2. Energieprinzipien der Elastizitätstheorie

2.1. Kinematisch und statisch mögliche Felder

2.1.1. Das kinematisch mögliche Verschiebungsfeld

Kinematisch möglich $\equiv$ virtuell.

Bezeichnung: $\overset{*}{\vec{u}} = \overset{*}{\vec{u}}(\vec{r}) = \overset{*}{\vec{u}}(x, y, z)$ (Vektor *u* Stern).

Definition: Ein Verschiebungsfeld ist kinematisch möglich, wenn

- das Feld genügend oft differenzierbar ist (die kinematischen Gleichungen erfüllt): $\overset{*}{\underline{\underline{A}}} = \frac{1}{2}\left(\overset{*}{\vec{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \overset{*}{\vec{u}}\right)$ und
- das Feld auch die kinematischen Randbedingungen befriedigt: $\overset{*}{\vec{u}} = \vec{u}_0$ auf der Oberfläche A_u.

Aus einem kinematisch möglichen Verschiebungsfeld kann man auch ein kinematisch mögliches Spannungsfeld bestimmen: $\overset{*}{\underline{\underline{F}}} = 2G\left(\overset{*}{\underline{\underline{A}}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\overset{*}{A}_I\,\underline{\underline{E}}\right)$.

Das kinematisch mögliche Spannungsfeld befriedigt im Allgemeinen die Gleichgewichtsbedingungen und die dynamischen Randbedingungen nicht: $\overset{*}{\underline{\underline{F}}} \cdot \nabla + \vec{q} \neq \vec{0}$, $\left.\overset{*}{\underline{\underline{F}}}\right|_{A_p} \cdot \vec{n} \neq \vec{p}_0$.

2.1.2. Das statisch mögliche Spannungsfeld

Statisch möglich $\equiv$ die Spannungen befinden sich im Gleichgewicht.

Bezeichnung: $\overline{\underline{\underline{F}}} = \overline{\underline{\underline{F}}}(\vec{r}) = \overline{\underline{\underline{F}}}(x, y, z)$ (F Tensor Quer)

Definition: ein Spannungsfeld ist statisch möglich, wenn das Feld

- die Gleichgewichtsbedingungen $\overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$ erfüllt $\overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$ und
- die dynamischen Randbedingungen $\left.\overline{\underline{\underline{F}}}\right|_{A_p} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0$ auf der Oberfläche A_p befriedigt.

Aus einem statisch möglichen Spannungsfeld kann man auch ein statisch mögliches Verzerrungsfeld erstellen: $\overline{\underline{\underline{A}}} = \frac{1}{2G}\left(\overline{\underline{\underline{F}}} - \frac{\nu}{1+\nu}\overline{F}_I\,\underline{\underline{E}}\right)$.

Das statisch mögliche Verzerrungsfeld befriedigt im Allgemeinen die Kompatibilitätsbedingungen und die kinematischen Randbedingungen nicht: $\nabla \times \overline{\underline{\underline{A}}} \times \nabla \neq \underline{\underline{0}}$, $\overline{\vec{u}} \neq \vec{u}_0$.

Wenn $\overline{\underline{\underline{F}}}(x, y, z)$ sowohl die Kompatibilitätsbedingungen als auch die kinematischen Randbedingungen erfüllt werden, dann gilt $\overline{\underline{\underline{F}}}(x, y, z) = \underline{\underline{F}}(x, y, z)$.

2.2. Das Prinzip der virtuellen Arbeit

Nehmen wir die folgenden Felder an:

- ein kinematisch mögliches Verschiebungsfeld $\overset{*}{\vec{u}}(\vec{r})$,
- ein kinematisch mögliches Verzerrungsfeld $\overset{*}{\underline{\underline{A}}}(\vec{r})$,
- ein statisch mögliches Spannungsfeld $\overline{\underline{\underline{F}}}(\vec{r})$.

