

## 6. Lösung räumlicher / von 3D-Aufgaben mittels isoparametrischer Elemente

Räumliche / 3D Aufgabe: Es gibt keine Einschränkungen hinsichtlich der Form und der Belastungen des zu untersuchenden Körpers (Bauteils).

### 6.1. Kurze Wiederholung

Verschiebungsfeld:  $\vec{u} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z$ .      Verschiebungskoordinaten:  $u = u(x, y, z)$ ,  
 $v = v(x, y, z)$ ,  
 $w = w(x, y, z)$ .

Der Verzerrungszustand / der Verzerrungstensor: 
$$\underline{\underline{A}}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

Der Spannungszustand / der Spannungstensor: 
$$\underline{\underline{F}}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

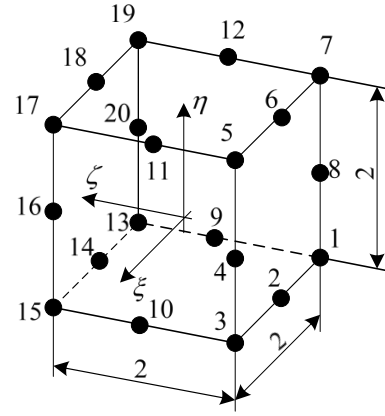
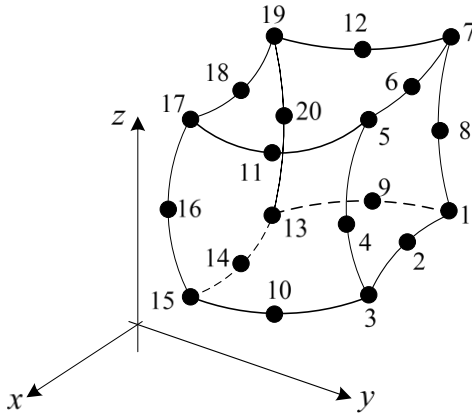
Die Elastizitätsgleichungen:

- kinematische / geometrische Gleichungen:  $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}(\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u})$ ,
- Gleichgewichtsbedingungen:  $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$ ,
- Materialgesetz / Hookesches Gesetz:  $\underline{\underline{F}} = 2G\left(\underline{\underline{A}} + \frac{A_I \nu}{1-2\nu}\right)$ ,
- Randbedingungen: - kinematische:  $(A_u) \quad \vec{u} = \vec{u}_0$ ,  
 - dynamische:  $(A_p) \quad \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0$ .

### 6.2. Quadratisches Hexaeder-Element – Abbildung, Formfunktionen

Abbildung: 
$$\left. \begin{aligned} x(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta, \zeta) x_i, \\ y(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta, \zeta) y_i, \\ z(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta, \zeta) z_i. \end{aligned} \right\}$$

$N=20$  ist die Anzahl der Knotenpunkte des Elementes.



Formfunktionen:

- In den Eckpunkten ( $i=1, 3, 5, 7, 13, 15, 17, 19$ ):

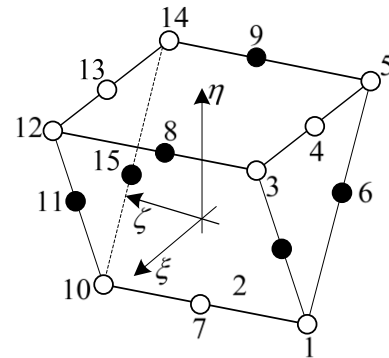
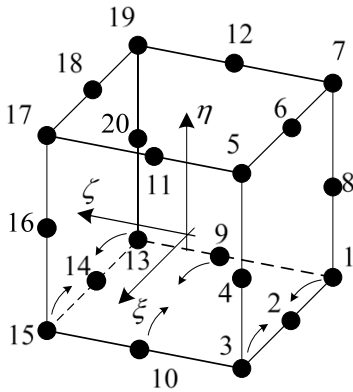
$$h_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)(1 + \zeta \zeta_i)(\xi \xi_i + \eta \eta_i + \zeta \zeta_i - 2).$$

- In den die Seiten halbierenden Punkten ( $i=2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 20$ ):

$$h_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)(1 + \zeta \zeta_i) \left[ 1 - (\xi \eta_i \zeta_i)^2 - (\xi_i \eta \zeta_i)^2 - (\xi_i \eta_i \zeta) \right].$$

*Degeneration:* ausgehend von einem Hexaeder-Element bildet man ein Pentaeder-Element durch die Zusammenlegung / die Reduzierung von sechs Knotenpunkten auf drei (Schrumpfung einer Oberfläche auf eine Linie).

### 6.3. Pentaeder-Element – Abbildung, Formfunktionen



Formfunktionen:

In den mit einem Kreis gekennzeichneten Knotenpunkten des Pentaeder-Elementes ändern sich die Formfunktionen im Vergleich zum Hexaeder-Element.

$$\begin{aligned} h_1^* &= h_1 + h_2 + h_3, & h_7^* &= h_9 + h_{10}, & h_{10}^* &= h_{13} + h_4 + h_{15}, \\ h_2^* &= h_4, & h_8^* &= h_{11}, & h_{11}^* &= h_{16}, \\ h_3^* &= h_5 + \Delta h_{31}, & h_9^* &= h_{12}, & h_{12}^* &= h_{17} + \Delta h_{32}, \\ h_4^* &= h_6 - 2\Delta h_{31}, & & & h_{13}^* &= h_{18} - 2\Delta h_{32}, \\ h_5^* &= h_7 + \Delta h_{31}, & & & h_{14}^* &= h_{19} + \Delta h_{32}, \\ h_6^* &= h_8, & & & h_{15}^* &= h_{20}. \end{aligned}$$

$h_i$  ( $i=1, 2, \dots, 20$ ) sind die Formfunktionen des Hexaeder-Elementes.

