix}^e.$$

Die Matrix und die Inverse der Materialkennwerte müssen symmetrisch sein:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}.$$

Die Richtungen  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  sind die Material-Hauptrichtungen.

Zur Anwendung des Materialgesetzes müssen die Spannungen und Verzerrungen in das 1,2,3 Koordinatensystem transformiert werden:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{xyz}^e \Rightarrow \underline{\underline{\sigma}}_{123}^e, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_{xyz}^e \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}_{123}^e.$$

*Transformation der Spannungen:*

Richtungseinheitsvektoren der Material-Haupttrichtungen:

$$\underline{\underline{e}}_1 = \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{e}}_2 = \begin{bmatrix} e_{2x} \\ e_{2y} \\ e_{2z} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{e}}_3 = \begin{bmatrix} e_{3x} \\ e_{3y} \\ e_{3z} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{\underline{\rho}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{e}}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x e_{1x} + \tau_{xy} e_{1y} + \tau_{xz} e_{1z} \\ \tau_{yx} e_{1x} + \sigma_y e_{1y} + \tau_{yz} e_{1z} \\ \tau_{zx} e_{1x} + \tau_{zy} e_{1y} + \sigma_z e_{1z} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \underline{\underline{\rho}}^T \underline{\underline{e}}_1 &= \sigma_x e_{1x}^2 + \tau_{xy} e_{1x} e_{1y} + \tau_{xz} e_{1x} e_{1z} + \tau_{yx} e_{1x} e_{1y} + \sigma_y e_{1y}^2 + \tau_{yz} e_{1y} e_{1z} + \\ &+ \tau_{zx} e_{1x} e_{1z} + \tau_{yz} e_{1y} e_{1z} + \sigma_z e_{1z}^2 = \sigma_x e_{1x}^2 + \sigma_y e_{1y}^2 + \sigma_z e_{1z}^2 + \\ &+ 2\tau_{xy} e_{1x} e_{1y} + 2\tau_{yz} e_{1y} e_{1z} + 2\tau_{xz} e_{1x} e_{1z}, \end{aligned}$$

$$\sigma_2 = \underline{\underline{e}}_2^T \underline{\underline{F}} \underline{\underline{e}}_2 = \sigma_x e_{2x}^2 + \sigma_y e_{2y}^2 + \sigma_z e_{2z}^2 + 2\tau_{xy} e_{2x} e_{2y} + 2\tau_{yz} e_{2y} e_{2z} + 2\tau_{xz} e_{2x} e_{2z},$$

$$\sigma_3 = \underline{\underline{e}}_3^T \underline{\underline{F}} \underline{\underline{e}}_3 = \sigma_x e_{3x}^2 + \sigma_y e_{3y}^2 + \sigma_z e_{3z}^2 + 2\tau_{xy} e_{3x} e_{3y} + 2\tau_{yz} e_{3y} e_{3z} + 2\tau_{xz} e_{3x} e_{3z},$$

$$\begin{aligned} \tau_{21} = \underline{\underline{e}}_2^T \underline{\underline{F}} \underline{\underline{e}}_1 &= \sigma_x e_{1x} e_{2x} + \tau_{xy} e_{2x} e_{1y} + \tau_{xz} e_{2x} e_{1z} + \tau_{yx} e_{1x} e_{2y} + \sigma_y e_{1y} e_{2y} + \tau_{yz} e_{1z} e_{2y} + \\ &+ \tau_{zx} e_{1x} e_{2z} + \tau_{zy} e_{1y} e_{2z} + \sigma_z e_{1z} e_{2z} = \sigma_x e_{1x} e_{2x} + \sigma_y e_{1y} e_{2y} + \sigma_z e_{1z} e_{2z} + \\ &+ \tau_{xy} (e_{2x} e_{1y} + e_{1x} e_{2y}) + \tau_{yz} (e_{1z} e_{2y} + e_{1y} e_{2z}) + \tau_{xz} (e_{2x} e_{1z} + e_{1x} e_{2z}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{31} = \underline{\underline{e}}_3^T \underline{\underline{F}} \underline{\underline{e}}_1 &= \sigma_x e_{1x} e_{3x} + \tau_{xy} e_{3x} e_{1y} + \tau_{xz} e_{3x} e_{1z} + \tau_{yx} e_{1x} e_{3y} + \sigma_y e_{1y} e_{3y} + \tau_{yz} e_{1z} e_{3y} + \\ &+ \tau_{zx} e_{1x} e_{3z} + \tau_{zy} e_{1y} e_{3z} + \sigma_z e_{1z} e_{3z} = \sigma_x e_{1x} e_{3x} + \sigma_y e_{1y} e_{3y} + \sigma_z e_{1z} e_{3z} + \\ &+ \tau_{xy} (e_{3x} e_{1y} + e_{1x} e_{3y}) + \tau_{yz} (e_{1z} e_{3y} + e_{1y} e_{3z}) + \tau_{xz} (e_{3x} e_{1z} + e_{1x} e_{3z}). \end{aligned}$$