Die kinematisch und statisch möglichen Felder gehören nicht zu denselben elastischen Randwertaufgaben.

Die allgemeinste Form:

$$\underbrace{\int_{(V)} \left(\underline{\underline{F}} \cdot\cdot \overset{*}{\underline{\underline{A}}} \right) dV}_{\substack{\text{die virtuelle} \\ \text{Arbeit der} \\ \text{inneren Kräfte}}} = \underbrace{\int_{(V)} \overset{*}{\vec{u}} \cdot \vec{q} \, dV}_{\substack{\text{die virtuelle} \\ \text{Arbeit der} \\ \text{Volumenkräfte}}} + \underbrace{\int_{(A)} \overset{*}{\vec{u}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} \, dA}_{\substack{\text{die virtuelle} \\ \text{Arbeit der inneren} \\ \text{und äußeren} \\ \text{Oberfächenkräfte}}} .$$

Das Prinzip für dieselbe Randwertaufgabe:

$$\int_{(V)} \left(\underline{\underline{F}} \cdot\cdot \overset{*}{\underline{\underline{A}}} \right) dV = \int_{(V)} \overset{*}{\vec{u}} \cdot \vec{q} \, dV + \underbrace{\int_{(A_u)} \vec{u}_0 \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} \, dA}_{*} + \underbrace{\int_{(A_p)} \overset{*}{\vec{u}} \cdot \vec{p}_0 \, dA}_{**} .$$

* die Arbeit der inneren Kräfte aus den gegebenen Verschiebungen,
** die virtuelle Arbeit der bekannten Oberflächenkräfte.

2.3. Das Prinzip des Minimums der gesamten potentiellen Energie

Das Prinzip ist für konservative Kraftfelder gültig.

Das konservative Kraftfeld: Die Arbeit in diesem Kraftfeld hängt nicht vom Weg ab. Die Arbeit hängt nur vom Anfangs- und vom Endzustand ab.

Definition des Gesamtpotentials: $\Pi = U - W_k$.

U – die Verzerrungsenergie des Körpers, W_k - die Arbeit der äußeren Kräfte.

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}} dV}_{\substack{\text{die Formänderungs-} \\ \text{energie}}} - \underbrace{\int_{(V)} \vec{u} \cdot \vec{q} \, dV}_{\substack{\text{die Arbeit} \\ \text{der Volumenkräfte}}} - \underbrace{\int_{(A_p)} \vec{u} \cdot \vec{p}_0 \, dA}_{\substack{\text{die Arbeit} \\ \text{der Oberflächenkräfte}}} .$$

Beim Prinzip des Minimums der vollständigen potentiellen Energie ist das Verschiebungsfeld $\vec{u}(x, y, z)$ die primäre Unbekannte: $\Pi = \Pi(\vec{u})$.

Die Felder $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(x, y, z)$ und $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}(x, y, z)$ sind sekundäre Unbekannten.

Die kinematisch mögliche potentielle Energie:

$$\overset{*}{\Pi}\left(\overset{*}{\vec{u}} \right) = \frac{1}{2} \int_{(V)} \overset{*}{\underline{\underline{F}}} \cdot\cdot \overset{*}{\underline{\underline{A}}} dV - \int_{(V)} \overset{*}{\vec{u}} \cdot \vec{q} dV - \int_{(A_p)} \overset{*}{\vec{u}} \cdot \vec{p}_0 dA$$

wobei: $\overset{*}{\underline{\underline{A}}} = \frac{1}{2} \left(\overset{*}{\vec{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \overset{*}{\vec{u}} \right)$ und $\overset{*}{\underline{\underline{F}}} = 2G \left(\overset{*}{\underline{\underline{A}}} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \overset{*}{A}_I \underline{\underline{E}} \right)$.

