

4. 2D-Aufgaben der Elastizitätslehre

4.1. Definition der 2D-Aufgaben

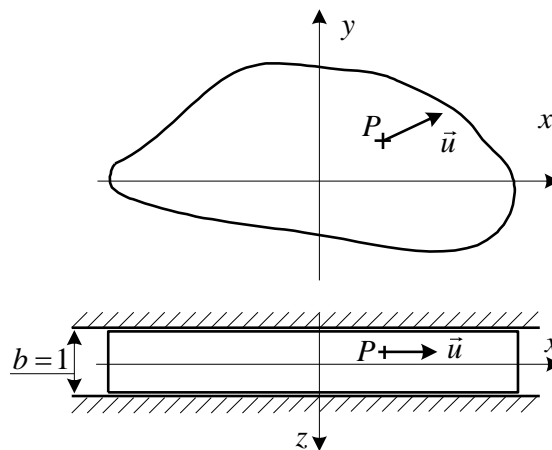
2D – zwei dimensional.

Die 2D-Aufgaben:

- Ebener Verzerrungszustand (EVZ).
- Verallgemeinerter ebener Spannungszustand (ESZ).
- Rotationssymmetrische / Axialsymmetrische Aufgabe (RSA/ASA).

4.1.1. Ebener Verzerrungszustand (EVZ)

Definition: Der Körper hat eine hervorgehobene Ebene. Die Formänderungen in den Ebenen, die zur hervorgehobenen Ebene parallel sind, sind identisch und auch der Abstand der Ebenen zueinander ändert sich nicht.



Hier ist die hervorgehobene Ebene die Ebene $z = 0$.

In den Ebenen $z = \text{konstant}$ gibt es die gleiche Formänderung und der Abstand zwischen den Ebenen ist konstant.

Die Formänderung des Körpers kann mit der Formänderung einer einzigen Ebene $z = \text{konstant}$ beschrieben werden.

Das Verschiebungsfeld:

$$\vec{u} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z, \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w \equiv 0.$$

Der Verzerrungszustand:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \equiv 0,$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} \equiv 0, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \equiv 0.$$

Der Verzerrungstensor:

$$[\underline{A}] = [\underline{A}(x, y)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Der Spannungszustand:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{1-2\nu} \nu \right), \quad \sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_y + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{1-2\nu} \nu \right),$$

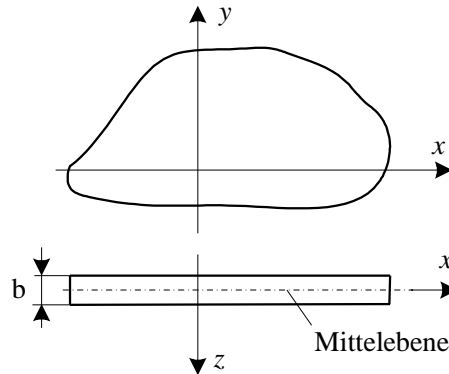
$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Die unabhängigen Kenngrößen: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

4.1.2. Verallgemeinerter ebener Spannungszustand (ESZ)

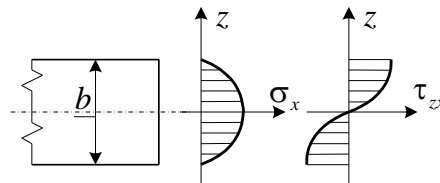
Bezeichnung: verallgemeinerter ebener Spannungszustand = Scheibenaufgabe = in eigener Ebene belastete Platte.

Scheibe: Ein Körper, bei dem eine Dimension wesentlich kleiner ist als die beiden anderen. Man kann eine Mittelebene definieren. Die resultierende Belastung / Kraft entlang der Dicke liegt in der Mittelebene.



