8. Finite Elemente Lösung für Dynamikaufgaben

8.1. Schwingungssysteme mit mehreren Freiheitgraden

Freiheitsgrade: Anzahl der unabhängigen skalaren Koordinaten, die die momentane Lage, oder Bewegung des zu untersuchenden Systems eindeutig bestimmen.

Verallgemeinerte Koordinate: Die unabhängigen skalaren Koordinaten, die die momentane Lage, oder Bewegung des zu untersuchenden Systems eindeutig bestimmen.

Bezeichnung: q - Verschiebung oder Verdrehung,

$q = q(t)$ - die verallgemeinerte Koordinate ist eine nach der Zeit mindestens zweimal differenzierbare Funktion,

$$q(t) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\dot{q}(t)}_{\substack{\text{Koordinaten-}\\ \text{Geschwindigkeit}}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\ddot{q}(t)}_{\substack{\text{Koordinaten-}\\ \text{Beschleunigung}}} \quad .$$

Schwingung: Wenn die verallgemeinerte Koordinate q, die verallgemeinerte Geschwindigkeit $\dot{q}$, oder die verallgemeinerte Beschleunigung $\ddot{q}$ während der Bewegung mehrmals das Vorzeichen wechseln.

Diskretes Schwingungssystem: Ein Schwingungssystem, die endlich viele Massenpunkte / Starrkörper und elastische Elemente enthält.

Bauteile:
- Starrkörper oder Massenpunkt,
- Elastische Körper / Elemente $\equiv$ Federn,
- Dämpfungselemente.

Kontinuumschwingungen: Schwingungen der elastischen Körper mit kontuinuierlicher / stetiger Massenverteilung.

Bewegungsgleichungssystem der diskreten Schwingungssysteme:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} = Q_k$$

- das *Lagrangesche* Bewegungsgleichungssystem zweiter Art.

$(k = 1,\ 2,\ \ldots\ n)$ $\quad$ n - die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems.

Q_k ist die verallgemeinerte Kraft (die Leistung, die zum Einheitswert der verallgemeinerten Koordinate Koordinate q_k gehört).

8.2. Energieprinzipien für bewegliche Kontinua

Bei einer Bewegung sind alle Feldgrößen auch von der Zeit abhängig:

Das Verschiebungsfeld: $\vec{u}(\vec{r},t)$.

Das Geschwindigkeitsfeld: $\vec{v}(\vec{r},t)$.

Das Beschleunigungsfeld: $\vec{a}(\vec{r},t)$.

Das *D'Alembert*[1]*sche* (dalamber)- Prinzip:

Die dynamischen Aufgaben können immer auf ein statisches Problem zurückgeführt werden, wenn man neben den äußeren Kräften auch Trägheitskräfte berücksichtigt, oder einleitet.

Bei einem Massenpunkt: $m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{0} = \vec{F}_i \underbrace{- m_i\vec{a}_i}_{\vec{T}_i} = \vec{F}_i + \vec{T}_i$.

Die Trägheitskraft: $\vec{T}_i = -m_i\vec{a}_i$.

Bei einem Kontinuum (Körper mit kontinuierlicher Massenverteilung): neben den Volumenkräften berücksichtigt man auch die Intensität der Trägheitskräfte.

[1] Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) franzözischer Mathematiker und Philosoph.

$\vec{q} \quad \Rightarrow \quad (\vec{q} - \vec{a}\rho)$, wobei $\vec{a}$ die Beschleuningung der elementaren Masse und ρ die Massendichte sind.

Gleichgewichtsbedingung: $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0} \quad \Rightarrow$ Bewegungsgleichung: $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \rho\vec{a}$.