Die Transformationsbeziehungen in Matrizenform:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{123} = \underline{\underline{T}}_{\sigma} \underline{\underline{\sigma}}_{xyz}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_{123} = \underline{\underline{T}}_{\varepsilon} \underline{\underline{\varepsilon}}_{xyz}.$$

Detailliert geschrieben:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1x}^2 & e_{1y}^2 & e_{1z}^2 & 2e_{1x}e_{1y} & 2e_{1y}e_{1z} & 2e_{1x}e_{2z} \\ e_{2x}^2 & e_{2y}^2 & e_{2z}^2 & 2e_{2x}e_{2y} & 2e_{2z}e_{2y} & 2e_{2x}e_{2z} \\ e_{3x}^2 & e_{3y}^2 & e_{3z}^2 & 2e_{3x}e_{3y} & 2e_{3y}e_{3z} & 2e_{3x}e_{3z} \\ e_{1x}e_{2x} & e_{1y}e_{2y} & e_{1z}e_{2z} & (e_{2x}e_{1y} + e_{1x}e_{2y}) & (e_{1z}e_{2y} + e_{1y}e_{2z}) & (e_{2x}e_{1z} + e_{1x}e_{2z}) \\ e_{2x}e_{3x} & e_{2y}e_{3y} & e_{2z}e_{3z} & (e_{3x}e_{2y} + e_{2x}e_{3y}) & (e_{2z}e_{3y} + e_{2y}e_{3z}) & (e_{3x}e_{2z} + e_{2x}e_{3z}) \\ e_{1x} & e_{1y}e_{3y} & e_{1z}e_{3z} & (e_{3x}e_{1y} + e_{1x}e_{3y}) & (e_{1z}e_{3y} + e_{1y}e_{3z}) & (e_{3x}e_{1z} + e_{1x}e_{3z}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}.$$

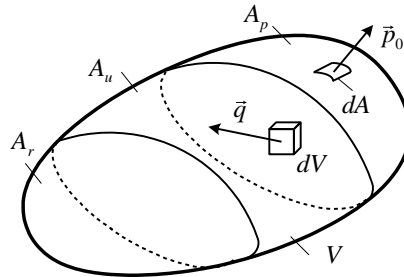
Verzerrungen infolge der Wärmedehnung:  $\underline{\underline{\varepsilon}}_T^e(X) = \underline{\underline{\alpha}}^e \Delta T(X)$ .

$\Delta T^e(X)$  - das bekannte Temperaturfeld am Element  $e$ .

Der Spaltenvektor der Wärmedehnungskoeffizienten:  $\underline{\underline{\alpha}}^e = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Im isotropen Fall gilt für die Wärmedehnungskoeffizienten:  $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z$ .