Das Prinzip

Es ist zu beweisen, dass die vollständige (gesamte) potentielle Energie aus allen möglichen Verschiebungsfeldern für das reale Verschiebungsfeld einen Minimalwert ergibt.

$$\overset{*}{\Pi} - \Pi \geq 0 .$$

Exakte Lösung: Wenn wir den Minimalwert / das Minimumaus allen kinematisch möglichen Werten von $\overset{*}{\Pi}$ auswählen: $\overset{*}{\Pi}_{\min} = \Pi$.

Näherungslösung: Wenn wir nicht den Minimalwert / das Minimum aus allen kinematisch möglichen Werten von $\overset{*}{\Pi}$ auswählen: $\overset{*}{\Pi}_{\min} \neq \Pi$.

2.4. Das Variationsprinzip von Lagrange

Dieses Prinzip ist die Variationsformulierung des Prinzips des Minimums der gesamten potentiellen Energie.

Die gesamte potentielle Energie kann als ein Funktional betrachtet werden:

$$\Pi[\vec{u}] = U[\vec{u}] - \int_{(V)} \vec{u} \cdot \vec{q}\, dV - \int_{(A_p)} \vec{u} \cdot \vec{p}_0 dA \, .$$

Randbedingung: $\delta \vec{u}\big|_{A_u} = 0$, weil $\vec{u}$ auf der Oberfläche A_u gegeben ist.
Das Funktional (die gesamte potentielle Energie) stellt für das reale Verschiebungsfeld einen Extremwert dar.

Die notwendige Bedingung für den Extremwert: $\delta \Pi = 0$.

Der Extremwert ist nur dann ein Minimalwert / ein Minimum, wenn $\delta^2 \Pi \geq 0$ erfüllt ist.

Es ist zu beweisen, dass das Funktional Π die beiden obigen Bedingungen erfüllt.

Der physikalische Inhalt der Gleichung $\delta \Pi = 0$:

Das Prinzip des Minimums der gesamten potentiellen Energie, bzw. das Lagrangesche Variationsprinzip beinhaltet die folgenden Beziehungen:

- $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$ - die Gleichgewichtsbedingungen,
- $\underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0$ - die dynamischen Randbedingungen,
- $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}\, \underline{\underline{\varepsilon}}$ - das Stoffgesetz.

Die kinematischen Gleichungen und die kinematischen Randbedingungen werden beim Einsetzen eines kinematisch möglichen Verschiebungsfeldes befriedigt.

2.5. Die *Ritzsche* Methode

Ein Verfahren zur Bestimmung einer Näherungslösung mit Hilfe des Prinzips der gesamten potentiellen Energie.
Wir wählen eine Teilmenge aus allen kinematisch möglichen Verschiebungsfeldern aus:

$$\overset{*}{\vec{u}} = \overset{*}{\vec{u}}(c_1, c_2, \quad \ldots \quad, c_n) \, .$$

Die Teilmenge der Verschiebungsfelder hängt von einer endlichen Anzahl n unbekannter Parameter ab: $\overset{*}{\Pi} = \overset{*}{\Pi}(c_1, c_2, \quad \ldots \quad, c_n)$.

Diese Annahme bedeutet, dass wir nicht alle kinematisch möglichen Verschiebungsfelder, sondern nur eine bestimmte Anzahl n berücksichtigen.

Die Teilmenge $\overset{*}{\Pi}(c_1, c_2, \quad \ldots \quad, c_n)$ kann als eine Funktion der Parameter $c_1, c_2, \quad \ldots \quad, c_n$ betrachtet werden. Die beste Näherung erhält man aus der folgenden Bedingung:

$$\delta \overset{*}{\Pi} = \frac{\partial \overset{*}{\Pi}}{\partial c_1} \delta c_1 + \frac{\partial \overset{*}{\Pi}}{\partial c_2} \delta c_2 + \ldots + \frac{\partial \overset{*}{\Pi}}{\partial c_n} \delta c_n = 0 \, . \qquad *$$

