1. Grundlagen der Elastizitätstheorie

1.1. Grundbegriffe

Festigkeitslehre: Die Kinematik, die Dynamik und das Materialverhalten von festen Körpern, die sich sowohl vor der Belastung als auch nach der Belastung im Ruhezustand befinden.

Kinematik in der Festigkeitslehre beschreibt die Verschiebungen der Punkte des zu untersuchenden Körpers sowie die Formänderungen des Körpers infolge der Belastung.

Dynamik in der Festigkeitslehre beschreibt die inneren Kräfte, die unter Belastung entstehen.

Materialverhalten in der Festigkeitslehre beschreibt den Zusammenhang zwischen den Formänderungsgrößen (Verzerrungsgrößen) und den inneren Kräften (Spannungen).

Körpermodell: Ein Körper, der die wichtigsten Eigenschaften des realen, zu untersuchenden Körpers in Hinblick auf das Untersuchungsziel widerspiegelt.

Belastung: Die gegebenen Kräfte (Kraftsystem). Bekannte Wirkung anderer Körper.

Ruhezustand: Es gibt keine Bewegung im makroskopischen Sinn.

Die Voraussetzungen für den Ruhezustand:

- Die äußeren Kräfte am Körper befinden sich im Gleichgewicht.
- Die Lagerung / die Abstützung des Körpers verhindert eine Starrkörperbewegung.

Die Bedingungen für das Gleichgewicht:

- Das Kraftsystem ergibt ein Momentfeld der Größe Null.
- $\vec{F} = \vec{0}$ - der resultierende Kraftvektor ist Null.
- $\vec{M}_A = \vec{0}$ - der auf den Punkt A berechnete Momentenvektor ist Null, wobei A ein beliebiger Punkt ist.

Starrkörper: Der Abstand / die Entfernung zwischen zwei beliebigen Punkten eines Körpers ändert sich nicht. Der Abstand zwischen den Punkten ändert sich auch unter Belastung nicht.

Festkörper: Der Körper ist verformbar. Die Entfernung / der Abstand zwischen Punkten des Körpers sowie der Winkel zwischen geraden Linien können sich unter Belastung ändern. Form und Größe / Dimension der Flächen und Volumina des Körpers können sich ändern.

Formänderung:

- Infolge der Belastung werden sich die Punkte des Körpers im Verhältnis zueinander verschieben und deshalb
- werden sich die materiellen geometrischen Formen des Körpers (Längen, Winkel, Flächen, Volumina) ändern.

Elastische Formänderung: Der Körper kehrt nach der Entlastung in seine ursprüngliche Form zurück. Der belastete, verzerrte Körper kehrt in seine ursprüngliche Form zurück, wenn er entlastet wird.

Linear-elastische Formänderung: Der Zusammenhang zwischen den Verzerrungen und den Spannungen ist linear.

Nichtlinear-elastische Formänderung: Der Zusammenhang zwischen den Verzerrungen und den Spannungen ist nichtlinear.

Plastische Formänderung: Der Körper kehrt nach der Entlastung nicht in seine ursprüngliche Form zurück.

Kleine Verschiebungen: Die Verschiebungen der Punkte des Körpers sind im Vergleich zu den charakteristischen Dimensionen des Körpers sehr klein.

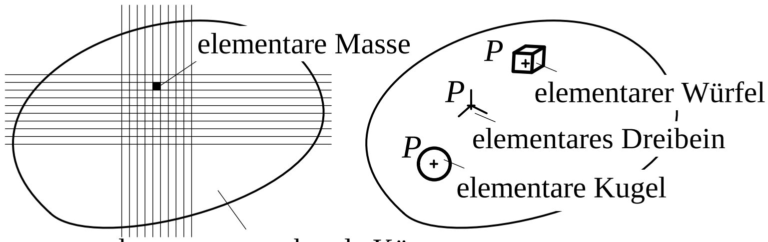
Kleine Verzerrungen: Die Verzerrungsgrößen des Körpers sind wesentlich kleiner als 1.

$$\varepsilon \ll 1, \quad \gamma \ll 1. \quad \left(\varepsilon, \gamma \approx 10^{-3} - 10^{-5}\right)$$

(epsilon ist wesentlich kleiner als eins, gamma ist ungefähr zehn hoch Minus drei bis zehn hoch Minus fünf)

Elementare Umgebung, elementare Masse:

Jeder Körper kann in ∞ (unendlich) viele Teile unterteilt werden. Einen so kleinen Teil betrachten wir als elementare Masse / Umgebung.