Annahmen:

- $b \ll$ als die anderen Dimensionen der Körper.
- Die Mittelfläche $z = 0$ ist eine Ebene.
- Bei der äußeren Belastung gibt es keine Kräfte in z -Richtung.
- Die Resultierende der zur xy -Ebene parallelen Kräfte liegt in der xy -Ebene.
- Die Oberflächen $z = \pm \frac{b}{2}$ sind unbelastet $\Rightarrow \sigma_z \Big|_{z=\pm \frac{b}{2}} = 0$.
- Wenn die Dicke b klein ist, dann gilt $\sigma_z = 0$ nicht nur an den Oberflächen $z = \pm \frac{b}{2}$, sondern auch innerhalb des Körpers.



- $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ sind gerade Funktionen von z .
- τ_{zx}, τ_{zy} sind ungerade Funktionen von z .

Durchschnittsspannungen:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_x dz, \quad \bar{\sigma}_y = \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_y dz, \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{xy} dz, \quad \bar{\sigma}_x - \text{Sigma } x \text{ Quer.}$$

$$\bar{\sigma}_z = \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_z dz = 0, \quad \bar{\tau}_{zx} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{zx} dz = 0, \quad \bar{\tau}_{zy} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{zy} dz = 0.$$

Tensor der Durchschnittsspannungen: $[\underline{F}] = [\underline{F}(x, y)] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x & \bar{\tau}_{yx} & 0 \\ \bar{\tau}_{xy} & \bar{\sigma}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

Mechanisches Modell: Der Körper (die Scheibe) wird durch seine (ihre) Mittelebene ersetzt und die mechanischen Kenngrößen (die Durchschnittswerte) werden an die Mittelebene gebunden.

Stoffgesetz mit Durchschnittswerten: $\bar{\sigma}_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\bar{\varepsilon}_x + \nu\bar{\varepsilon}_y)$, $\bar{\sigma}_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\bar{\varepsilon}_y + \nu\bar{\varepsilon}_x)$,

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}, \quad \sigma_z = 0 \Rightarrow \bar{\varepsilon}_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_y),$$

$$\bar{\tau}_{xz} = 0 \Rightarrow \bar{\gamma}_{xz} = 0, \quad \bar{\tau}_{yz} = 0 \Rightarrow \bar{\gamma}_{yz} = 0.$$

Durchschnittsverzerrungen: $\bar{\varepsilon}_x = \frac{1}{b} \int_{(b)} \varepsilon_x dz$, $\bar{\varepsilon}_y = \frac{1}{b} \int_{(b)} \varepsilon_y dz$, $\bar{\gamma}_{xy} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \gamma_{xy} dz$.

Tensor der Durchschnittsverzerrungen: $[\underline{\underline{A}}] = [\underline{\underline{A}}(x, y)] = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_x & \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{yx} & 0 \\ \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{xy} & \bar{\varepsilon}_y & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varepsilon}_z \end{bmatrix}$.

Die kinematischen Gleichungen: $\bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$, $\bar{\varepsilon}_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$, $\bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$,

Durchschnittsverchiebungen: $\bar{u} = \frac{1}{b} \int_{(b)} u dz$, $\bar{v} = \frac{1}{b} \int_{(b)} v dz$, $\bar{w} = \frac{1}{b} \int_{(b)} w dz \equiv 0$,

$$\bar{\vec{u}}(x, y) = \bar{u}(x, y)\vec{e}_x + \bar{v}(x, y)\vec{e}_y.$$

4.1.3. Rotationssymmetrische / Axialsymmetrische Aufgaben (RSA / ASA)

Definition: Sowohl die Geometrie als auch die Belastung des Körpers sind axialsymmetrisch / rotationssymmetrisch.

Folge der Definition: - Weder die Geometrie, noch die Belastung des Körpers hängen von der φ -Koordinate ab.
 - Die Punkte des Körpers verschieben sich in der Meridianebene. Die Meridianebene ist die Rz -Ebene in Zylinderkoordinaten.

Die rotationssymmetrische Aufgabe wird im zylindrischen R, z, φ -Koordinatensystem formuliert.