Das *D'Alembertsche* Prinzip enthält den Impulssatz (das II. *Newtonsche* Gesetz).

a) Das Prinzip der virtuellen Leistung:

Multiplizieren (skalare Multiplikation) wir die Bewegungsgleichung (den Impulssatz) mit der Variation des Geschwindigkeitfeldes $\delta\vec{v}$ und integrieren den Ausdruck danach über das Volumen V des Körpers:

$$\int\limits_{(V)} \delta\vec{v} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \nabla dV + \int\limits_{(V)} \delta\vec{v} \cdot \vec{q} dV = \int\limits_{(V)} \delta\vec{v} \cdot \vec{a}\rho dV$$

Nach der Umformung des ersten Integrals und nach der Anwendung des *Gaußschen-Ostrogradskyschen* Satzes erhält man:

$$\int\limits_{(A_p)} \delta\vec{v} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA - \int\limits_{(V)} \frac{1}{2}(\delta\vec{v} \circ \nabla + \nabla \circ \delta\vec{v}) \cdot\cdot \underline{\underline{F}} dV + \int\limits_{(V)} \delta\vec{v} \cdot \vec{q} dV = \int\limits_{(V)} \delta\vec{v} \cdot \vec{a}\rho dV$$

Wir berücksichtigen die Symmetrie des Spannungstensors $\underline{\underline{F}}$ und die Randbedingungen für die Variation des Geschwindigkeitsfeldes $\delta\vec{v} = \vec{0}$. Danach setzen wir das Hookesches Gesetz $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{D}}^{(4)} \cdot\cdot \underline{\underline{A}}$ in die Gleichung ein, wobei $\underline{\underline{D}}^{(4)}$ der Tensor vierten Grades der Materialkennwerte ist, und berücksichtigen die dynamischen Randbedingungen $\vec{p}_0 = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}$.

$$\int\limits_{(A_p)} \delta\vec{v} \cdot \vec{p}_0 dA - \int\limits_{(V)} \frac{1}{2}(\delta\vec{v} \circ \nabla + \nabla \circ \delta\vec{v}) \cdot\cdot \underline{\underline{D}}^{(4)} \cdot\cdot \underline{\underline{A}} dV + \int\limits_{(V)} \delta\vec{v} \cdot \vec{q} dV = \int\limits_{(V)} \delta\vec{v} \cdot \vec{a}\rho dV \ .$$

Diese Gleichung ist die schwache Variationsformulierung der dynamischen Aufgabe, die Formulierung des Prinzipes der virtuellen Leistung.

b) Zwangsbewegungen (diese Bewegungen sind in der Ingenieurpraxis üblich)

Definition: Man spricht von einer Zwangsbewegung, wenn ein bestimmter Zusammenhang zwischen den verallgemeinerten Koordinaten besteht, die die Lage beziehungweise die Bewegung des zu untersuchenden Systems eindeutig bestimmen.

Zwangsbedingungen: eine Funktion zwischen den verallgemeinerten Koordinaten, die die Lage beziehungweise die Bewegung des zu untersuchenden Systems eindeutig bestimmen.

$$f_p(q_1, q_2, \ldots q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_n, t) = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots k).$$

Klassifizierung der Zwangsbedingungen:

- *Holonome*: enthalten nur die verallgemeinerten Koordinaten und nicht die verallgemeinerten Geschwindigkeiten.
- *Anholonome*: enthalten sowohl die verallgemeinerten Koordinaten als auch die verallgemeinerten Geschwindigkeiten.
- *Reonome*: enthalten auch die Zeit.
- *Skleronome:* enthalten die Zeit nicht.

Bei Ingenieuraufgaben kommen meistens holonome und skleronome Zwangsbedingungen vor.

8.3. Anwendung der Finite-Elemente-Methode – das Bewegungsgleichungssystem und seine Lösung

a) Aufbau des Bewegungsgleichungssystems:

Annäherung für:
- das Verschiebungsfeld: $\underline{\underline{u}}^e(X,t) = \underline{\underline{A}}^e(X)\underline{\underline{q}}^e(t)$,
- das Geschwindigkeitsfeld: $\underline{\underline{v}}^e(X,t) = \underline{\underline{A}}^e(X)\dot{\underline{\underline{q}}}^e(t)$,
- das Beschleunigungsfeld: $\underline{\underline{a}}^e(X,t) = \underline{\underline{A}}^e(X)\ddot{\underline{\underline{q}}}^e(t)$,
- die Variation des Geschwindigkeitsfeldes: $\delta\underline{\underline{v}}^e(X) = \underline{\underline{A}}^e(X)\delta\dot{\underline{\underline{q}}}^e$.