Korrektur-Formfunktionen: 
$$\Delta h_{31} = \frac{1}{16}(1 - \zeta)(1 - \xi^2)(1 - \eta^2),$$

$$\Delta h_{32} = \frac{1}{16}(1+\zeta)(1-\xi^2)(1-\eta^2).$$

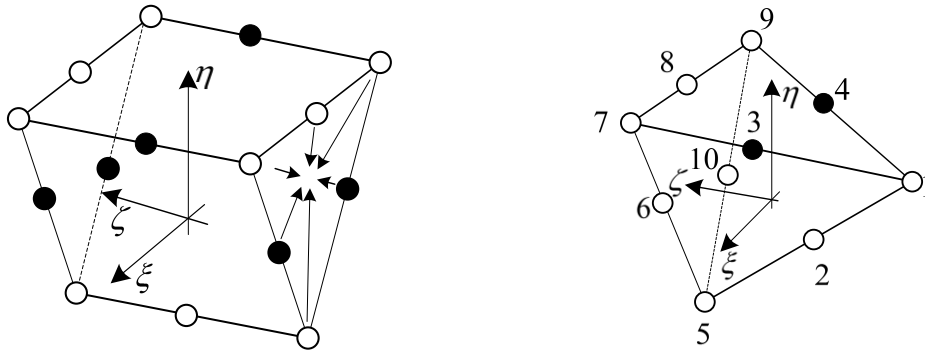
Weitere Degeneration:

Schrumpfung der  $\zeta = -1$  Viereck-Oberfläche des Hexaeder-Elementes auf einen Punkt, oder Schrumpfung der  $\zeta = -1$  Dreieck-Oberfläche des Pentaeder-Elementes auf einen Punkt.



Acht bzw. sechs Knotenpunkte werden zusammengelegt.

### 6.4. Tetraeder-Element – Abbildung, Formfunktionen



Formfunktionen:

In den mit einem Kreis gekennzeichneten Knotenpunkten des Tetraeder-Elementes ändern sich die Formfunktionen im Vergleich zu dem Pentaeder-Element.

$$\begin{aligned} h_1^* &= \sum_{i=1}^8 h_i, & h_6^* &= h_{16} - 2\Delta h_{12}, \\ h_2^* &= h_9 + h_{10}, & h_7^* &= h_{17} + \Delta h_{12} + \Delta h_{22} + 0,5(1+\zeta)\Delta h_{32}, \\ h_3^* &= h_{11}, & h_8^* &= h_{18} - 2\Delta h_{22} - (1+\zeta)\Delta h_{32}, \\ h_4^* &= h_{12}, & h_9^* &= h_{19} + \Delta h_{22} + \Delta h_{11} + 0,5(1+\zeta)\Delta h_{32}, \\ h_5^* &= h_{13} + h_{14} + h_{15} + \Delta h_{11} + \Delta h_{12}, & h_{10}^* &= h_{20} - 2\Delta h_{11}. \end{aligned}$$

$h_i$  ( $i=1, 2, \dots, 20$ ) sind die Formfunktionen des Hexaeder-Elementes.

Korrektur-Formfunktionen:

$$\begin{aligned} \Delta h_{11} &= \frac{1}{16}(1-\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta^2), & \Delta h_{22} &= \frac{1}{16}(1+\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta^2), \\ \Delta h_{12} &= \frac{1}{16}(1+\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta^2), & \Delta h_{32} &= \frac{1}{16}(1+\zeta)(1-\xi^2)(1-\eta^2). \end{aligned}$$

*Vorteil der Degenerationsmethode:* Der Aufbau der Element-Kenngrößen (Steifigkeitsmatrix, Belastungsvektoren) kann einheitlich behandelt werden - kann mit den gleichen Formeln berechnet werden.

Unterschiede zwischen den drei Elementen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Hexaeder: } N = 20, \\ \text{Pentaeder: } N = 15, \\ \text{Tetraeder: } N = 10. \end{array} \right\} \text{ - Die Anzahl der Knotenpunkte:}$$

- Die Ansatzfunktionen / Formfunktionen sind different:  $h_i(\xi, \eta, \zeta) \Rightarrow h_i^*(\xi, \eta, \zeta)$ .

### 6.5. Die Steifigkeitsmatrix der Elemente im globalen $x, y, z$ -Koordinatensystem

Folgende Elementformen sind möglich: Hexaeder, Pentaeder, Tetraeder.