Die elementare Masse (Massenpunkt), die elementare Umgebung ist ein Teil des Körpers, dessen Dimension im Vergleich zu den charakteristischen Dimensionen des gesamten Körpers sehr klein ist.

Die Festigkeitszustände der elementaren Masse werden über Kenngrößen charakterisiert und sind an den Mittelpunkt *P* gebunden.

Die an den Mittelpunkt gebundenen Größen:
- Skalare Größen (z.B. Massendichte, Energie),
- Vektoren (z.B. Verschiebung, Verdrehung),
- Tensoren (z.B. Verzerrungen, Spannungen).

Festigkeitszustände des Massenpunktes:
- der Verschiebungszustand,
- der Verzerrungszustand,
- der Spannungszustand,
- der Energiezustand.

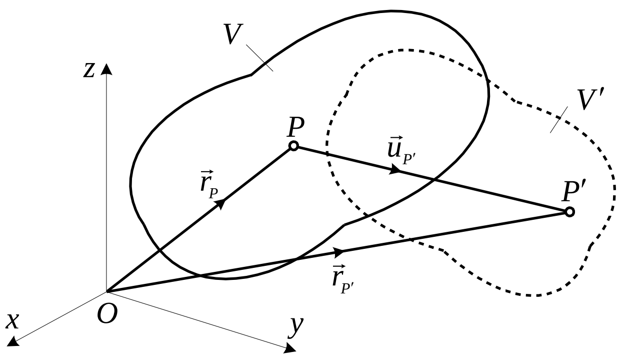
Festigkeitszustände des Körpers:
Die Gesamtheit / die Menge der Festigkeitszustände der Massenpunkte.
Die Festigkeitszustände des Körpers sind mittels Feldgrößen angegeben.

Feld / Feldgröße: wenn die Kenngrößen in Abhängigkeit von den Ortskoordinaten bekannt sind.

Es gibt folgende Feldgrößen:
- $\rho = \rho(x, y, z)$ - Massendichte – skalares Feld
- $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z)$ - Verschiebungsfeld – Vektorenfeld (Vektor u)
- $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(x, y, z)$ - Verzerrungsfeld – Tensorenfeld (*A* mit zwei Unterstrichen)

1.2. Festigkeitszustände

1.2.1. Der Verschiebungszustand



V – das Volumen des Körpers vor der Belastung,
V' - das Volumen des Körpers nach der Belastung,
P - die Lage des Punktes vor der Belastung,
P' - die Lage des Punktes nach der Belastung.

Der Verschiebungszustand des Massenpunktes: $\vec{u}_p = u_p\vec{e}_x + v_p\vec{e}_y + w_p\vec{e}_z$.

Der Verschiebungszustand des Körpers: $\vec{u}(\vec{r}) = u(\vec{r})\vec{e}_x + v(\vec{r})\vec{e}_y + w(\vec{r})\vec{e}_z$.

1.2.2. Der Verzerrungszustand

Das elementare Dreibein: Drei Richtungen, die mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ gegeben sind und vor der Belastung aufeinander senkrecht stehen.

Der Verzerrungszustand enthält die Änderung der Längen und der Winkel.

Formänderung: Im Punkt P ändern sich die Länge der Einheitsvektoren und die Winkel der ursprünglich senkrechten Einheitsvektoren.

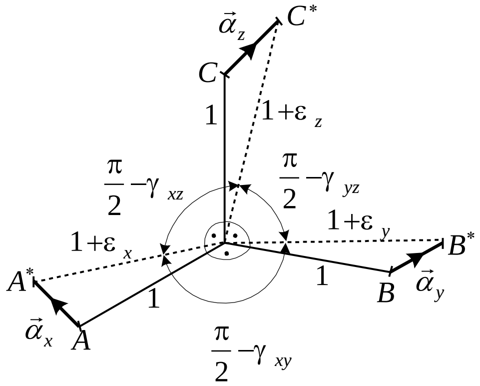
Veranschaulichung der Formänderung:

Die geänderten Längen:

$\overline{PA^*} = 1 + \varepsilon_x$, $\overline{PB^*} = 1 + \varepsilon_y$, $\overline{PC^*} = 1 + \varepsilon_z$.