Nach dem Einsetzen in die schwache Formulierung des Prinzipes für ein finites Element unter Benutzung der vorherigen Bezeichnungen:

$$\left(\delta\dot{\underline{\underline{q}}}^e\right)^T \underbrace{\int\limits_{(A_p^e)} \left[\underline{\underline{A}}(X)\right]^T \underline{\underline{p}}_0(X)\,dA}_{\underline{\underline{f}}_p^e - \text{Flächenkräfte}} - \left(\delta\dot{\underline{\underline{q}}}^e\right)^T \underbrace{\int\limits_{(V)} \left[\underline{\underline{B}}^e(X)\right]^T \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}^e(X)\,dV}_{\underline{\underline{K}}^e - \text{Steifigkeitsmatrix}}\, q^e(t) +$$

$$+\left(\delta\dot{\underline{\underline{q}}}^e\right)^T \underbrace{\int\limits_{(V)} \left[\underline{\underline{A}}(X)\right]^T \underline{\underline{q}}(X)\,dV}_{\underline{\underline{f}}_q^e - \text{Volumenkräfte}} = \left(\delta\dot{\underline{\underline{q}}}^e\right)^T \underbrace{\int\limits_{(V)} \left[\underline{\underline{A}}(X)\right]^T \underline{\underline{A}}(X)\rho\,dV}_{\underline{\underline{M}}^e - \text{Massenmatrix}}\, \ddot{q}^e(t)$$

Die obige Gleichung kurz / kompakt geschrieben: $\left(\delta\dot{\underline{\underline{q}}}^e\right)^T \left(\underline{\underline{M}}^e \ddot{\underline{\underline{q}}}^e + \underline{\underline{M}}^e \underline{\underline{q}}^e - \underline{\underline{f}}_p^e - \underline{\underline{f}}_q^e\right) = \underline{\underline{0}}$.

Nach der Summation für alle Elemenete der Konstruktion / des Körpers und nach der Berücksichtigung der Randbedingungen erhält man die Gleichung:

$$\left(\delta\dot{\underline{\underline{q}}}\right)^T \left(\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{q}} - \underline{\underline{f}}_p - \underline{\underline{f}}_q\right) = \underline{\underline{0}}.$$

Da die Variation des Geschwindigkeitsfeldes nicht Null sein darf, muss der Ausdruck in Klammern gleich Null sein:

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{f}}_p + \underline{\underline{f}}_q.$$

Diese Matrizengleichung ist ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem für die unbekannten Funktionen $q_i(t)$.

Die Massenmatrix des Körpers: $$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{e\in 1,1} \underline{\underline{M}}_{11}^e & \sum\limits_{e\in 1,2} \underline{\underline{M}}_{12}^e & \cdots & \sum\limits_{e\in 1,j} \underline{\underline{M}}_{1j}^e & \cdots & \sum\limits_{e\in 1,N} \underline{\underline{M}}_{1N}^e \\ \sum\limits_{e\in 2,1} \underline{\underline{M}}_{21}^e & \sum\limits_{e\in 2,2} \underline{\underline{M}}_{22}^e & \cdots & \sum\limits_{e\in 2,j} \underline{\underline{M}}_{2j}^e & \cdots & \sum\limits_{e\in 2,N} \underline{\underline{M}}_{2N}^e \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{e\in i,1} \underline{\underline{M}}_{i1}^e & \sum\limits_{e\in i,2} \underline{\underline{M}}_{i2}^e & \cdots & \sum\limits_{e\in i,j} \underline{\underline{M}}_{ij}^e & \cdots & \sum\limits_{e\in i,N} \underline{\underline{M}}_{iN}^e \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

wobei N die Anzahl der Knotenpunkte des Körpers und

$\underset{(3\times 3)}{\underline{\underline{M}}_{ij}^e}$ der zu den Knotenpunkten i, j gehörende Block der Massenmatrix des Elementes e.

b) Die Lösung des Bewegungsgleichungssystems:

Das zu lösende Gleichungssystem: $\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\ddot{q}}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{f}}(t)$.

$\underline{\underline{q}}(t)$ - eine Spaltenmatrix, die *n* unbekannten Funktionen enthält (*n* ist die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems)

Lösungsmethoden: 1. Direkte Integration.
2. Eigenvektorsuperpositions-Verfahren / Modenüberlagerungsmethode.