Die Berücksichtigung der elastischen Lagerung:

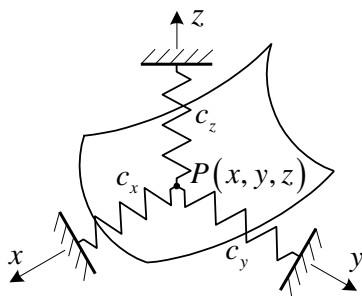


- auf der Oberfläche  $A_p$  ist die Flächenbelastung  $\vec{p}_0$  bekannt,
- auf der Oberfläche  $A_u$  ist die Verschiebung  $\vec{u}_0$  bekannt,
- auf der Oberfläche  $A_r$  modelliert man den Einfluss anderer elastischer Körper / Bauteile mit einer elastischen Lagerung.

Es wird angenommen, dass auf der Oberfläche  $A_r$  eine Flächenlast  $\vec{p}_r$  auftritt, die proportional zur Verschiebung der Punkte auf der Oberfläche ist:

$$\underbrace{\underline{\underline{p}}_r^e(X)}_{(3 \times 1)} = - \underbrace{\underline{\underline{R}}^e(X)}_{(3 \times 3)} \underbrace{\underline{\underline{u}}^e(X)}_{(3 \times 1)}.$$

Matrix der elastischen Bettung / der Federkoeffizienten:  $\underline{\underline{R}}^e(X) = \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & c_z \end{bmatrix}$ .



$c_x, c_y, c_z$  - Federkoeffizienten in den Richtungen  $x, y$  und  $z$ .

Die gesamte potentielle Energie des Elementes  $e$ :

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \int_{(V^e)} (\underline{\underline{\varepsilon}}^e)^T \underline{\underline{\sigma}}^e dV - \int_{(V^e)} (\underline{\underline{u}}^e)^T \underline{\underline{q}}^e dV - \int_{(A_p^e)} (\underline{\underline{u}}^e)^T \underline{\underline{p}}^e dA - \frac{1}{2} \int_{(A_r^e)} (\underline{\underline{u}}^e)^T \underline{\underline{p}}_r^e dA.$$

Die Bedeutung der einzelnen Glieder:

- $\frac{1}{2} \int_{(V^e)} (\underline{\underline{\varepsilon}}^e)^T \underline{\underline{\sigma}}^e dV$  die Formänderungsenergie,

- $\int_{(V^e)} (\underline{u}^e)^T \underline{q}^e dV$  die Arbeit der Volumenkräfte,
- $\int_{(A_p^e)} (\underline{u}^e)^T \underline{p}^e dA$  die Arbeit der Flächenkräfte,
- $\frac{1}{2} \int_{(A_r^e)} (\underline{u}^e)^T \underline{p}^e dA$  die Arbeit an der elastischen Lagerung / Bettung.

$V^e$  - das Volumen des Elementes  $e$ ,

$A_p^e$  - der Oberflächenanteil des Elementes  $e$ , auf den die Flächenbelastung wirkt,

$A_r^e$  - der Oberflächenanteil des Elementes  $e$  mit elastischer Bettung.

Die gesamte potentielle Energie in Abhängigkeit von den Knotenpunktverschiebungen / Knotenpunktparametern:

$$\begin{aligned} \Pi^e = & \frac{1}{2} (\underline{q}^e)^T \int_{(V^e)} \left[ \underline{B}^e(X) \right]^T \underline{C}^e(X) \underline{B}^e(X) dV \underline{q}^e - \frac{1}{2} (\underline{q}^e)^T \int_{(V^e)} \left[ \underline{B}^e(X) \right]^T \underline{C}^e(X) \underline{\varepsilon}_T^e(X) dV - \\ & - (\underline{q}^e)^T \int_{(V^e)} \left[ \underline{A}^e(X) \right]^T \underline{q}^e(X) dV - (\underline{q}^e)^T \int_{(A_p^e)} \left[ \underline{A}^e(X) \right]^T \underline{p}^e(X) dA + \\ & + \frac{1}{2} (\underline{q}^e)^T \int_{(A_r^e)} \left[ \underline{A}^e(X) \right]^T \underline{R}^e(X) \underline{A}^e(X) dA \underline{q}^e. \end{aligned}$$

Bezeichnungen:

Die Steifigkeitsmatrix des Elementes  $e$ :  $\underline{K}^e = \int_{(V^e)} \left[ \underline{B}^e(X) \right]^T \underline{C}^e(X) \underline{B}^e(X) dV$ .