Die Koordinaten des Verschiebungsfeldes: $u = u(R, z)$,

$$v = v(R, z),$$

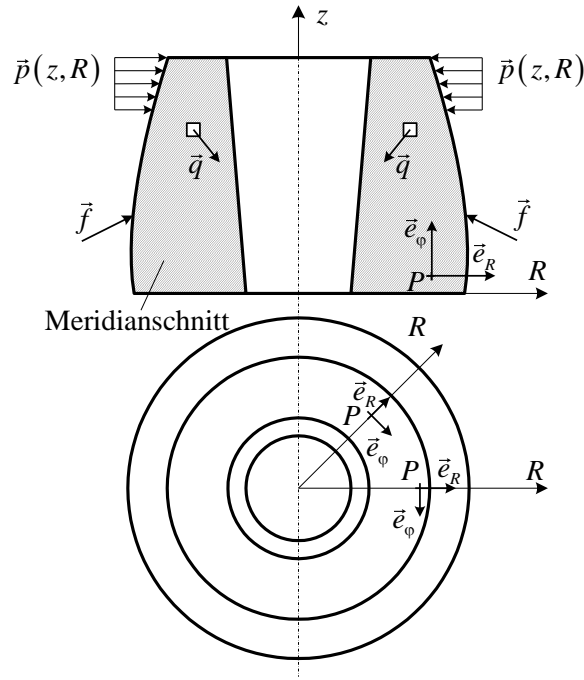
$$w \equiv 0.$$

Das Verschiebungsfeld: $\bar{\vec{u}}(R, z) = u(R, z)\vec{e}_R + v(R, z)\vec{e}_z$.

Jeder Punkt verschiebt sich in der eigenen Meridianebene.

Der Verzerrungszustand: $\varepsilon_R(R, z) = \frac{\partial u}{\partial R}$, $\varepsilon_z(R, z) = \frac{\partial v}{\partial z}$, $\gamma_{Rz}(R, z) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial R}$,

$$\varepsilon_\varphi = \frac{2(R+u)\pi - 2R\pi}{2R\pi} = \frac{u}{R}, \quad \gamma_{\varphi z} = \gamma_{R\varphi} = 0.$$



Der Verzerrungstensor: $\underline{\underline{A}}_{Rz\varphi} = \underline{\underline{A}}(R, z) = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & \frac{1}{2}\gamma_{Rz} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zR} & \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\varphi \end{bmatrix},$

Der Spannungszustand:

Das allgemeine Hookesche Gesetz: $\sigma_R(R, z) = 2G \left(\varepsilon_R + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right), \quad A_I = \varepsilon_R + \varepsilon_z + \varepsilon_\varphi,$
 $\sigma_z(R, z) = 2G \left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right),$
 $\sigma_\varphi(R, z) = 2G \left(\varepsilon_\varphi + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right),$
 $\tau_{Rz} = G\gamma_{Rz}, \quad \tau_{\varphi z} = \tau_{R\varphi} = 0.$

Der Spannungstensor: $\underline{\underline{F}}_{Rz\varphi} = \underline{\underline{F}}(R, z) = \begin{bmatrix} \sigma_R & \tau_{Rz} & 0 \\ \tau_{zR} & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varphi \end{bmatrix},$

Die unabhängigen Veränderlichen: $\varepsilon_R, \varepsilon_z, \varepsilon_\varphi, \gamma_{Rz}, \quad \sigma_R, \sigma_z, \sigma_\varphi, \tau_{Rz}.$

4.1.4. Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen den 2D-Aufgaben

a) Ähnlichkeiten:

- Alle mechanischen Kenngrößen hängen bei allen drei 2D-Aufgaben nur von zwei Ortskoordinaten ab.
- Es gibt bei allen drei 2D Aufgaben nur zwei unabhängige Verschiebungsfelder.