<u>1. Direkte Integration</u>: die Bewegungsgleichung wird mit einem numerischen Schritt-für-Schritt-Verfahren integriert.

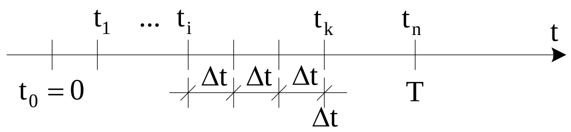
Direkt bedeutet hier, dass die Bewegungsgleichung vor der Integration nicht in eine andere Form transformiert wird.

Grundgedanke: nicht die Funktion $q(t)$ selbst, sondern die diskrete Funktionswerte $\underline{\underline{q}}(t_1), \underline{\underline{q}}(t_2), \ldots$ in den gegebenen Zeitpunkten $t_1, t_2, \ldots$ werden ermittelt. (Wir diskretisieren die Funktion in Bezug auf die Zeit.)

1.a. Die zentrale Differenzenmethode:

Wir wollen die Lösung im Intervall $< t_0 = 0, t_n = T >$ darstellen.

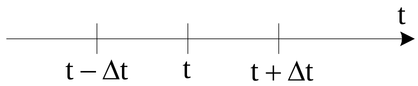
Auf der t-Achse nehmen wir das Zeitintervall auf:



Hier ist n - die Anzahl der Zeitschritte und $\Delta t = \frac{T}{n}$ ist die Länge / die Größe der Zeitschritte.

Annahme: die Anfangsbedingungen $\underline{\underline{q}}(t_0) = \underline{\underline{q}}^0$, $\underline{\underline{\dot{q}}}(t_0) = \underline{\underline{\dot{q}}}^0$ sind bekannt.

Man führt statt der Differentialquotienten endliche / finite Differenzenquotienten ein (Näherung:



Differenzen für die erste Ableitung:

- die zentrale Differenz: $\underline{\underline{\dot{q}}}^t \approx \frac{1}{2\Delta t}\left(\underline{\underline{q}}^{t+\Delta t} - \underline{\underline{q}}^{t-\Delta t}\right)$,

- die rechtseitige Differenz: $\underline{\underline{\dot{q}}}^t_j \approx \frac{1}{\Delta t}\left(\underline{\underline{q}}^{t+\Delta t} - \underline{\underline{q}}^{t}\right)$,

- die linkseitige Differenz: $\underline{\underline{\dot{q}}}^t_b \approx \frac{1}{\Delta t}\left(\underline{\underline{q}}^{t} - \underline{\underline{q}}^{t-\Delta t}\right)$.

Differenz für die zweite Ableitung:

$$\underline{\underline{\ddot{q}}}^t \approx \frac{1}{\Delta t}\left[\underline{\underline{\dot{q}}}^t_j - \underline{\underline{\dot{q}}}^t_b\right] = \frac{1}{(\Delta t)^2}\left(\underline{\underline{q}}^{t+\Delta t} - 2\underline{\underline{q}}^t + \underline{\underline{q}}^{t-\Delta t}\right)$$

Nach dem Einsetzen der zweiten Differenz in die Bewegungsgleichung erhält man eine Rekursionsformel:

$$\frac{1}{(\Delta t)^2}\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{q}}^{t+\Delta t} = \underline{\underline{f}}^t + \left(\underline{\underline{K}} - \frac{2}{(\Delta t)^2}\underline{\underline{M}}\right)\underline{\underline{q}}^t - \frac{1}{(\Delta t)^2}\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{q}}^{t-\Delta t}$$

$$\Downarrow$$

Aus dieser Gleichung kann man $\underline{\underline{q}}^{t+\Delta t}$ berechnen, wenn die Werte $\underline{\underline{q}}^t$ und $\underline{\underline{q}}^{t-\Delta t}$ bekannt sind.

Problem: am Anfang steht nur der Wert q^0 zur Verfügung und $\underline{\underline{q}}^{-1}$ existiert nicht.