Der Knotenpunktverschiebungsvektor der Elemente:

$$\left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T = \left[ \left(\underline{\underline{q}}_{\underline{\underline{1}}}^e\right)^T \left(\underline{\underline{q}}_{\underline{\underline{2}}}^e\right)^T \dots \left(\underline{\underline{q}}_{\underline{\underline{N}}}^e\right)^T \right], \quad \left(\underline{\underline{q}}_{\underline{\underline{i}}}^e\right)^T = [u_i \ v_i \ w_i].$$

Näherung des Verschiebungsfeldes:

$$\left. \begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta, \zeta) u_i \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta, \zeta) v_i \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta, \zeta) w_i \end{aligned} \right\} N = \begin{cases} 20 \text{ im Fall des Hexaeders,} \\ 15 \text{ im Fall des Pentaeders,} \\ 10 \text{ im Fall des Tetraeders.} \end{cases}$$

Näherung des Verschiebungsfeldes in Matrizenform:

$$\underline{\underline{u}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \underline{\underline{A}}^e(\xi, \eta, \zeta) \underline{\underline{q}}^e.$$

(3×1)                      (3×3N)      (3N×1)

Die Koordinaten des Verschiebungsfeldes:  $\underline{\underline{u}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix}^e.$

Die Approximationsmatrix:

$$\underline{\underline{A}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & | & h_2 & 0 & 0 & | & & | & h_N & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & | & 0 & h_2 & 0 & | & \dots & | & 0 & h_N & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & | & 0 & 0 & h_2 & | & & | & 0 & 0 & h_N \end{bmatrix}.$$

Der Verzerrungsvektor der Elemente:  $\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^e\right)^T = \left(\underline{\underline{\varepsilon}}^e\right)^T(\xi, \eta, \zeta) = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{xz}].$

Der Verzerrungsvektor in Matrizenform:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \left[ \underline{\underline{D}}_e^e \ \underline{\underline{A}}^e(\xi, \eta, \zeta) \right] \underline{\underline{q}}^e = \underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta, \zeta) \underline{\underline{q}}^e.$$

(6×1)                      (6×3)      (3×3N)      (3N×1)      (6×3N)      (3N×1)

Die Ableitungs-Operationen ausführlich geschrieben:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{D}}_e^e \underline{\underline{u}}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix}^e.$$

Die Matrix, die den Zusammenhang zwischen den Verzerrungen und Verschiebungen angibt:

$$\underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} b_{11} & 0 & 0 & b_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & 0 & b_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & b_{31} & 0 & 0 & b_{3i} \\ \hline b_{21} & b_{11} & 0 & b_{2i} & b_{1i} & 0 \\ 0 & b_{31} & b_{21} & 0 & b_{3i} & b_{2i} \\ b_{31} & 0 & b_{11} & b_{3i} & 0 & b_{2i} \end{array} \right], \quad (i=1, 2, \dots, N).$$

Darstellung der Matrixelemente:

$$\left. \begin{aligned} b_{1i} &= \frac{\partial h_i}{\partial x} = R_{11} \frac{\partial h_i}{\partial \xi} + R_{12} \frac{\partial h_i}{\partial \eta} + R_{13} \frac{\partial h_i}{\partial \zeta}, \\ b_{2i} &= \frac{\partial h_i}{\partial y} = R_{21} \frac{\partial h_i}{\partial \xi} + R_{22} \frac{\partial h_i}{\partial \eta} + R_{23} \frac{\partial h_i}{\partial \zeta}, \\ b_{3i} &= \frac{\partial h_i}{\partial z} = R_{31} \frac{\partial h_i}{\partial \xi} + R_{32} \frac{\partial h_i}{\partial \eta} + R_{33} \frac{\partial h_i}{\partial \zeta}. \end{aligned} \right\}$$

$R_{ij}$  - Elemente der inversen *Jacobischen* Matrix der Abbildung.

Die inverse *Jacobische* Matrix:

$$\left[ \underline{\underline{J}}^{-1} \right] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}.$$

Die Berechnung der *Jacobischen* Matrix:

$$\left[ \underline{\underline{J}}(\xi, \eta, \zeta) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial \xi} y_i & \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial \eta} y_i & \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial \zeta} x_i & \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial \zeta} y_i & \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix}.$$

Die inverse *Jacobische* Matrix:  $J_{ij}^{-1} = \frac{\text{adj } J_{ij}}{\det \underline{\underline{J}}}$ , wobei  $\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{J}}(\xi, \eta, \zeta)$ .

Der Spannungsvektor der Elemente und seine Näherung:

$$\left( \underline{\underline{\sigma}}^e \right)^T = \left[ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz} \right], \quad \underline{\underline{\sigma}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi, \eta, \zeta).$$

(6×1)                      (6×6)      (6×1)

Die Matrix der Materialkennwerte:

$$\underline{\underline{C}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} c_1 & c_4 & c_5 & 0 & 0 & 0 \\ c_4 & c_2 & c_6 & 0 & 0 & 0 \\ c_5 & c_6 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & c_7 & & \\ 0 & 0 & 0 & & c_8 & \\ 0 & 0 & 0 & & & c_9 \end{bmatrix}.$$

Die Elemente der Materialmatrix im Falle der Isotropie (*Hookesches* Gesetz):

$$c_1 = c_2 = c_3 = E \frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad c_4 = c_5 = c_6 = E \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad c_7 = c_8 = c_9 = G = E \frac{1}{2(1+\nu)}.$$

Im Fall der Orthotropie, wenn  $x, y, z$  die Hauptrichtungen des Materials sind:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1 - \nu_{yz} \nu_{zy}}{E_y E_z \Delta}, & c_2 &= \frac{1 - \nu_{xz} \nu_{zx}}{E_x E_z \Delta}, & c_3 &= \frac{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}{E_x E_y \Delta}, \\
c_4 &= \frac{\nu_{yx} + \nu_{yz} \nu_{zx}}{E_y E_z \Delta}, & c_5 &= \frac{\nu_{zx} + \nu_{yx} \nu_{zy}}{E_y E_z \Delta}, & c_6 &= \frac{\nu_{zy} + \nu_{xy} \nu_{zx}}{E_x E_z \Delta}, \\
\Delta &= (1 - \nu_{xy} \nu_{yx} - \nu_{yz} \nu_{zy} - \nu_{xz} \nu_{zx} - 2\nu_{yx} \nu_{zy} \nu_{xz}) / (E_x E_y E_z), \\
c_7 &= G_{yz}, & c_8 &= G_{xz}, & c_9 &= G_{xy}.
\end{aligned}$$