$\left. \begin{array}{l} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \bar{u} = \bar{u}(x, y) \\ \bar{v} = \bar{v}(x, y) \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} u = u(R, z) \\ v = v(R, z) \end{array} \right\}$
EVZ	ESZ	RSA

- Alle mechanischen Kenngrößen des Körpers können aus den zwei unabhängigen Verschiebungsfeldern abgeleitet werden.

b) *Unterschiede:*

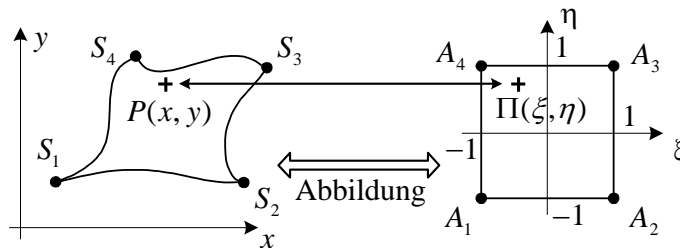
- Die Festigkeitszustände (Verzerrungen, Spannungen) sind aufgabenabhängig.
- Die Form des Materialgesetzes.

4.2. Die isoparametrische Näherung / Interpolation

Definition: Eine Näherung ist isoparametrisch, wenn sowohl die Formulierung - die Beschreibung der Geometrie des Elementes - als auch die Näherung des Verschiebungsfeldes mit denselben Funktionen erfolgt.

Die Beschreibung der Geometrie des Elementes / Isoparametrische Abbildung / Zuordnung

Ein krummlinig umrandeter Viereckbereich wird auf ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 2 abgebildet.



Zu jedem Punkt P wird wechselseitig eindeutig ein Punkt Π zugeordnet: $P \Leftrightarrow \Pi$.

Die Abbildung muss wechselseitig (hin und zurück) funktionieren.

Die Formulierung:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) \\ y &= y(\xi, \eta) \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^m h_i(\xi, \eta) x_i \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^m h_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned} \right\}.$$

m - die Anzahl der Punkte S_i ($i=1,2,\dots,m$), die die Grenzen des Rechteckbereiches angeben.

$x_i, y_i, (i=1,2,\dots,m)$ - die Ortskoordinaten der Punkte S_i .

$h_i(\xi, \eta)$ - Formfunktionen / Approximationsfunktionen / Ansatzfunktionen.

Die Bildung der Formfunktionen

Anforderung: die Zuordnung / Abbildung muss auch für die Punkte $S_i \leftrightarrow A_i$ gültig sein.

Deshalb haben die Formfunktionen die folgenden Eigenschaften: $h_i(\xi_j, \eta_j) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j, \\ 0, & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$

Die Wechselseitigkeit der Abbildung, der Ableitungen:

Folgende Funktionen sind bekannt: $\left\{ \begin{aligned} f(x, y) \\ x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{aligned} \right\},$

Es werden die partiellen Ableitungen von f nach ξ, η , beziehungsweise x, y benötigt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \right\}$$

In Matrizenform geschrieben:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{J(\xi, \eta)} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

die *Jacobische Matrix*

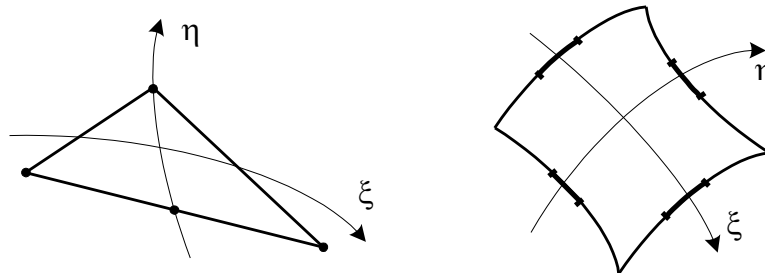
Die Abbildung ist wechselseitig eindeutig, wenn die *Jacobische-Matrix* invertierbar ist.

Voraussetzung der Invertierbarkeit ist: $\det |J(\xi, \eta)| \neq 0$.