Startbedingung: es sind die Formeln der zentralen Differenz und der zweiten Differenz für den Zeitpunkt $t = t_0 = 0$ anzuwenden.

$$\left.\begin{array}{l} t + \Delta t = \Delta t \\ t = t_0 = 0 \\ t - \Delta t = -\Delta t \end{array}\right\}$$

$$\underline{\underline{q}}^{-1} = \underline{\underline{q}}^0 - \Delta t \underline{\underline{\dot{q}}}^0 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \underline{\underline{\ddot{q}}}^0 ,$$

wobei man den Wert $\underline{\underline{\ddot{q}}}^0$ mit Hilfe der Gleichung $\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\ddot{q}}}^0 + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{q}}^0 = \underline{\underline{f}}_p + \underline{\underline{f}}_q$ ermitteln kann.

Die direkte Integrationsmethode ist eine bedingt stabile Vorgehensweise.

Unbedingt stabile Integration: Man erhält auch in dem Fall eine finite Grenze für die Lösung, wenn man bei beliebigen Anfangsbedingungen einen beliebigen, im Vergeich zu T großen Δt-Schritt wählt.

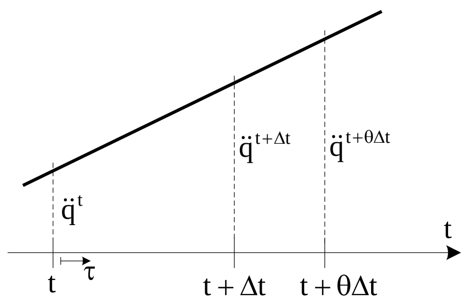
Bedingt stabile Integration: Wenn die obige Feststellung nur in dem Fall $\Delta t \le \Delta t_{kr}$ erfüllt ist.

$\Delta t \le \Delta t_{kr} = \dfrac{T_n}{\pi}$, wobei T_n die kleinste Periodenzeit des Körpers mit *n*-Freiheitsgraden ist.

1.b. Die Wilsonsche θ Methode

Annahme:

Die zweite Ableitung $\underline{\underline{\ddot{q}}}$ ist eine lineare Funktion der Zeit *t*.



Die lineare Änderung zu einem beliebigen Zeitpunkt $(t+\tau)$: $\underline{\underline{\ddot{q}}}^{t+\tau} = \underline{\underline{\ddot{q}}}^t \dfrac{\tau}{\theta\Delta t}\left(\ddot{q}^{t+\theta\Delta t} - \underline{\underline{\ddot{q}}}^t\right)$.

Integration des obigen Zusammenhanges nach der Veränderlichen τ:

$$\underline{\underline{\dot{q}}}^{t+\tau} = \underline{\underline{\dot{q}}}^t + \underline{\underline{\ddot{q}}}^t \tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t}\left(\ddot{q}^{t+\theta\Delta t} - \underline{\underline{\ddot{q}}}^t\right),$$

$$\underline{\underline{q}}^{t+\tau} = \underline{\underline{q}}^t + \underline{\underline{\dot{q}}}^t \tau + \frac{1}{2}\underline{\underline{\ddot{q}}}^t \tau^2 + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t}\left(\ddot{q}^{t+\theta\Delta t} - \underline{\underline{\ddot{q}}}^t\right).$$

Für den Zeitschritt wird hier nicht Δt, sondern $\theta\Delta t$ gewählt.

Nach dem Einsetzen von $\tau = (\theta\Delta t)$ in die vorherigen zwei Zusammanhänge:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\underline{\dot{q}}}^{t+\theta\Delta t} = \underline{\underline{\dot{q}}}^t + \dfrac{\theta\Delta t}{2}\left(\ddot{q}^{t+\theta\Delta t} - \underline{\underline{q}}^t\right), \\ \underline{\underline{q}}^{t+\theta\Delta t} = \underline{\underline{q}}^t + \underline{\underline{\dot{q}}}^t \theta\Delta t + \dfrac{\theta^2\Delta t^2}{6}\left(\ddot{q}^{t+\theta\Delta t} + 2\underline{\underline{\ddot{q}}}^t\right). \end{array}\right\}$$