Die Steifigkeitsmatrix ist symmetrisch.

$n$  ist der Freiheitsgrad des Elementes  $e$  (die Anzahl der Knotenpunktparameter / der Knotenpunktverschiebungs koordinaten des Elementes  $e$ ).

Die Zerlegung der Steifigkeitsmatrix in Blöcke:

Der Block ist ein bestimmter Teil der Matrix.

$$(\underline{q}^e)^T \underline{K}^e \underline{q}^e = \begin{bmatrix} (\underline{q}^e)^T_{=i} & (\underline{q}^e)^T_{=j} & (\underline{q}^e)^T_{=k} & \dots & (\underline{q}^e)^T_{=N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{K}^e_{=ii} & \underline{K}^e_{=ij} & \underline{K}^e_{=ik} & \dots & \underline{K}^e_{=iN} \\ \underline{K}^e_{=ji} & \underline{K}^e_{=jj} & \underline{K}^e_{=jk} & \dots & \underline{K}^e_{=jN} \\ \underline{K}^e_{=ki} & \underline{K}^e_{=kj} & \underline{K}^e_{=kk} & \dots & \underline{K}^e_{=kN} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \underline{K}^e_{=Ni} & \underline{K}^e_{=Nj} & \underline{K}^e_{=Nk} & \dots & \underline{K}^e_{=NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q}^e_{=i} \\ \underline{q}^e_{=j} \\ \underline{q}^e_{=k} \\ \cdot \\ \underline{q}^e_{=N} \end{bmatrix}.$$

$N$  ist die Anzahl der Knotenpunkte des Elementes.

Ein beliebiger (3x3) Block der Steifigkeitsmatrix:  $\underline{K}^e_{=ij} = \begin{bmatrix} \underline{K}^e_{xx} & \underline{K}^e_{xy} & \underline{K}^e_{xz} \\ \underline{K}^e_{yx} & \underline{K}^e_{yy} & \underline{K}^e_{yz} \\ \underline{K}^e_{zx} & \underline{K}^e_{zy} & \underline{K}^e_{zz} \end{bmatrix}_{ij}$ .

Der physikalische Inhalt der Elemente der Steifigkeitsmatrix:

Z.B.:  $K^e_{xij}$  bedeutet die Kraft in  $x$ -Richtung im Knotenpunkt  $i$ , die aus der Einheitsverschiebung in  $z$ -Richtung im Knotenpunkt  $j$  des Elementes  $e$  stammt.

Die Steifigkeitsmatrix aus der elastischen Bettung des Elementes:

$$\underline{\underline{K}}_r^e = \int_{(A_r^e)} \left[ \left[ \underline{\underline{A}}^e(X) \right]^T \underline{\underline{R}}^e(X) \underline{\underline{A}}^e(X) \right] dA.$$

$\underline{\underline{K}}_r^e$  ist ebenfalls symmetrisch.

In dieser Steifigkeitsmatrix erscheinen Blöcke bei den Knotenpunkten, die an der elastisch gebetteten Oberfläche des Elementes  $e$  liegen.

Der Vektor der Knotenlasten besteht aus drei Teilen:

- Knotenlasten aus den Volumenkräften:

$$\underline{\underline{f}}_{=q}^e = \int_{(V^e)} \left[ \underline{\underline{A}}^e(X) \right]^T \underline{\underline{q}}^e(X) dV, \quad \underline{\underline{q}}^e(X) \text{ - bekannte Volumenkraft.}$$

$(n \times 1)$      $(V^e)$      $(n \times 3)$      $(3 \times 1)$

- Knotenlasten aus der Temperaturänderung:

$$\underline{\underline{f}}_{=T}^e = \int_{(V^e)} \left[ \underline{\underline{B}}^e(X) \right]^T \underline{\underline{C}}^e(X) \underline{\underline{\epsilon}}_T^e(X) dV = \int_{(V^e)} \left[ \underline{\underline{B}}^e(X) \right]^T \underline{\underline{C}}^e(X) \underbrace{\underline{\underline{\alpha}}^e(X) \Delta T^e(X)}_{\underline{\underline{\epsilon}}_T^e(X)} dV.$$

Bekannte Größen:     $\underline{\underline{\alpha}}^e(X)$  Wärmedehnungskoeffizienten,  
 $\Delta T^e(X)$  Temperaturfeld,  
 $\underline{\underline{C}}^e(X)$  Materialkennwerte.