Die geänderten Winkel:

$\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{yz}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xz}\right)$.



Aus der Definition der Winkeländerungen (Gleitungen) folgt: $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \gamma_{xz} = \gamma_{zx}$.

Verzerrungsgrößen:
- Dehnungen: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$,
- Gleitungen: $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$.

Maßeinheiten: $\varepsilon\left[mm/mm = 1\right]$ $\gamma\left[rad = 1\right]$

Vorzeichen: $\varepsilon > 0$ - Verlängerung, $\gamma > 0$ - der ursprünglich rechte Winkel verringert sich,
$\varepsilon < 0$ - Verkürzung. $\gamma < 0$ - der ursprünglich rechte Winkel vergrößert sich.

Kleine Verzerrungen: $\varepsilon \approx 10^{-3} - 10^{-5}$, $\gamma \approx 10^{-3} - 10^{-5}$.

Der Verzerrungstensor – Verzerrungszustand des Massenpunktes:

Der Verzerrungstensor charakterisiert eindeutig den Verzerrungszustand des Massenpunktes P.

$$\vec{\alpha}_n = \underline{\underline{A}}_p \cdot \vec{n}\,.$$

- Dyadische Darstellung: $\underline{\underline{A}}_p = \vec{\alpha}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\alpha}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\alpha}_z \circ \vec{e}_z$.

- Matrizendarstellung: $\left[\underline{\underline{A}}_P\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$ - symmetrischer Tensor.

Berechnung der Verzerrungsgrößen:

Gegeben sind im Punkt P: $|\vec{n}| = |\vec{m}| = 1$, $\vec{n} \cdot \vec{m} = 0$.

Die Dehnungen: $\varepsilon_n = \vec{n} \cdot \vec{\alpha}_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{A}}_P \cdot \vec{n}$.

Die Gleitungen: $\gamma_{nm} = \gamma_{mn} = \vec{n} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{m} = \vec{m} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{n}$.

Verzerrungszustand des Körpers: $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(\vec{r}) = \underline{\underline{A}}(x, y, z)$.

1.2.3. Der Spannungszustand

Der Spannungsvektor: an einer Schnittfläche entstehende innere Flächenkraftintensität.
Flächenkraftintensität $\equiv$ spezifische Flächenkraft.

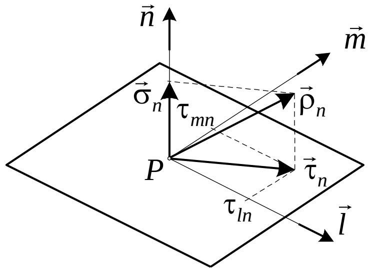
$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(\vec{r}, \vec{n}) = \vec{\rho}_n \qquad \left[\text{N/m}^2\text{=Pa, N/mm}^2\text{=MPa}\right].$$

Der Spannungsvektor in einem gegebenen Punkt P hängt von dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Schnittfläche ab.

$\vec{n}$ - der Normaleneinheitsvektor des Flächenelementes *dA*,

$\vec{l}, \vec{m}$ - Einheitsvektoren in der Ebene des Flächenelementes *dA*.

$|\vec{n}| = |\vec{m}| = |\vec{l}| = 1$, $\vec{n} \cdot \vec{m} = \vec{m} \cdot \vec{l} = \vec{n} \cdot \vec{l} = 0$.



Komponenten des Spannungsvektors:

-Normalspannungsvektor: $\vec{\sigma}_n = \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{\rho}_n)}_{\sigma_n} \vec{n}$,

- Schubspannungsvektor: $\vec{\tau}_n = \vec{\rho}_n - \sigma_n \vec{n} = (\vec{n} \times \vec{\rho}_n) \times \vec{n}$.

Koordinaten des Spannungsvektors:

- Normalspannung: $\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{\rho}_n \cdot \vec{n}$,
- Schubspannungen: $\tau_{mn} = \vec{m} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{m} \cdot \vec{\tau}_n$,

  $\tau_{ln} = \vec{l} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{l} \cdot \vec{\tau}_n$.