Die Parameter $c_1, c_2, \quad \ldots \quad, c_n$ sind voneinander unabhängig und beliebig wählbar, deshalb gilt

$$\delta c_1 \neq 0, \qquad \delta c_2 \neq 0, \qquad \ldots \qquad \delta c_n \neq 0 \, .$$

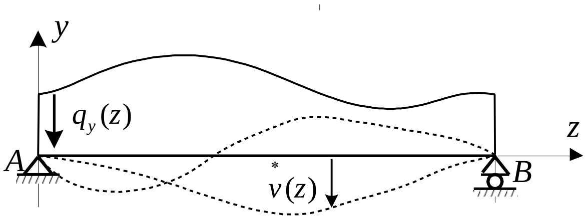
Die Bedingung * kann nur dann erfüllt werden, wenn

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \overset{*}{\Pi}}{\partial c_1} = 0,\\
&\frac{\partial \overset{*}{\Pi}}{\partial c_2} = 0,\\
&\quad\vdots\\
&\frac{\partial \overset{*}{\Pi}}{\partial c_n} = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Inhomogenes lineares algebraisches Gleichungssystem mit den Unbekannten $c_1, c_2, \ \ldots \ , c_n$.

Die Lösung des Gleichungssystems ist eine Näherungslösung der ursprünglichen Aufgabe.

2.6. Anwendung auf ebene Tragwerke



$\vec{q} = q_y \vec{e}_y$ - Linienlast in *y*-Richtung,

$\overset{*}{\vec{u}}(z) = \overset{*}{v}(z)\vec{e}_y$ - das kinematisch mögliche Durchbiegungsfeld – Verschiebungsfeld in *y*-Richtung,

$\overset{*}{\vec{\varphi}} = \overset{*}{\varphi}_x(z)\vec{e}_x = -\dfrac{d\overset{*}{v}(z)}{dz}\vec{e}_x$ - die kinematisch mögliche Verdrehung des Querschnittes,

$\overset{*}{\kappa} = \overset{*}{\kappa}(z) = -\dfrac{d^2\overset{*}{v}(z)}{dz^2}$ - die Krümmung der Mittellinie des Stabes.

Die Kenngrößen zur kinematisch möglichen spezifischen Formänderungsenergie:

$$\overset{*}{u} = \frac{1}{2}\overset{*}{\varepsilon}_z \overset{*}{\sigma}_z, \qquad \overset{*}{\sigma}_z = E\overset{*}{\varepsilon}_z, \qquad \overset{*}{\varepsilon}_z = \overset{*}{\kappa} y = -\frac{d^2\overset{*}{v}}{dz^2} y \ .$$

Die Formänderungsenergie des Biegestabes:

$$\overset{*}{U} = \int\limits_{(V)} \overset{*}{u}\, dV = \frac{1}{2}E\int\limits_{(l)}\int\limits_{(A)}\left(\frac{d^2\overset{*}{v}}{dz^2}\right)^2 y^2 dA dz = \frac{1}{2}E I_x \int\limits_{(l)}\left(\frac{d^2\overset{*}{v}}{dz^2}\right)^2 dz \ .$$

Die Arbeit der äußeren Kräfte:

$$W_k = \int\limits_{(l)} \overset{*}{v}(z) q_y(z) dz \ + \ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \overset{*}{v}_i F_{yi} + \sum_{j=1}^{m} \overset{*}{\varphi}_j M_{xj}}_{\text{die Arbeit der Einzelkräfte und der Einzelmomente}} \ .$$

Die kinematisch mögliche potentielle Energie eines Biegestabes:

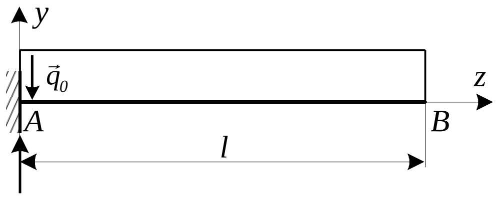
$$\overset{*}{\Pi} = \frac{1}{2}E I_x \int\limits_{(l)}\left(\frac{d^2\overset{*}{v}}{dz^2}\right)^2 dz - \int\limits_{(l)} \overset{*}{v} q_y dz - \sum_{i=1}^{n} \overset{*}{v}_i F_{yi} - \sum_{j=1}^{m} \overset{*}{\varphi}_j M_{xj} \ .$$

__*Beispiel zur Anwendung der Ritzschen Methode*__: ein eingespannter Balken.

Gegeben: q_0, l, E, I_x.

Aufgabe:

Die Bestimmung des Verschiebungsfeldes $v(z)$:
a) Die exakte Lösung der Differentialgleichung.
b) Die Näherungslösung mit dem *Ritzschen* Verfahren.

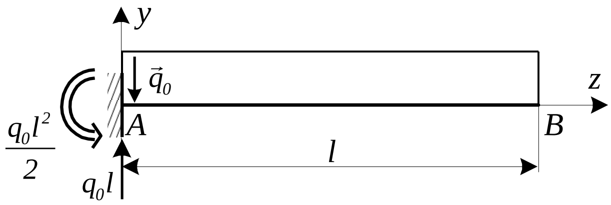


Bearbeitung:

a) Die Bestimmung der exakten Lösung der Differentialgleichung:

Die Differentialgleichung des Biegestabes: $$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{M_{hx}(z)}{I_x E}$$

Die Bestimmung des Biegemomentenfeldes M_{hx}:



$$T_y(z) = T_{y0} + \int q_y(z)\,dz,$$
$$T_y(z) = q_0 l - q_0 z.$$

Biegemomentenverteilung: $M_{hx} = M_{hx0} - \int T_y(z)\,dz$.

$$M_{hx} = \frac{q_0 l^2}{2} - q_0 \int (l - z)\,dz = \frac{q_0 l^2}{2} - q_0 l z + q_0 \frac{z^2}{2}.$$

Die Differentialgleichung: $$\frac{d^2 v(z)}{dz^2} = -\frac{M_{hx}(z)}{I_x E} = -\frac{1}{I_x E}\left[\frac{q_0 l^2}{2} - q_0 l z + \frac{q_0}{2} z^2\right].$$

Integration $\Rightarrow$ Verdrehungsfeld:

$$\varphi_x(z) = -\frac{dv}{dz} = \int_{(l)} \frac{M_{hx}}{I_x E} dz + c_1 = \frac{1}{I_x E}\left[\frac{q_0 l^2}{2} z - \frac{q_0 l}{2} z^2 + \frac{q_0}{6} z^3\right] + c_1.$$

Randbedingung für die Verdrehung: $\varphi_x(z=0) = 0$,

$$\frac{1}{I_x E}[0 + 0 + 0] + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0.$$

Integration $\Rightarrow$ Verschiebungsfeld:

$$v(z) = -\int \varphi_x(z)\,dz + c_2 = -\int\left(\int \frac{M_{hx}}{I_x E} dz\right) dz + \underbrace{c_1}_{=0} z + c_2 = -\frac{1}{I_x E}\left[\frac{q_0 l^2}{2}\frac{z^2}{2} - \frac{q_0 l}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{q_0}{6}\frac{z^4}{4}\right] + c_2.$$

Randbedingung für die Verschiebung: $v(z=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$.