Die Steifigkeitsmatrix der Elemente im globalen  $x, y, z$ -Koordinatensystem:

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{(V^e)} \left[ \underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta, \zeta) \right]^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta, \zeta) dV.$$

Die Dimensionen der Steifigkeitsmatrix:  $\begin{cases} (60 \times 60) & \text{im Fall eines Hexaeders,} \\ (45 \times 45) & \text{im Fall eines Pentaeders,} \\ (30 \times 30) & \text{im Fall eines Tetraeders.} \end{cases}$

Zur Integration führt man die neuen  $\xi, \eta, \zeta$ -Veränderlichen ein:

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \int_{\zeta=-1}^1 \left[ \underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta, \zeta) \right]^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta, \zeta) \det |J| d\xi d\eta d\zeta = \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \int_{\zeta=-1}^1 \underline{\underline{k}}^e(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta.$$

Einteilung des Integranden in Blöcke:

$$\underline{\underline{k}}^e = \begin{bmatrix} k_{\underline{\underline{11}}} & \cdots & k_{\underline{\underline{1j}}} & \cdots & k_{\underline{\underline{1N}}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{\underline{\underline{i1}}} & \cdots & k_{\underline{\underline{ij}}} & \cdots & k_{\underline{\underline{iN}}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{\underline{\underline{N1}}} & \cdots & k_{\underline{\underline{Nj}}} & \cdots & k_{\underline{\underline{NN}}} \end{bmatrix} \quad \text{ein beliebiger Block der Matrix: } \underline{\underline{k}}_{\underline{\underline{ij}}}^e \quad (3 \times 3)$$

Die Steifigkeitsmatrix der Elemente ist symmetrisch:  $\underline{\underline{k}}_{\underline{\underline{ij}}}^e = \left( \underline{\underline{k}}_{\underline{\underline{ji}}}^e \right)^T$ .

Die einzelnen Blöcke der Steifigkeitsmatrix sind im Allgemeinen nicht symmetrisch:

$$\left( \underline{\underline{k}}_{ij}^e \right)_{pq} \neq \left( \underline{\underline{k}}_{ij}^e \right)_{qp} \quad (\text{Ausnahme } i=j).$$

Berechnung eines beliebigen Blocks des Integranden im isotropen Fall:

Bezeichnung:  $c_1 = c_2 = c_3 = d_1$ ,  $c_4 = c_5 = c_6 = d_2$ ,  $c_7 = c_8 = c_9 = d_3$ .

$$\begin{aligned}
\left( \underline{\underline{k}}_{\underline{\underline{ij}}}^e \right)_{11} &= (b_{1i} d_1 b_{1j} + b_{2i} d_2 b_{2j} + b_{3i} d_3 b_{3j}) \det |J|, & \left( \underline{\underline{k}}_{\underline{\underline{ij}}}^e \right)_{31} &= (b_{3i} d_2 b_{1j} + b_{1i} d_3 b_{3j}) \det |J|, \\
\left( \underline{\underline{k}}_{\underline{\underline{ij}}}^e \right)_{12} &= (b_{1i} d_2 b_{2j} + b_{2i} d_3 b_{1j}) \det |J|, & \left( \underline{\underline{k}}_{\underline{\underline{ij}}}^e \right)_{32} &= (b_{3i} d_2 b_{2j} + b_{2i} d_3 b_{3j}) \det |J|, \\
\left( \underline{\underline{k}}_{\underline{\underline{ij}}}^e \right)_{13} &= (b_{1i} d_2 b_{3j} + b_{3i} d_3 b_{1j}) \det |J|, & \left( \underline{\underline{k}}_{\underline{\underline{ij}}}^e \right)_{33} &= (b_{3i} d_1 b_{3j} + b_{2i} d_3 b_{2j} + b_{1i} d_3 b_{1j}) \det |J|, \\
\left( \underline{\underline{k}}_{\underline{\underline{ij}}}^e \right)_{21} &= (b_{2i} d_2 b_{1j} + b_{1i} d_3 b_{2j}) \det |J|, \\
\left( \underline{\underline{k}}_{\underline{\underline{ij}}}^e \right)_{22} &= (b_{2i} d_2 b_{2j} + b_{1i} d_3 b_{1j} + b_{3i} d_3 b_{3j}) \det |J|, \\
\left( \underline{\underline{k}}_{\underline{\underline{ij}}}^e \right)_{23} &= (b_{2i} d_2 b_{3j} + b_{3i} d_3 b_{2j}) \det |J|,
\end{aligned}$$

Die numerische Darstellung der Steifigkeitsmatrix der Elemente / Elementsteifigkeitsmatrix:

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\underline{k}}^e d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M w_i w_j w_k \underline{\underline{k}}^e(\xi_i, \eta_j, \zeta_k).$$

$M$  ist die Anzahl der *Gaußschen* Integrationspunkte,  
 $\xi_i, \eta_j, \zeta_k$  sind die Ortskoordinaten der *Gaußschen* Integrationspunkte,  
 $w_i, w_j, w_k$  sind die Gewichtskoeffizienten der *Gaußschen* Integration.