Der Spannungstensor:

Der Spannungstensor charakterisiert eindeutig den Spannungszustand des Massenpunktes *P*:

$$\vec{\rho}_n = \underline{\underline{F}}_P \cdot \vec{n}.$$

Dyadische Darstellung: $\underline{\underline{F}} = \vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z$.

Matrizendarstellung: $\left[\underline{\underline{F}}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$ - symmetrischer Tensor.

Berechnung der Spannungen:

Gegeben sind im Punkt *P*: $|\vec{n}| = |\vec{m}| = |\vec{l}| = 1$ $\quad \vec{n} \cdot \vec{m} = 0$, $\quad \vec{m} \cdot \vec{l} = 0$, $\quad \vec{n} \cdot \vec{l} = 0$.

Die Normalspannung: $\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}$,

Die Schubspannung: $\tau_{nm} = \tau_{mn} = \vec{m} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{\rho}_n \cdot \vec{m} = \vec{m} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{m}$.

Hauptspannungen, Hauptspannungsachsen (Hauptachsen)

Definition:

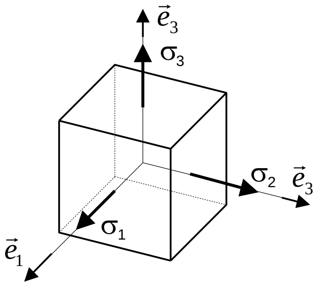
Wenn $\vec{\tau}_e = \vec{0}$, das heißt $\vec{\rho}_e = \sigma_e \vec{e}$ gültig ist, wobei der Einheitsvektor $\vec{e}$ zu der elementaren Fläche senkrecht ist, dann ist $\vec{e}$ eine Hauptrichtung / Hauptachse, σ_e eine Hauptspannung und die Ebene senkrecht zu $\vec{e}$ ist eine Hauptschnittebene.

Bemerkung:

- Es gibt in jedem Punkt P mindestens drei Hauptachsen, die zueinander senkrecht sind.
- Die Hauptspannung σ_e kann auch gleich Null sein: $\vec{\rho}_e = \vec{0}$.

Der Spannungszustand im Hauptachsen-Koordinatensystem (KS):

$$\underset{123}{\left[\underline{\underline{F}}_P\right]} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$



Vereinbarung: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Frage: Wie kann man die Hauptachsen und die Hauptspannungen finden?

Hauptachsenproblem = Eigenwertproblem

Für den Spannungszustand:

$\vec{\rho}_e = \sigma_e \vec{e}$,

$\underline{\underline{F}} \cdot \vec{e} = \sigma_e \underline{\underline{E}} \cdot \vec{e}$,

Für den Verzerrungszustand:

$\vec{\alpha}_e = \varepsilon_e \vec{e}$,

$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{e} = \varepsilon_e \underline{\underline{E}} \cdot \vec{e}$,

Einheitstensor: $\left[\underline{\underline{E}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Alle Glieder werden auf die linke Seite umgeordnet und danach wird der Vektor $\vec{e}$ ausgeklammert:

$\left(\underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{E}}\right) \cdot \vec{e} = \vec{0}$.

$\left(\underline{\underline{A}} - \varepsilon_e \underline{\underline{E}}\right) \cdot \vec{e} = \vec{0}$.

Das Hauptachsenproblem kann sowohl für den Spannungszustand als auch für den Verzerrungszustand in gleicher Weise formuliert werden.

Frage: Gibt es eine Richtung $\vec{e}$, die die obigen Gleichungen befriedigt:
Antwort: Es gibt mehrere, und zwar drei.

$\vec{e}$ - drei Richtungsvektoren der Hauptachsen,

σ_e - drei Hauptspannungen und

ε_e - drei Hauptdehnungen.

Oben haben wir ein homogenes, lineares algebraisches Gleichungssystem erhalten.

Die Unbekannten des Gleichungssystems sind die skalaren Koordinaten des Richtungsvektors $\vec{e}$: e_x, e_y, e_z.