Die exakte Lösung: $$v(z) = -\frac{1}{I_x E}\left[\frac{q_0 l^2}{4} z^2 - \frac{q_0 l}{6} z^3 + \frac{q_0}{24} z^4\right].$$

b) Die Bestimmung einer Näherungslösung mit dem *Ritzschen* Verfahren:

Das kinematisch mögliche Verschiebungsfeld sei ein Polynom:

$$\overset{*}{v}(z) = \sum_{i=0}^{n} c_i z^i = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \ldots + c_n z^n.$$

Randbedingungen: $\overset{*}{v}(z=0)=0 \quad \Rightarrow \quad c_0=0,$

$$\overset{*}{\varphi}(z=0)=0 \quad \Rightarrow \quad c_1=0.$$

- Näherung mit einem Polynom zweiten Grades:

$$\overset{*}{v}_2(z)=c_2z^2\,, \qquad \overset{*}{\varphi}_{2x}(z)=2c_2z\,, \qquad \frac{d^2\overset{*}{v}_2(z)}{dz^2}=2c_2\,.$$

Die kinematisch mögliche gesamte potentielle Energie:

$$\overset{*}{\Pi}_2=\frac{1}{2}I_xE\int\limits_{(l)}\left(\frac{d^2\overset{*}{v}_2(z)}{dz^2}\right)^2dz-\int\limits_{(l)}(-q_0)\overset{*}{v}_2(z)dz=\frac{1}{2}I_xE\left(4c_2^2l\right)+q_0c_2\frac{l^3}{3}\,.$$

Die Bedingung für das Minimum: $\dfrac{\partial\overset{*}{\Pi}_2}{\partial c_2}=0=4I_xEc_2l+q_0\dfrac{l^3}{3} \qquad \Rightarrow \qquad c_2=-\dfrac{q_0l^2}{12I_xE}\,.$

Die Näherungslösung für das Polynom zweiten Grades: $v_2(z)=-\dfrac{q_0l^2}{12I_xE}z^2\,.$

- Näherung mit einem Polynom dritten Grades:

$$\overset{*}{v}(z)=c_2z^2+c_3z^3, \quad \overset{*}{v}_3'(z)=2c_2z+3c_3z^2, \quad \overset{*}{v}_3''(z)=2c_2+6c_3z\,.$$

Die kinematisch mögliche gesamte potentielle Energie:

$$\overset{*}{\Pi}_3=\frac{1}{2}I_xE\int\limits_{(l)}\left(\frac{d^2\overset{*}{v}_3(z)}{dz^2}\right)^2dz-\int\limits_{(l)}(-q_0)\overset{*}{v}_3(z)dz=2I_xE\int\limits_{(l)}\left(c_2+3c_3z\right)^2dz+q_0\int\limits_{(l)}\left(c_2z^2+c_3z^3\right)dz=$$

$$=2I_xE\int\limits_{(l)}\left(c_2^2+6c_2c_3z+9c_3^2z^2\right)dz+q_0\left(c_2\frac{l^3}{3}+c_3\frac{l^4}{4}\right)=2I_xE\left(c_2^2l+3c_2c_3l^2+3c_3l^3\right)+q_0\left(c_2\frac{l^3}{3}+c_3\frac{l^4}{4}\right).$$

Die Bedingungen für den Minimalwert / das Minimum:

$$\frac{\partial\overset{*}{\Pi}_3}{\partial c_2}=0=I_xE\left(4lc_2+6l^2c_3\right)+q_0\frac{l^3}{3},$$

$$\frac{\partial\overset{*}{\Pi}_3}{\partial c_3}=0=I_xE\left(6l^2c_2+12l^3c_3\right)+q_0\frac{l^4}{4}\,.$$

Das zu lösende lineare algebraische Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned}2lc_2+3l^2c_3&=-\frac{q_0l^3}{6I_xE}\,,\\ 3l^2c_2+6l^3c_3&=-\frac{q_0l^4}{8I_xE}\,.\end{aligned}\right\}$$

Die Lösung des Gleichungssystems: $c_2=-\dfrac{5q_0l^2}{24I_xE}, \qquad c_3=\dfrac{q_0l}{12I_xE}\,.$

Die Näherungslösung für das Polynom dritten Grades: $v_3(z)=-\dfrac{5q_0l^2}{24I_xE}z^2+\dfrac{q_0l}{12I_xE}z^3\,.$