*Genauigkeit:* die *Gaußsche* Formel mit  $M$  Punkten führt zu einem exakten Ergebnis, wenn der Integrand ein Polynom höchstens  $(2M - 1)$ -ten Grades ist.

## 6.6. Der Knotenpunktbelastungsvektor aus Volumenkräften im globalen $x,y,z$ -Koordinatensystem

$$\underline{f}_q^e = \int_{(V^e)} \left[ \underline{A}^e(x, y, z) \right]^T \underline{q}(x, y, z) dV.$$

$(3N \times 1)$                        $(3N \times 3)$                        $(3 \times 1)$

$\underline{q}(x, y, z)$  - die Intensität der Volumenkräfte – bekannte Belastung,  
 $V^e$  - das Volumen des Elementes / Elementvolumen.

ZB.: Rotation um die  $z$ -Achse:

$$\underline{q}(x, y, z) = \rho \omega^2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix},$$

wobei  $\rho$  die Massendichte,  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit und  $x, y$  die Ortskoordinaten des Volumenelementes sind.

Einführung der neuen Veränderlichen  $\xi, \eta, \zeta$ :

$$\underline{f}_q^e = \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \int_{\zeta=-1}^1 \left[ \underline{A}^e(\xi, \eta, \zeta) \right]^T \underline{q}(\xi, \eta, \zeta) \det \left| \underline{J} \right| d\xi d\eta d\zeta = \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \int_{\zeta=-1}^1 \underline{\varphi}^e(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta.$$

Einteilung des Integranden in Blöcke:  $\left( \underline{\varphi}^e \right)^T = \left[ \left( \underline{\varphi}_{q1} \right)^T \left( \underline{\varphi}_{q2} \right)^T \dots \left( \underline{\varphi}_{qi} \right)^T \dots \right]^e$ .

Der Block  $i$  des Integranden:  $\underline{\varphi}_{qi} = \rho \omega^2 \det \left| \underline{J} \right| h_i(\xi, \eta, \zeta) \begin{bmatrix} x(\xi, \eta, \zeta) \\ y(\xi, \eta, \zeta) \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Die numerische Berechnung des Belastungsvektors:

$$\underline{f}_q^e = \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \int_{\zeta=-1}^1 \underline{\varphi}^e d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M w_i w_j w_k \underline{\varphi}_{qi}^e(\xi_i, \eta_j, \zeta_k).$$

## 6.7. Der Knotenpunktbelastungsvektor aus Flächenkräften im globalen $x,y,z$ -Koordinatensystem

$$\underline{f}_p^e = \int_{(A_p^e)} \left[ \hat{\underline{A}}^e \right]^T \underline{p}(x, y, z) dA,$$

$\underline{p}(x, y, z)$  - der Intensitätsvektor der Flächenbelastung – bekannte Belastung,

$A_p^e$  - die belastete Oberfläche des Elementes / Elementoberfläche,

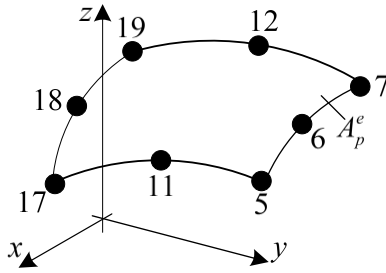
$\hat{\underline{A}}^e$  - die auf die belastete Oberfläche lokalisierte Approximationsmatrix.

*Annahme:* Die Angriffsfläche der Oberflächenbelastung ist die Fläche  $\zeta = 1$  des Elementes.

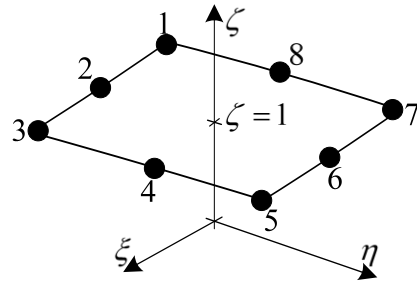
Lokale Knotenpunktnumerierung

Lokale Knotenpunktnumerierung

an das Element gebunden



an die Oberfläche gebunden



Gleichungen der Oberfläche  $\zeta = 1$  des Elementes:

$$\left. \begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \hat{h}_i(\xi, \eta) x_i, \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \hat{h}_i(\xi, \eta) y_i, \\ z(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \hat{h}_i(\xi, \eta) z_i. \end{aligned} \right\}$$

Die auf die Oberfläche  $\zeta = 1$  lokalisierten Formfunktionen / Approximationsfunktionen:

$$\left. \begin{aligned} \hat{h}_1(\xi, \eta) &= h_{19}(\zeta = 1), & \hat{h}_5(\xi, \eta) &= h_5(\zeta = 1), \\ \hat{h}_2(\xi, \eta) &= h_{18}(\zeta = 1), & \hat{h}_6(\xi, \eta) &= h_6(\zeta = 1), \\ \hat{h}_3(\xi, \eta) &= h_{17}(\zeta = 1), & \hat{h}_7(\xi, \eta) &= h_7(\zeta = 1), \\ \hat{h}_4(\xi, \eta) &= h_{16}(\zeta = 1), & \hat{h}_8(\xi, \eta) &= h_{12}(\zeta = 1). \end{aligned} \right\}$$

Näherung des Verschiebungsfeldes auf der Oberfläche  $\zeta = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \hat{h}_i(\xi, \eta) u_i, \\ v(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \hat{h}_i(\xi, \eta) v_i, \\ w(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \hat{h}_i(\xi, \eta) w_i. \end{aligned} \right\}$$

*Annahme:* Die Flächenbelastung ist ein bekannter Druck  $\underline{p}(x, y, z) = -p(x, y, z) \vec{n}$ .