Im Folgenden beschäftigen wir uns nur mit dem Spannungszustand:

Das zu lösende homogene lineare algebraische Gleichungssystem: $\left(\underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{E}}\right) \cdot \vec{e} = \vec{0}$

Ausführlich geschrieben:

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_e) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_e) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Bedingung für die nichttriviale Lösung: die Determinante der Koeffizienten-Matrix muss verschwinden:

$$\det \begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_e) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_e) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_e) \end{vmatrix} = 0.$$

Nach der Entwicklung der Determinante erhält man die charakteristische Gleichung:

$$\sigma_e^3 - F_I \sigma_e^2 + F_{II} \sigma_e - F_{III} = 0.$$

Es ist eine algebraische Gleichung dritten Grades für die Unbekannten σ_e.

Die Lösungen (die Wurzeln) der Gleichung sind die Hauptspannungen $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung sind die (erste, zweite und dritte) skalaren Invarianten des Spannungstensors:

$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$,

$$F_{II} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 ,$$

$$F_{III} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 .$$

Nach dem Einsetzen der Wurzeln $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ in das homogene lineare algebraische Gleichungssystem erhält man die Richtungsvektoren der Hauptrichtungen:

$$\sigma_1 \to \vec{e}_1, \qquad \sigma_2 \to \vec{e}_2, \qquad \sigma_3 \to \vec{e}_3$$

1.2.4. Formänderungsenergie

- Formänderungsenergiedichte: Formänderungsenergie in einer Volumeneinheit:

$$u(x,y,z) = \frac{1}{2} \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\rho}_x \cdot \vec{\alpha}_x + \vec{\rho}_y \cdot \vec{\alpha}_y + \vec{\rho}_z \cdot \vec{\alpha}_z\right),$$

$$u(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right).$$

- Formänderungsenergie eines Körpers: $U = \int\limits_{(V)} u(x,y,z)\,dV$

1.3. Grundgleichungen der Elastizitätslehre

Zustandsgrößen des elastischen Körpers:

- $\vec{u} = \vec{u}(x,y,z)$ - Verschiebungsfeld,
- $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(x,y,z)$ - Verzerrungsfeld,
- $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}(x,y,z)$ - Spannungsfeld,
- $u = u(x,y,z)$ - Formänderungsenergiefeld.

Formulierung der Aufgabe:

Gegeben sind: - die Form und die Dimensionen des Körpers,
- die Materialeigenschaften des Körpers,
- die Belastung und die Lagerung / die Abstützung des Körpers.

Wir müssen Gleichungen für die Zustandsgrößen aufschreiben!

1.3.1. Gleichgewichtsbedingungen

Die vektorielle Form: $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$, $\quad \vec{q}$ - die Dichte / Intensität der Volumenkräfte.

Die skalare Form in kartesischen Koordinaten:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 0,$$

$$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + q_y = 0,$$

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + q_z = 0.$$

1.3.2. Die kinematischen Gleichungen

Die tensorielle Form: $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}\left(\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}\right)$

Die skalare Form in kartesischen Koordinaten:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right).$$

1.3.3. Das Stoffgesetz für linear elastisches Material

a) *Das Hookesche Gesetz für isotropes Material*

Isotropie: die Materialeigenschaften sind richtungsunabhängig.

Die tensorielle Form: $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G}\left(\underline{\underline{F}} - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \underline{\underline{E}}\right)$, $\qquad \underline{\underline{F}} = 2G\left(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \underline{\underline{E}}\right)$.

Die skalaren Gleichungen für den ersten Zusammenhang:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2G}\left[\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)\right], \; \varepsilon_y = \frac{1}{2G}\left[\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)\right],$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2G}\left[\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)\right], \; \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}.$$

Umformung mit Hilfe des Zusammenhanges $2G = \frac{E}{1+\nu}$.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2G}\left[\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)\right] = \frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)\right] = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z .$$

In analoger Weise: $\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x + \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z,$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y + \frac{1}{E}\sigma_z.$$

In Matrizenform:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}.$$

Im isotropen Fall gibt es zwei unabhängige Materialkennwerte.

In kompakter Form geschrieben: $\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\sigma} = \underline{\underline{C}}^{-1}\underline{\sigma}$, $\qquad \underline{\sigma} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\varepsilon}$,

b) *Hookesches Gesetz für orthotropes Material*

Anisotropie: die Materialeigenschaften sind richtungsabhängig.