- Näherung mit einem Polynom vierten Grades:

$$\overset{*}{v}_4(z)=c_2z^2+c_3z^3+c_4z^4, \quad \overset{*}{v}_4'(z)=2c_2z^2+3c_3z^3+4c_4z^4, \quad \overset{*}{v}_4''(z)=2c_2z^2+6c_3z^3+12c_4z^4\,.$$

Die kinematisch mögliche gesamte potentielle Energie: $\overset{*}{\Pi}_4 = \frac{1}{2} I_x E \int\limits_{(l)} \left(\frac{d^2 \overset{*}{v}_4}{dz^2} \right)^2 dz - \int\limits_{(l)} (-q_0) \overset{*}{v}_4 (z) dz$.

Das Integral des ersten Gliedes:

$$\int\limits_{(l)} \left(\frac{d^2 \overset{*}{v}_4}{dz^2} \right)^2 dz = 4c_2 l + 12c_3^2 l^2 + \frac{144}{5} c_4^2 l^5 + 12 c_2 c_3 l^2 + \frac{48}{3} c_2 c_4 + \frac{144}{4} c_3 c_4 l^4 .$$

Das Integral des zweiten Gliedes: $q_0 \int\limits_{(l)} \overset{*}{v}_4 dz = q_0 \left(c_2 \frac{l^3}{3} + c_3 \frac{l^4}{4} + c_4 \frac{l^5}{5} \right)$.

Die Bedingungen für den Minimalwert / das Minimum:

$$\frac{\partial \overset{*}{\Pi}_4}{\partial c_2} = 0 = I_x E \left(8 l c_2 + 12 l^2 c_3 + 16 l^3 c_4 \right) + q_0 \frac{l^3}{3},$$

$$\frac{\partial \overset{*}{\Pi}_4}{\partial c_3} = 0 = I_x E \left(24 l^3 c_3 + 12 l^2 c_2 + 36 l^4 c_4 \right) + q_0 \frac{l^4}{4},$$

$$\frac{\partial \overset{*}{\Pi}_4}{\partial c_4} = 0 = I_x E \left(\frac{288}{5} l^5 c_4 + 16 l^3 c_2 + 36 l^4 c_3 \right) + q_0 \frac{l^5}{5}.$$

Das zu lösende lineare algebraische Gleichungssystems:

$$\left. \begin{aligned} 8 l c_2 + 12 l^2 c_3 + 16 l^3 c_4 &= -\frac{2 q_0 l^3}{3 I_x E}, \\ 12 l^2 c_2 + 24 l^3 c_3 + 36 l^4 c_4 &= -\frac{2 q_0 l^4}{4 I_x E}, \\ 16 l^3 c_2 + 36 l^4 c_3 + \frac{288}{5} l^5 c_4 &= -\frac{2 q_0 l^5}{5 I_x E}. \end{aligned} \right\}$$

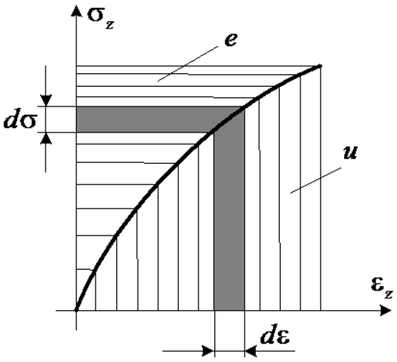
Die Lösung des Gleichungssystems: $c_2 = -\frac{q_0 l^2}{4 I_x E}, \quad c_3 = -\frac{q_0 l}{6 I_x E}, \quad c_4 = -\frac{q_0}{24 I_x E}$.