$p(x, y, z)$  - Druckverteilung,

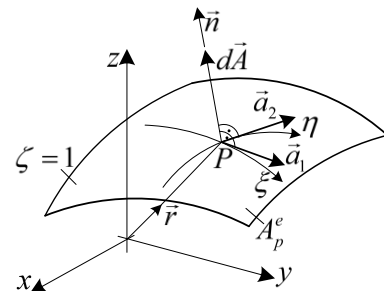
$\vec{n}(x, y, z)$  - Normaleneinheitsvektor, der aus dem Körper heraus gerichtet ist.

Bildung des Normaleneinheitsvektor:

$\xi, \eta$  - die krummlinigen Koordinaten auf der Oberfläche

$\zeta = 1$  - sie sind in mathematischer Sicht Parameter.

Der Ortsvektor eines beliebigen Punktes  $P(x, y)$  der Oberfläche  $\zeta = 1$ :  $\vec{r} = x(\xi, \eta) \vec{e}_x + y(\xi, \eta) \vec{e}_y + z(\xi, \eta) \vec{e}_z$ .



Die Tangentenvektoren der  $\xi, \eta$ -Koordinatenlinien in einem beliebigen Punkt  $P(x, y)$ :

$$\vec{a}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}, \quad \vec{a}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}, \quad |\vec{a}_1| \neq 1, \quad |\vec{a}_2| \neq 1, \quad \text{weil } \xi, \eta \text{ keine Bogenlängen sind.}$$

Die Bildung der Tangentenvektoren:

$$\vec{a}_1 = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial \xi} x_i \vec{e}_x + \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial \xi} y_i \vec{e}_y + \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial \xi} z_i \vec{e}_z, \quad \vec{a}_2 = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial \eta} x_i \vec{e}_x + \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial \eta} y_i \vec{e}_y + \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial \eta} z_i \vec{e}_z.$$



Bezeichnung:  $\vec{a}_1 = a_{1x}\vec{e}_x + a_{1y}\vec{e}_y + a_{1z}\vec{e}_z$ ,  $\vec{a}_2 = a_{2x}\vec{e}_x + a_{2y}\vec{e}_y + a_{2z}\vec{e}_z$ .

Das vektorielle Flächenelement:

$$d\vec{A} = [\vec{a}_1 \times \vec{a}_2] d\xi d\eta = \left[ (a_{1y}a_{2z} - a_{1z}a_{2y})\vec{e}_x + (a_{1z}a_{2x} - a_{1x}a_{2z})\vec{e}_y + (a_{1x}a_{2y} - a_{1y}a_{2x})\vec{e}_z \right] d\xi d\eta.$$

Das skalare Flächenelement:  $dA = |d\vec{A}|$

Der Normaleneinheitsvektor der Oberfläche:  $\vec{n} = \frac{d\vec{A}}{dA} \Rightarrow \vec{n} dA = d\vec{A}$ .

Der Knotenpunktbelastungsvektor aus dem Flächendruck:

$$\vec{f}_{=p}^e = - \int_{\eta=-1}^1 \int_{\xi=-1}^1 [\hat{\underline{A}}(\xi, \eta)]^T p(\xi, \eta) (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) d\xi d\eta = - \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \varphi_{=p}^e(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Die auf die Oberfläche lokalisierte Approximationsmatrix:

$$\underline{\underline{A}}^e(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \hat{h}_1 & 0 & 0 & \hat{h}_2 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \hat{h}_8 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{h}_1 & 0 & 0 & \hat{h}_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \hat{h}_8 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{h}_1 & 0 & 0 & \hat{h}_2 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \hat{h}_8 \end{bmatrix}^e, \text{ Dimension: } (24 \times 3).$$

Einteilung des Integranden in Blöcke:  $\left( \varphi_{=p}^e \right)^T = \left[ \left( \varphi_{=p1} \right)^T \left( \varphi_{=p2} \right)^T \dots \left( \varphi_{=p8} \right)^T \right]^e$ .

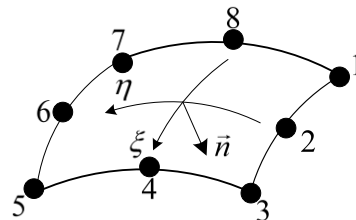
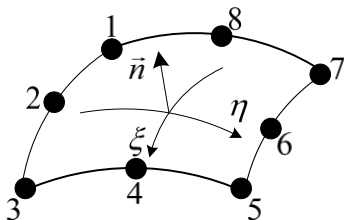
Der Block  $i$ :  $\varphi_{=pi}^e = p(\xi, \eta) \vec{h}_i(\xi, \eta) \begin{bmatrix} a_{1y}a_{2z} - a_{1z}a_{2y} \\ a_{1z}a_{2x} - a_{1x}a_{2z} \\ a_{1x}a_{2y} - a_{1y}a_{2x} \end{bmatrix}^e$ .