- Knotenlasten aus den Flächenkräften:

$$\underline{\underline{f}}_{=p}^e = \int_{(A_p^e)} \left[ \underline{\underline{A}}^e(X) \right]^T \underline{\underline{p}}_0^e(X) dA, \quad \underline{\underline{p}}_0^e(X) \text{ - bekannte Flächenkraft.}$$

Der Vektor der Knotenlasten des Elementes:     $\underline{\underline{f}}_{=}^e = \underline{\underline{f}}_{=q}^e + \underline{\underline{f}}_{=p}^e + \underline{\underline{f}}_{=T}^e.$

Der Knotenlastvektor kann ebenfalls in Blöcke zerlegt werden:

$$\left( \underline{\underline{q}}^e \right)^T \underline{\underline{f}}_{=}^e = \left[ \left( \underline{\underline{q}}_{=i}^e \right)^T \quad \left( \underline{\underline{q}}_{=j}^e \right)^T \quad \left( \underline{\underline{q}}_{=k}^e \right)^T \quad \cdots \quad \left( \underline{\underline{q}}_{=N}^e \right)^T \right] \begin{bmatrix} \underline{\underline{f}}_{=i}^e \\ \underline{\underline{f}}_{=j}^e \\ \vdots \\ \underline{\underline{f}}_{=N}^e \end{bmatrix}.$$

Ein beliebiger (3x1) Block des Knotenlastvektors:     $\underline{\underline{f}}_{=j}^e = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}_j.$

$f_{yj}^e$  bedeutet die Knotenkraft in y-Richtung in dem Knotenpunkt  $j$ , die aus den äußeren Kräften stammt.

Die gesamte potentielle Energie des Elementes:

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{q}}^e \right)^T \left[ \underline{\underline{K}}^e + \underline{\underline{K}}_r^e \right] \underline{\underline{q}}^e - \left( \underline{\underline{q}}^e \right)^T \left[ \underline{\underline{f}}_{=q}^e + \underline{\underline{f}}_{=p}^e + \underline{\underline{f}}_{=T}^e \right].$$

$(1 \times n)$      $(n \times n)$      $(n \times 1)$      $(1 \times n)$      $(n \times 1)$

Die gesamte potentielle Energie erhält man mittels Addition / Summation:     $\Pi = \sum_{e=1}^Q \Pi^e.$

$Q$  - die Anzahl der Elemente / der Teilbereiche.

Anwendung des Prinzips von Lagrange:     $\delta \Pi = \delta (\Pi^1 + \Pi^2 + \dots + \Pi^Q) = \delta \left( \sum_{e=1}^Q \Pi^e \right) = 0.$

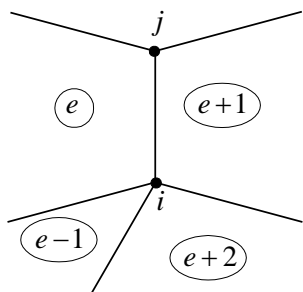
Das Lagrangesche Variationsprinzip ist nur für den ganzen Körper gültig:



$$\delta \Pi = 0, \text{ aber } \delta \Pi^e \neq 0!$$

Bei der Addition der Bestandteile der potentiellen Energie muss man berücksichtigen, dass die Verschiebungen der Kopplungs-Knotenpunkte gleich sind.