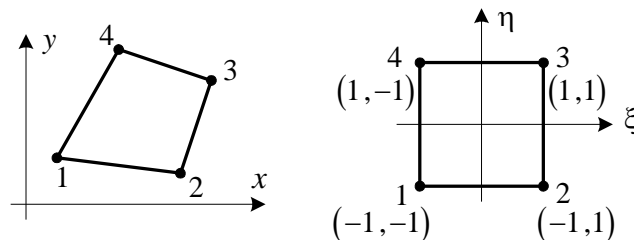
Die inverse *Jacobische-Matrix*: $J^{-1} = \frac{1}{\det |J(\xi, \eta)|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}$.

Das Element ist nicht degeneriert (die Abbildung ist wechselseitig eindeutig), wenn:

- die Form des Bereiches muss konvex sein (der gerade Fall im Bild ist noch erlaubt),
- die Punkte mit gerader Numerierung (in der Seitenmitte) müssen bei quadratischen Elementen in dem mittleren Drittel der Seiten liegen.



a) *Lineares Viereckelement*



Formfunktionen:

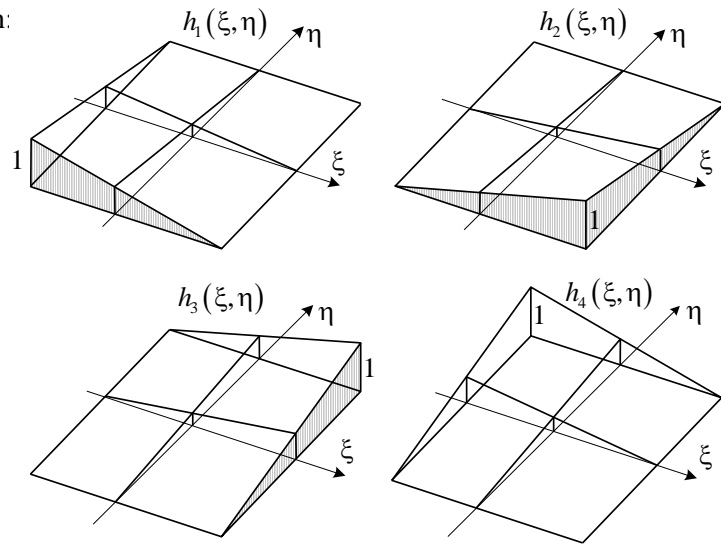
$$h_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad h_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta),$$

$$h_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad h_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta).$$

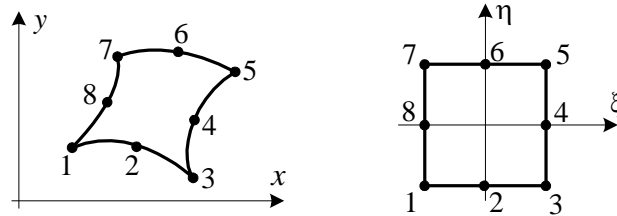
Bemerkung: Jede Formfunktion enthält auch ein quadratisches Glied.

Die Formfunktionen / die Flächen in ξ, η -Richtung bestehen aus geraden Linien.

Veranschaulichung der Formfunktionen:



b) *Krummlinig umrandetes Viereckelement:*

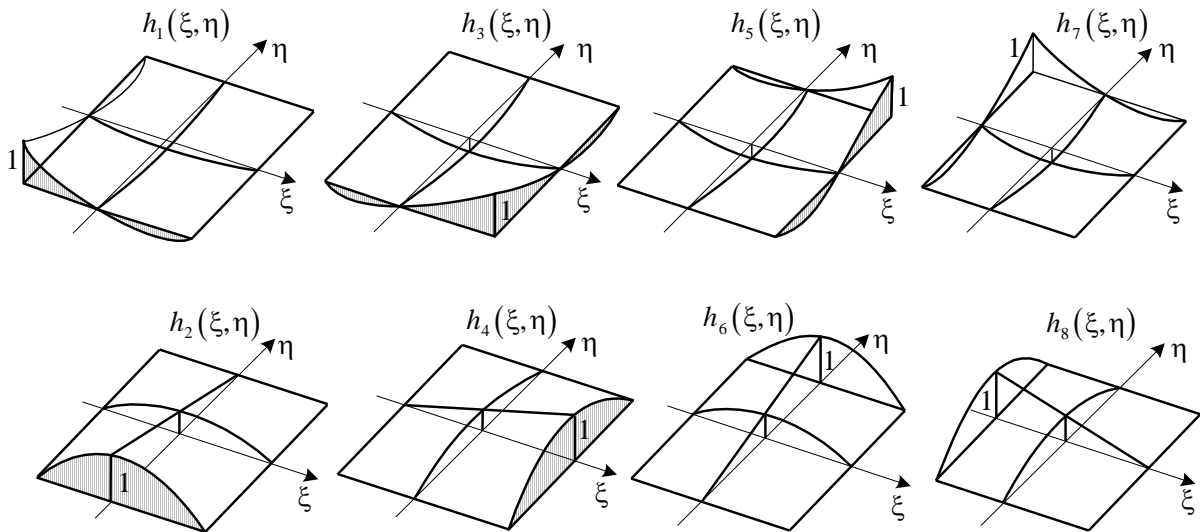


Die Formfunktionen:

$$\begin{aligned}
 h_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1), & h_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta), \\
 h_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1), & h_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2), \\
 h_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1), & h_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta), \\
 h_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1), & h_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2).
 \end{aligned}$$

Jede Formfunktion enthält auch Glieder dritten Grades.

Veranschaulichung der Formfunktionen:



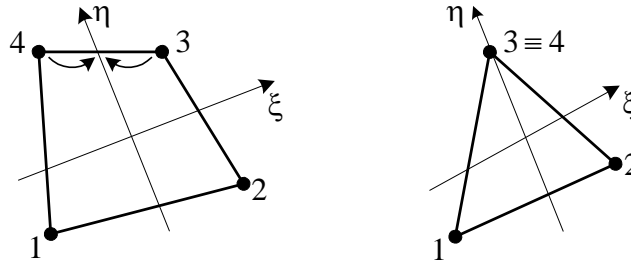
c) *Bildung von Dreieckelementen aus Viereckelementen mittels Degeneration*

Es kann vorkommen, dass man den zu untersuchenden Bereich / Körper mit Viereckelementen nicht ausreichend vernetzen kann. Es ist möglich, dass man zur besseren Anpassung Dreieckelemente benötigt.

Degeneration: Ausgehend von einem Viereckelement erstellt man ein Dreieckelement durch die Zusammenlegung von zwei Eckpunkten (durch die Schrumpfung einer Seite auf Null).

Folge: Man muss die Formfunktionen modifizieren.

- *Lineares Dreieckelement*



Die Abbildung (mit den Formfunktionen des linearen Viereckelementes):

$$x(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)x_1 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)x_2 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)x_3 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)x_4,$$

$$y(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)y_1 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)y_2 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)y_3 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)y_4.$$

Degeneration: $x_3 = x_4, \quad y_3 = y_4.$

$$x(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)x_1 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)x_2 + \frac{1}{2}(1+\eta)x_3,$$

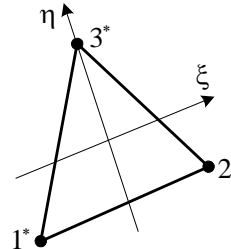
$$y(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)y_1 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)y_2 + \frac{1}{2}(1+\eta)y_3.$$