Die Näherungslösung für das Polynom vierten Grades: $v_4(z) = \frac{q_0}{I_x E} \left(-\frac{l^2}{4} z^2 + \frac{l}{6} z^3 - \frac{1}{24} z^4 \right)$

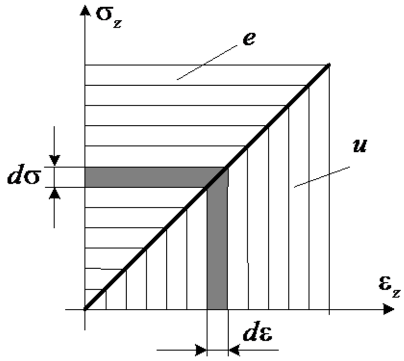
Damit haben wir die exakte Lösung erhalten.

2.7. Das Prinzip des Minimums der gesamten komplementären Energie

Die spezifische komplementäre Formänderungsenergie: $e = e(\underline{\underline{F}}) = \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}} - u(\underline{\underline{A}})$.



nichtlinearer Fall
$e \neq u$



linearer Fall
$e = u$

Die komplementäre Formänderungsenergie: $E = \int_{(V)} e\, dV = \int_{(V)} \left(\underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}} - u \right) dV$.

Die gesamte komplementäre Formänderungsenergie: $K = K\left(\underline{\underline{F}}\right) = E - \int_{(A_u)} \vec{u}_0 \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}\, dA$.

In der gesamten komplementären Formänderungsenergie betrachten wir die Koordinaten des Spannungstensors $\underline{\underline{F}}$ als primären Unbekannten.

Die statisch mögliche gesamte komplementäre Energie: $\overline{K} = \overline{K}\left(\overline{\underline{\underline{F}}}\right) = \overline{E} - \int_{(A_u)} \vec{u}_0 \cdot \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \vec{n}\, dA$.

Das Prinzip:

Es ist zu beweisen, dass die gesamte komplementäre Energie aus allen statisch möglichen Spannungsfeldern für das reale Spannungsfeld einen Minimalwert / ein Minimum ergibt.

$$\overline{K} - K \geq 0 .$$

Exakte Lösung: Wenn wir den Minimalwert / das Minimum aus allen statisch möglichen Werten von $\overline{K}$ auswählen: $\overline{K}_{\min} = K$

Näherungslösung: Wenn wir nicht den Minimalwert / das Minimum aus allen statisch möglichen Werten von $\overline{K}$ auswählen: $\overline{K}_{\min} \neq K$

2.8. Das Variationsprinzip von *Castigliano*

Dieses Prinzip ist die Variationsformulierung des Prinzips des Minimums der gesamten komplementären Energie.
Die gesamte komplementäre Energie kann als ein Funktional betrachtet werden:

$$K\left[\underline{\underline{F}}\right] = E\left[\underline{\underline{F}}\right] - \int_{(Au)} \vec{u}_0 \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}\, dA .$$

Die Variation des Spannungsfeldes: $\overline{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{F}} + \delta \underline{\underline{F}}$.

Statisch möglich:

$$\overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \delta \underline{\underline{F}} \cdot \nabla = \vec{0}.$$

$$\overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0 \quad \Rightarrow \quad \delta \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{0}.$$

Das Prinzip:

Das Funktional (die gesamte komplementäre Energie) stellt für das reale Spannungsfeld einen Extremwert dar.

Die notwendige Bedingung für den Extremwert $\delta K = 0$.

Der Extremwert ist nur dann ein Minimum, wenn $\delta^2 K \geq 0$ erfüllt ist.

Es ist zu beweisen, dass das Funktional K die beiden obigen Bedingungen erfüllt.

Der physikalische Inhalt der Gleichung $\delta K = 0$:

Das Prinzip der gesamten komplementären Energie beinhaltet:

- die kinematischen Gleichungen und
- die kinematischen Randbedingungen.

Die Gleichgewichtsbedingungen und die dynamischen Randbedingungen werden beim Einsetzen eines statisch möglichen Spannungsfeldes befriedigt.