Unter der Berücksichtigung der obigen Aussage / Tatsache erhält man die gesamte potentielle Energie in folgender Form:

$$\Pi = \sum_{e=1}^Q \Pi^e = \frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{K} \underline{q} - \underline{q}^T \left( \underline{f}_{=q} + \underline{f}_{=p} + \underline{f}_{=T} \right).$$


$$\underline{q}_{=i}^{e-1} = \underline{q}_{=i}^e = \underline{q}_{=i}^{e+1} = \underline{q}_{=i}^{e+2},$$

$$\underline{q}_{=j}^e = \underline{q}_{=j}^{e+1} = \dots$$

Der Vektor der Knotenverschiebungen für den ganzen Körper / Bauteil:

$$\underline{q}^T = \left[ \underline{q}_{=1}^T \quad \underline{q}_{=2}^T \quad \dots \quad \underline{q}_{=i}^T \quad \dots \quad \underline{q}_{=M}^T \right],$$

daraus ein beliebiger Vektorblock:  $\underline{q}_{=i}^T = [u_i \quad v_i \quad w_i]$ .

$M$  ist die Anzahl der Knotenpunkte des Körpers, und  $3M$  die Anzahl der Freiheitsgrade des Körpers.

Die Steifigkeitsmatrix des ganzen Körpers:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \sum_{e \in 1,1} K_{=11}^e & \sum_{e \in 1,2} K_{=12}^e & \dots & \sum_{e \in 1,j} K_{=1j}^e & \dots & \sum_{e \in 1,M} K_{=1M}^e \\ \sum_{e \in 2,1} K_{=21}^e & \sum_{e \in 2,2} K_{=22}^e & \dots & \sum_{e \in 2,j} K_{=2j}^e & \dots & \sum_{e \in 2,M} K_{=2M}^e \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{e \in i,1} K_{=i1}^e & \sum_{e \in i,2} K_{=i2}^e & \dots & \sum_{e \in i,j} K_{=ij}^e & \dots & \sum_{e \in i,M} K_{=iM}^e \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{e \in M,1} K_{=M1}^e & \sum_{e \in M,2} K_{=M2}^e & \dots & \sum_{e \in M,j} K_{=Mj}^e & \dots & \sum_{e \in M,M} K_{=MM}^e \end{bmatrix}.$$

(3M × 3M)

Die Bedeutung des Blockes  $\sum_{e \in i,j} K_{=ij}^e$ :

Man muss alle Blöcke  $K_{=ij}^e$  des Elementes  $e$  für alle Elemente, die die Knotenpunkte  $i$  und  $j$  enthalten, aufsummieren

Der Knotenpunktbelastungsvektor des ganzen Körpers:

$$\underline{f} = \underline{f}_{=q} + \underline{f}_{=p} + \underline{f}_{=T} = \begin{bmatrix} \sum_{e \in 1} f_{=q1}^e \\ \sum_{e \in 2} f_{=q2}^e \\ \vdots \\ \sum_{e \in M} f_{=qM}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{e \in 1} f_{=p1}^e \\ \sum_{e \in 2} f_{=p2}^e \\ \vdots \\ \sum_{e \in M} f_{=pM}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{e \in 1} f_{=T1}^e \\ \sum_{e \in 2} f_{=T2}^e \\ \vdots \\ \sum_{e \in M} f_{=TM}^e \end{bmatrix}.$$

Die Bedeutung des Blockes  $\sum_{e \in i} f_{=i}^e$ :

Man muss alle Blöcke  $f_{=i}^e$  des Elementes  $e$  für alle Elemente, die den Knotenpunkt  $i$  enthalten, aufsummieren

Die Berücksichtigung der kinematischen Randbedingungen:

Es seien z.B.:  $\underline{q}_{=i} = \underline{0}$  und  $\underline{q}_{=j} = \underline{0}$ .