Die Formfunktionen des Dreieckelementes:

$$h_1^*(\xi, \eta) = h_1(\xi, \eta),$$

$$h_2^*(\xi, \eta) = h_2(\xi, \eta),$$

$$h_3^*(\xi, \eta) = h_3(\xi, \eta) + h_4(\xi, \eta).$$



- *Quadratisches Dreieckelement*

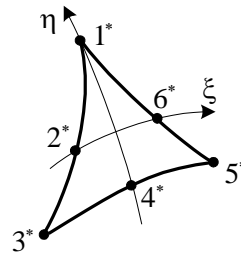
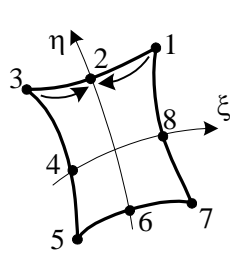
Die Formfunktionen des Viereckelementes:

$$h_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1), \quad i = 1, 3, 5, 7,$$

$$h_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)[1 - (\xi\eta_i)^2 - (\xi\xi_i)^2], \quad i = 2, 4, 6, 8.$$

Degeneration: $\left. \begin{array}{l} x_1 = x_2 = x_3 \\ y_1 = y_2 = y_3 \end{array} \right\}$

Veranschaulichung der Degeneration:



Die Formfunktionen des Dreieckelementes:

$$h_1^*(\xi, \eta) = h_1(\xi, \eta) + h_2(\xi, \eta) + h_3(\xi, \eta),$$

$$h_3^*(\xi, \eta) = h_5(\xi, \eta) + \Delta h(\xi, \eta),$$

$$h_5^*(\xi, \eta) = h_7(\xi, \eta) + \Delta h(\xi, \eta),$$

$$h_2^*(\xi, \eta) = h_4(\xi, \eta),$$

$$h_4^*(\xi, \eta) = h_6(\xi, \eta) - 2\Delta h(\xi, \eta),$$

$$h_6^*(\xi, \eta) = h_8(\xi, \eta),$$

Die Korrekturfunktion:
$$\Delta h(\xi, \eta) = \frac{1}{8}(1 - \xi^2)(1 - \eta^2).$$

Mit der Korrekturfunktion kann man die Isotropie der Verschiebungsfelder gewährleisten.

Isotropie der Verschiebungen: die Verschiebungsfelder im Element hängen nicht davon ab, wo wir mit der Numerierung der Knotenpunkte beginnen.

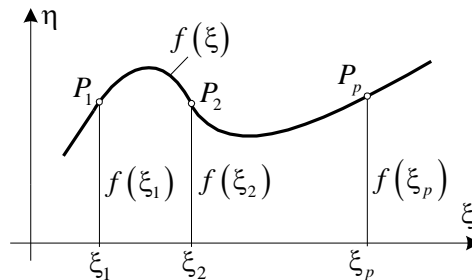
4.3. Interpolationsmethoden

Interpolation: Wir wollen eine Funktion bilden, die eine diskrete, gegebene Menge von Punkten und in diesen Punkten die Funktionswerte, oder zusätzlich in diesen Punkten die Ableitungen der diskreten Funktion enthält.

Mit der Interpolation kann man die Funktionswerte und die Ableitungen zwischen den gegebenen diskreten Punkten annähern.

4.3.1. Die Lagrangesche Interpolation

Bekannt: Die Funktionswerte einer Funktion $f(\xi)$ in den Punkten $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$.



Aufgabe: Bildung einer Funktion $\eta(\xi)$, die die gegebenen Punkte P_i ($i=1, 2, \dots, p$) enthält, und die Funktion $f(\xi)$ annähert.

$$\eta(\xi) \approx f(\xi).$$

Die Näherungsfunktion:
$$\eta(\xi) = \sum_{j=1}^p L_j(\xi) f(\xi_j).$$

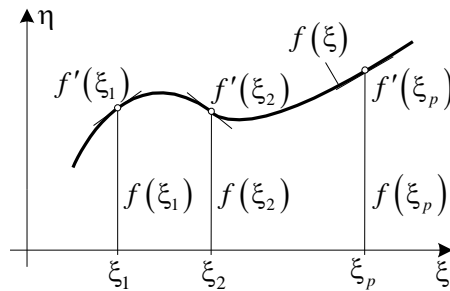
p ist die Anzahl der Punkte, an denen die Funktionswerte zur Verfügung stehen.