Die numerische Berechnung des Belastungsvektors:

$$\vec{f}_{=p}^e = \int_{\eta=-1}^1 \int_{\xi=-1}^1 \varphi_{=p}^e(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M w_i w_j \varphi_{=p}^e(\xi_i, \eta_j).$$

*Bemerkungen:*

- Die Dimensionen des Knotenpunktbelastungsvektors aus der Flächenbelastung können in Abhängigkeit von der Form der belasteten Oberfläche (Viereck, Dreieck) nur (24x1) oder (18x1) sein.  
Die berechneten Koordinaten des Vektors muss man an den entsprechenden Stellen des Element-Belastungsvektors im Format von (3Nx1) einsetzen.
- Die Richtung des Normaleneinheitsvektors ist durch die lokale Knotenpunktnumerierung der Elementseite bestimmt.



## 6.8. Berücksichtigung der elastischen Bettung

*Modellierung:* Die elastische Bettung modelliert die Wirkung anderer elastischer Bauteile auf den zu untersuchenden Körper / das zu untersuchende Bauteil.

*Elastische Bettung:* eine Flächenbelastung, wobei die Intensität der Belastung zu den Verschiebungen der Oberflächenpunkte proportional ist.

*Annahme:*

- Das Bettungsmedium ist linear elastisch,

- Zwischen dem zu untersuchenden Körper und dem Bettungsmedium gibt es eine zweiseitige Kopplung (davon ist keine Abweichung möglich)
- Zwischen den Kräften (Flächenkräften) und den Verschiebungen auf der Oberfläche gilt eine homogene, lineare Beziehung.

Flächenbelastung aus der elastischen Bettung: 
$$\underline{\underline{p}}_r^e(x, y, z) = -\underline{\underline{C}}_r \underline{\underline{u}}^e(x, y, z).$$

(3x1)            (3x3)    (3x1)

Die Matrix der Federkoeffizienten / Federsteifigkeiten: 
$$\underline{\underline{C}}_r = \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & c_z \end{bmatrix}.$$

Die gesamte potentielle Energie  $\pi^e$  wird mit der Arbeit der Kräfte aus der elastischen Bettung erweitert:

$$-\frac{1}{2} \int_{(A_r^e)} (\underline{\underline{u}}^e)^T \underline{\underline{p}}_r^e dA.$$

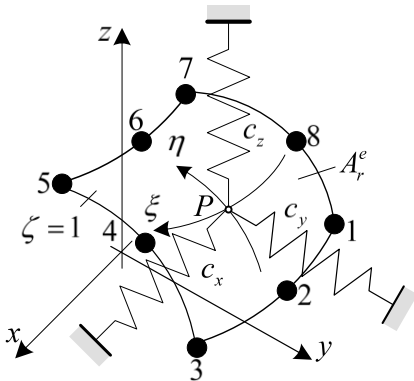
$A_r^e$  - die elastisch gebettete Oberfläche des Elementes / Elementoberfläche.

Nach der Approximation: 
$$-\frac{1}{2} \int_{(A_r^e)} (\underline{\underline{u}}^e)^T \underline{\underline{p}}_r^e dA = \frac{1}{2} \int_{(A_r^e)} (\underline{\underline{u}}^e)^T \underline{\underline{C}}_r \underline{\underline{u}}^e dA = \frac{1}{2} (\underline{\underline{q}}^e)^T \int_{(A_r^e)} \left[ \hat{\underline{\underline{A}}}^e \right]^T \underline{\underline{C}}_r \hat{\underline{\underline{A}}}^e dA \underline{\underline{q}}^e.$$

Die Steifigkeitsmatrix des Elementes / Elementsteifigkeitsmatrix aus der elastischen Bettung:

$$\underline{\underline{K}}_r^e = \int_{(A_r^e)} \left[ \hat{\underline{\underline{A}}}^e(x, y, z) \right]^T \underline{\underline{C}}_r \hat{\underline{\underline{A}}}^e(x, y, z) dA$$

*Annahme:* die elastische Bettung wirkt an der Seitenfläche  $\zeta = 1$  des Elementes.



Die Gleichungen der Seitenfläche und die Näherung des Verschiebungsfeldes sind gleich, wie bei der Berechnung der Oberflächenbelastung.

Näherung des Verschiebungsfeldes an der Seitenfläche  $\zeta = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \hat{h}_i(\xi, \eta) u_i, \\ v(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \hat{h}_i(\xi, \eta) v_i, \\ w(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \hat{h}_i(\xi, \eta) w_i. \end{aligned} \right\}$$

Einführung der neuen Veränderlichen  $\xi, \eta$ : 
$$\underline{\underline{K}}_r^e = \int_{\eta=-1}^1 \int_{\xi=-1}^1 \left[ \hat{\underline{\underline{A}}}^e(\xi, \eta) \right]^T \underline{\underline{C}}_r \hat{\underline{\underline{A}}}^e(\xi, \eta) dA.$$

Die elementare Fläche: 
$$dA = \sqrt{(a_{1y}a_{2z} - a_{1z}a_{2y})^2 + (a_{1z}a_{2x} - a_{2z}a_{1x})^2 + (a_{1x}a_{2y} - a_{2x}a_{1y})^2} d\xi d\eta.$$

Bezeichnung: 
$$\underline{\underline{K}}_r^e = \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \underline{\underline{k}}_r^e \sqrt{\quad} d\xi d\eta, \text{ Dimension: } (24 \times 24).$$

Einteilung in Blöcke: 
$$\underline{\underline{k}}_r^e = \begin{bmatrix} k_{=11} & k_{=12} & \cdots & k_{=18} \\ k_{=21} & k_{=22} & \cdots & k_{=28} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{=81} & k_{=82} & \cdots & k_{=88} \end{bmatrix}_r^e.$$

Ein beliebiger Block des Integranden:  $(k_{ij})^e = \begin{bmatrix} \hat{h}_i c_x \hat{h}_j & 0 & 0 \\ 0 & \hat{h}_i c_y \hat{h}_j & 0 \\ 0 & 0 & \hat{h}_i c_z \hat{h}_j \end{bmatrix}$ .