Orthotropie: der Spezialfall der Anisotropie, wenn die Materialeigenschaften mit den Materialkennwerten in Richtungen angegeben werden, die zueinander senkrecht sind.

Anwendungsgebiet: faserverstärkte Verbundwerkstoffe

Das orthotrope Materialgesetz in Matrizenform:

$$
\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{bmatrix}.
$$

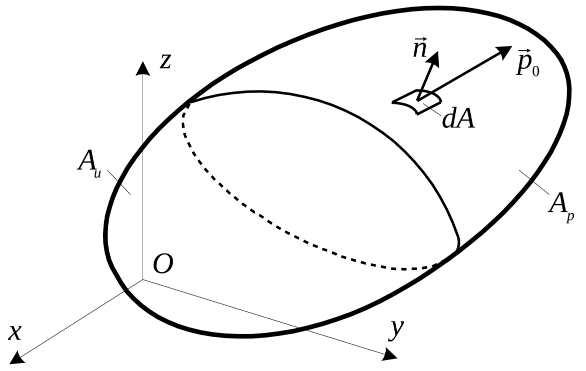
Die Richtungen 1,2,3 sind die Material-Hauptrichtungen des orthotropen Verbundwerkstoffes.
E_1, E_2, E_3 sind die Elastizitätsmodule in den Richtungen $1,2,3$;
G_{12}, G_{23}, G_{13} sind die Schubmodule,
$\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{32}, \nu_{13}, \nu_{31}$ sind die *Poissonschen* Koeffizienten.

Die Formänderungsenergie u ist immer eine positive skalare Größe.
Es gilt nur in dem Fall, wenn die Matrix der Materialkennwerte symmetrisch ist:

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}.$$

Die sechs *Poissonschen* Koeffizienten sind also nicht voneinander abhängig.
Es gibt nur neun unabhängige Materialkennwerte.
In kompakter Form geschrieben: $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}^{-1}\underline{\underline{\sigma}}$, $\quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{\varepsilon}}$,

1.3.4. Die Randbedingungen



Kinematische Randbedingungen: $\vec{u}\big|_{A_u} = \vec{u}_0$ an der Oberfläche A_u, wobei $\vec{u}_0$ - bekannte Verschiebungen,
A_u - der Oberflächenteil, auf dem die Verschiebungen vorgegeben sind.

Dynamische Randbedingungen: $\underline{\underline{F}}\big|_{A_p} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0$ an der Oberfläche A_p, wobei $\vec{p}_0$ - bekannte Flächenlast,
A_p - der Oberflächenteil, auf dem die Oberflächenbelastung vorgegeben ist.

1.3.5. Grundgleichungen der Elastizitätstheorie

Gleichgewichtsbedingungen: $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$ - 3 Differentialgleichungen.

Kinematische Gleichungen: $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}\left(\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}\right)$ - 6 Differentialgleichungen.

Stoffgesetz: $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{\sigma}}$ - 6 algebraische Gleichungen.

Randbedingungen: - kinematische: $\vec{u}\big|_{A_u} = \vec{u}_0$

- dynamische: $\underline{\underline{F}}\big|_{A_p} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0$

Unbekannte Feldgrößen:
- $\vec{u}(x, y, z)$,
- $\underline{\underline{A}}(x, y, z)$, insgesamt 15 Unbekannten.
- $\underline{\underline{F}}(x, y, z)$.

Existenz und Eindeutigkeit der Lösung:

Es ist zu beweisen, dass die Lösung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie bei gegebenen Randbedingungen existiert, und eindeutig ist.

Exakte Lösung: Die unbekannten Felder $\vec{u}, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{F}}$ befriedigen alle Gleichungen des Gleichungssystems und der Randbedingungen.

Näherungslösung: Die unbekannten Felder $\vec{u}, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{F}}$ erfüllen nicht alle Gleichungen des Gleichungssystems und der Randbedingungen.

Die Ermittlung einer exakten Lösung bei Ingenieur-Problemen ist im Allgemeinen (bei beliebig gegebenen Formen, Belastungen und Lagerungen) nicht möglich.

Bei Ingenieur-Problemen ermitteln wir deshalb meistens Näherungslösungen.

Näherungslösungen können mittels numerischer Methoden aufgebaut werden.