Die allgemeine Form der *Lagrangeschen* Interpolationspolynome:

$$L_j(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{j-1})(\xi - \xi_{j+1}) \dots (\xi - \xi_p)}{(\xi_j - \xi_1)(\xi_j - \xi_2) \dots (\xi_j - \xi_{j-1})(\xi_j - \xi_{j+1}) \dots (\xi_j - \xi_p)}.$$

4.3.2. Die Hermitesche Interpolation

Bekannt sind: Die Funktionswerte $f(\xi_1), f(\xi_2) \dots f(\xi_p)$ und die ersten Ableitungen $f'(\xi_1), f'(\xi_2), \dots, f'(\xi_p)$ in den gegebenen Punkten $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$.



Aufgabe: Die Bildung einer Funktion $\eta(\xi)$, die nicht nur die gegebenen Funktionswerte enthält, sondern auch die in diesen Punkten vorgeschriebenen Ableitungen.

Die Näherungsfunktion:
$$\eta(\xi) = \sum_{j=1}^p H_{0j}(\xi) f(\xi_j) + \sum_{j=1}^p H_{1j}(\xi) f'(\xi_j).$$

p – die Anzahl der Punkte, für welche die Funktionswerte $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_p)$ und die Ableitungswerte $f'(\xi_1), f'(\xi_2), \dots, f'(\xi_p)$ zur Verfügung stehen.

Die Hermiteschen Interpolationspolynome:
$$H_{0j}(\xi) = [1 - 2(\xi - \xi_j)L_j'(\xi_j)]L_j^2(\xi),$$

$$H_{1j}(\xi) = (\xi - \xi_j)L_j^2(\xi).$$

4.4. Vergleich der „traditionellen“ und der isoparametrischen finiten Elemente

Die Eigenschaften der „traditionellen“ finiten Elemente

- Die Elementgrenzen sind gerade Linien oder ebene Flächen.
- Zur Integration benutzt man ein an das Element gebundenes, lokales Koordinatensystem
- Das Verschiebungsfeld wird in dem lokalen KS mit einer Potenzreihe / mit einem Polynom angenähert. Die Koeffizienten der Reihe haben keine physikalische Bedeutung.
- Die Koeffizienten der Reihe werden durch die Knotenpunktparameter im lokalen Koordinatensystem ausgedrückt. Auf der Elementebene muss man ein lineares Gleichungssystem lösen.
- Die Steifigkeitsmatrix und der Knotenbelastungsvektor werden im lokalen Koordinatensystem gebildet. (Die Integration in geschlossener Form ist auch bei geraden / ebenen Seiten nicht einfach.)
- Zur Kopplung der Elemente müssen die Steifigkeitsmatrizen und die Knotenpunkt-Belastungsvektoren in ein globales Koordinatensystem transformiert werden.

Zielstellung:

- Wir wollen die Lösung eines Gleichungssystems auf der Elementebene vermeiden.
- Wir wollen auch die Koordinatentransformation vermeiden.
- Wir wollen die Integration vereinfachen.

Die Eigenschaften der isoparametrischen Elemente

- Die Elementgrenzen können auch gekrümmte Linien, oder gekrümmte Flächen sein.
- Die Beschreibung der Elementgeometrie erfolgt mit einer Abbildung. Dazu führen wir ein elementgebundenes „natürliches“ ξ, η -Koordinatensystem ein.
- Die Näherung der Verschiebungsfelder erfolgt elementweise in dem globalen x, y, z -Koordinatensystem.
- In den Ansatzfunktionen erscheinen die Knotenpunktparameter unmittelbar im globalen Koordinatensystem.
- Die Integration wird nach den natürlichen Koordinaten ξ, η, ζ für einen Quadratbereich durchgeführt.
- Die Integration wird numerisch vorgenommen.