### 6.9. Berücksichtigung der Randbedingungen bei räumlichen / 3D Aufgaben

a) *Starre Lagerung eines Knotenpunktes:* Abstützung durch einen Kugellager.

Im gelagerten Punkt tritt eine Einzelkraft / eine konzentrierte Belastung auf.

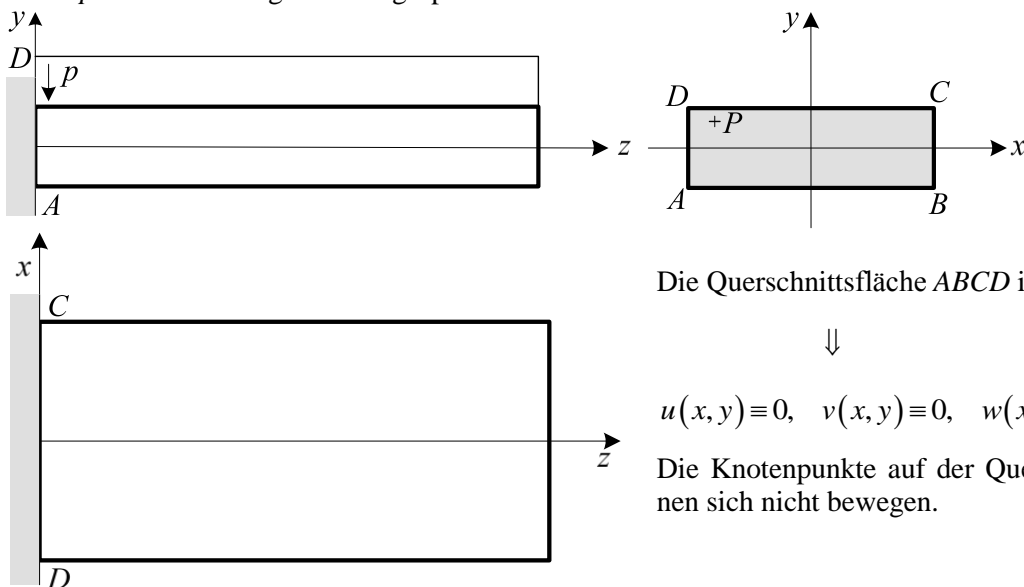
Die Einzelkräfte verursachen bei räumlichen Aufgaben in der Umgebung der Kraftangriffspunkte eine Spannungskonzentration.

Bei räumlichen Aufgaben sind die Einzelkraft-Belastungen nicht realistisch – man muss sie möglichst vermeiden.

*Einzelkraft, Kugellager – nicht anwenden.*

b) *Starre Lagerung aller Punkte einer Oberfläche:*

*Beispiel:* Berechnung einer eingespannten Platte mittels räumlicher Elemente.



Die Querschnittsfläche ABCD ist starr gelagert.

⇓

$$u(x, y) \equiv 0, \quad v(x, y) \equiv 0, \quad w(x, y) \equiv 0.$$

Die Knotenpunkte auf der Querschnittsfläche können sich nicht bewegen.

Mechanische Zustände an den Punkten P der starr gelagerten Querschnittsfläche:

$$u \equiv 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \text{aber} \quad \frac{\partial u}{\partial z} \neq 0,$$

$$v \equiv 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \text{aber} \quad \frac{\partial v}{\partial z} \neq 0,$$

$$w \equiv 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \text{aber} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \neq 0.$$

Der Verzerrungszustand:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \neq 0,$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \neq 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \neq 0.$$

$$[A]_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

Der Spannungszustand:  $\underline{\underline{F}} = 2G \left( \underline{\underline{A}} + \frac{\nu A_I}{1 - 2\nu} \underline{\underline{I}} \right), \quad A_I = \varepsilon_z.$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_z \\ \sigma_y &= 2G \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_z \\ \sigma_z &= 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z.$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= 0, \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz}, \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}. \end{aligned}$$

Der Spannungstensor:  $\left[ \underset{=p}{F} \right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$

Nehmen wir an, dass der Punkt  $P$  auf der Geraden  $AB$  liegt!

Dynamische Randbedingungen auf der unteren Seitenfläche:

$$\vec{\rho}_y = \vec{0}, \quad \tau_{xy} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= 0, \\ \tau_{zy} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{ Diese Bedingungen stehen in Widerspruch zu den Ergebnissen, die aus den kinematischen Randbedingungen stammen.}$$

Die Ergebnisse der kinematischen Randbedingungen einer starren Lagerung führen an der Kante der Oberfläche / Oberflächenkante zu einem Widerspruch. Die Zusammenhänge zwischen den Spannungskomponenten lassen sich sehr schwer interpretieren.

*Die starre Lagerung einer Oberfläche bei räumlichen Aufgaben muss man möglichst vermeiden.*

*Die reale Modellierungsmöglichkeit: die Anwendung einer elastischen Bettung statt kinematischer Randbedingungen.*