Die gesamte potentielle Energie des ganzen Körpers:

$$\Pi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{q}_{=1}^T & \dots & \underline{q}_{=i}^T & \underline{q}_{=j}^T & \dots & \underline{q}_{=M}^T \\ & & = \underline{0} & = \underline{0} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{K}_{=11} & \dots & \underline{K}_{=1i} & \underline{K}_{=1j} & \dots & \underline{K}_{=1M} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{K}_{=i1} & & \underline{K}_{=ii} & \underline{K}_{=ij} & & \underline{K}_{=iM} \\ \underline{K}_{=j1} & & \underline{K}_{=ji} & \underline{K}_{=jj} & & \underline{K}_{=jM} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{K}_{=M1} & & \underline{K}_{=Mi} & \underline{K}_{=Mj} & & \underline{K}_{=MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q}_{=1} \\ \vdots \\ \underline{q}_{=i} = \underline{0} \\ \underline{q}_{=j} = \underline{0} \\ \vdots \\ \underline{q}_{=M} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{q}_{=1}^T & \dots & \underline{q}_{=i}^T & \underline{q}_{=j}^T & \dots & \underline{q}_{=M}^T \\ & & = \underline{0} & = \underline{0} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{f}_{=1} \\ \vdots \\ \underline{f}_{=i} \\ \underline{f}_{=j} \\ \vdots \\ \underline{f}_{=M} \end{bmatrix}.$$

Die Konsequenzen:

- Multiplikation von der linken Seite mit  $\underline{q}_{=i}^T$ : die Blockzeilen  $i$  und  $j$  der Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}$  werden mit Null multipliziert – die Blockreihen  $i$  und  $j$  werden gestrichen / verschwinden.
- Multiplikation von der linken Seite mit  $\underline{q}_{=i}^T$ : die Blockzeile  $i$  des Belastungsvektors  $\underline{f}$  wird mit Null multipliziert – die Blockzeile  $i$  wird gestrichen / verschwinden.
- Multiplikation von der rechten Seite mit  $\underline{q}_{=i}$ : die Blockspalten  $i$  und  $j$  der Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}$  werden mit Null multipliziert – die Blockspalten  $i$  und  $j$  werden gestrichen.

Im weiteren werden die Blöcke  $\underline{q}_{=i}$  und  $\underline{q}_{=j}$  nicht mehr vorkommen.

Die übrigbleibenden Teile werden mit  $\underline{q}$ ,  $\underline{\tilde{K}}$ ,  $\underline{\tilde{f}}$  bezeichnet.  $\tilde{q} - q$  Schlange.

Wenn wir die den Randbedingungen entsprechenden Zeilen und Spalten gestrichen haben, dann lautet das Prinzip von Lagrange:

$$\delta \Pi = \delta \left[ \frac{1}{2} \underline{\tilde{q}}^T \underline{\tilde{K}} \underline{\tilde{q}} - \underline{\tilde{q}}^T \left( \underline{\tilde{f}}_{=q} + \underline{\tilde{f}}_{=p} + \underline{\tilde{f}}_{=T} \right) \right] = \left( \delta \underline{\tilde{q}}^T \right) \underline{\tilde{K}} \underline{\tilde{q}} - \left( \delta \underline{\tilde{q}}^T \right) \underbrace{\left( \underline{\tilde{f}}_{=q} + \underline{\tilde{f}}_{=p} + \underline{\tilde{f}}_{=T} \right)}_{\underline{\tilde{f}}} = 0.$$

$$\delta \Pi = \left( \delta \underline{\tilde{q}}^T \right) \left[ \underline{\tilde{K}} \underline{\tilde{q}} - \underline{\tilde{f}} \right] = 0.$$

Alle Koordinaten von  $\delta \underline{\tilde{q}}^T$  sind beliebig, weil der Vektor  $\delta \underline{\tilde{q}}$  die vorgeschriebenen Randbedingungen nicht mehr enthält.

Da der Vektor beliebig ist, muss der Ausdruck in eckigen Klammern verschwinden:

$$\underline{\tilde{K}} \underline{\tilde{q}} - \underline{\tilde{f}} = \underline{0}.$$

So erhält man für die Knotenverschiebungen ein inhomogenes lineares algebraisches Gleichungssystem:

$$\underline{\tilde{K}} \underline{\tilde{q}} = \underline{\tilde{f}}.$$

Typische Datenvorbereitungsfehler bei einer FE (Finite Elemente)- Berechnung:

- Die Materialkennwerte werden nicht eingegeben.
- Die kinematischen Randbedingungen werden nicht vorgeschrieben / berücksichtigt.

Bei beiden Fehlern wird die Steifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{K}}$  des Systems (Körpers) singulär.

Im singulären Fall gibt es für das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

*Die Behandlung einer kinematischen Belastung:*

Eine kinematische Belastung entsteht, wenn man keine Null-Verschiebungen in bestimmten Knotenpunkten vorschreibt:

Z.B.:  $q_{\underline{\underline{k}}}$  und  $q_{\underline{\underline{l}}}$  seien gegebene bekannte Werte.

Wenn die Konstruktion nur kinematisch belastet ist, dann gilt  $\tilde{f} = \underline{\underline{0}}$ .

Das *Lagrangesche* Variationsprinzip im Falle einer kinematischen Belastung:

$$\delta \Pi = (\delta \underline{\underline{q}})^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}} = \left[ \begin{matrix} (\delta q_{\underline{\underline{1}}})^T & (\delta q_{\underline{\underline{2}}})^T & \cdots & (\delta q_{\underline{\underline{k}}})^T & (\delta q_{\underline{\underline{l}}})^T & \cdots & (\delta q_{\underline{\underline{M}}})^T \end{matrix} \right] \underline{\underline{K}} \begin{bmatrix} q_{\underline{\underline{1}}} \\ q_{\underline{\underline{2}}} \\ \vdots \\ q_{\underline{\underline{k}}} \\ q_{\underline{\underline{l}}} \\ \vdots \\ q_{\underline{\underline{M}}} \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}.$$

$q_{\underline{\underline{k}}}$  und  $q_{\underline{\underline{l}}}$  sind gegeben, deshalb ist  $\delta q_{\underline{\underline{k}}} = \delta q_{\underline{\underline{l}}} = 0$ .

$\underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{ki}}}$  und  $\underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{li}}}$  der Steifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{K}}$  werden mit Null multipliziert, das heißt die Gleichungen werden gelöscht.

Die Blockspalten  $\underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{ki}}}$  und  $\underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{li}}}$  der Steifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{K}}$  werden mit den gegebenen Verschiebungen multipliziert und damit sind diese Werte bekannt; sie können dann auf die rechte Seite des Gleichungssystems umgeordnet werden.

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{11}}} & \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{12}}} & \cdots & \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{1M}}} \\ \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{21}}} & \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{22}}} & \cdots & \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{2M}}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{M1}}} & \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{M2}}} & \cdots & \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{MM}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{\underline{\underline{1}}} \\ q_{\underline{\underline{2}}} \\ \vdots \\ q_{\underline{\underline{M}}} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{1k}}} q_{\underline{\underline{k}}} + \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{1l}}} q_{\underline{\underline{l}}} \\ \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{2k}}} q_{\underline{\underline{k}}} + \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{2l}}} q_{\underline{\underline{l}}} \\ \vdots \\ \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{Mk}}} q_{\underline{\underline{k}}} + \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{Ml}}} q_{\underline{\underline{l}}} \end{bmatrix}}_{\text{bekannt}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Das zu lösende Gleichungssystem mit kinematischer Belastung:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{11}}} & \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{12}}} & \cdots & \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{1M}}} \\ \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{21}}} & \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{22}}} & \cdots & \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{2M}}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{M1}}} & \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{M2}}} & \cdots & \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{MM}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{\underline{\underline{1}}} \\ q_{\underline{\underline{2}}} \\ \vdots \\ q_{\underline{\underline{M}}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{1k}}} q_{\underline{\underline{k}}} - \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{1l}}} q_{\underline{\underline{l}}} \\ -\underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{2k}}} q_{\underline{\underline{k}}} - \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{2l}}} q_{\underline{\underline{l}}} \\ \vdots \\ -\underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{Mk}}} q_{\underline{\underline{k}}} - \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{Ml}}} q_{\underline{\underline{l}}} \end{bmatrix}}_{\text{kinematischer Knotenpunktsbelastungsvektor}}.$$