Aus diesen zwei Gleichungen kann man $\ddot{q}^{t+\theta\Delta t}$ und $\underline{\underline{\dot{q}}}^{t+\theta\Delta t}$ mittels $\underline{\underline{q}}^{t+\theta\Delta t}$ ausdrücken:

$$\underline{\underline{\dot{q}}}^{t+\theta\Delta t} = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2}\left(\underline{\underline{q}}^{t+\theta\Delta t} - \underline{\underline{q}}^t\right) - \frac{6}{\theta\Delta t}\left(\underline{\underline{\dot{q}}}^t - 2\underline{\underline{\ddot{q}}}^t\right),$$

$$\ddot{q}^{t+\theta\Delta t} = \frac{3}{\theta\Delta t}\left(\underline{\underline{q}}^{t+\theta\Delta t} - \underline{\underline{q}}^t\right) - 2\underline{\underline{\dot{q}}}^t - \frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{q}^t .$$

Weitere Annahme: auch die Belastung ändert sich linear:

$$f^{t+\theta\Delta t} = \underline{\underline{f}}^{t} + \theta\left(\underline{\underline{f}}^{t+\theta\Delta t} - \underline{\underline{f}}^{t}\right).$$

Nehmen wir die Bewegungsgleichung im Zeitpunkt $(t+\theta\Delta t)$ an:

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\ddot{q}}}^{t+\theta\Delta t} + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{q}}^{t+\theta\Delta t} = \underline{\underline{f}}^{t+\theta\Delta t}.$$

Die Vorgehensweise:

- Setzen wir $\underline{\underline{\ddot{q}}}^{t+\theta\Delta t}$ in die Bewegungsgleichung ein, erhalten wir für die Unbekannten $\underline{\underline{q}}^{t+\theta\Delta t}$ ein lineares algebraisches Gleichungssystem.
- Wenn man die Lösung des Gleichungssystems zurücksetzt, kann man $\underline{\underline{\dot{q}}}^{t+\theta\Delta t}$ und $\underline{\underline{\ddot{q}}}^{t+\theta\Delta t}$ erhalten. Wenn man $\tau = \Delta t$ in die ersten drei Gleichungen einsetzt, ergeben sich auch die Werte $\underline{\underline{q}}^{t+\Delta t}$, $\underline{\underline{\dot{q}}}^{t+\Delta t}$ und $\underline{\underline{\ddot{q}}}^{t+\Delta t}$.

Startbedingung: man muss die Werte $\underline{\underline{q}}^{0}, \underline{\underline{\dot{q}}}^{0}$ und $\underline{\underline{\ddot{q}}}^{0}$ kennen. Es ist keine Startbedingung nötig.

Das Verfahren ist eine bedingt stabile Vorgehensweise, wenn: $\theta \geq 1{,}37$

In der Praxis benutzt man üblicherweise $\theta = 1{,}4$.

Die Anzahl der erforderlichen Operationen pro Zeitschritt ist bei den Methoden *1.a.* und *1.b.*: $\alpha m_k n$ (Schätzung)

n - die Freiheitsgrade des Systems,
m_k - die halbe Bandbreite der Steifigkeismatrix $\underline{\underline{K}}$,
$\alpha \geq 2$.

2. Eigenvektorsuperposition-Verfahren / Modenüberlagerungsmethode

Wir wollen die Anzahl der Operationen so vermindern, dass die Koeffizientenmatrices der Bewegungsgleichung auf eine diagonale Matrix transformiert werden.

Einführung der Transformation: $\underline{\underline{q}}(t) = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{x}}(t)$,

wobei $\underline{\underline{P}}$ eine $(n \times n)$ Matrix (jetzt noch unbekannte Matrix) und

$\underline{\underline{x}}(t)$ eine Spaltenmatrix, die die neuen Veränderlichen enthält, sind.

Multiplizieren wir die Bewegungsgleichung von der linken Seite mit $\underline{\underline{P}}^T$:

$$\underbrace{\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{P}}}_{\underline{\underline{\tilde{M}}}}\,\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{\ddot{q}}}(t) + \underbrace{\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{P}}}_{\underline{\underline{\tilde{K}}}}\,\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{q}}(t) = \underbrace{\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{f}}(t)}_{\underline{\underline{\tilde{f}}}},$$

Hier wurde ausgenutzt, dass die Transformationsmatrix $\underline{\underline{P}}$ eine orthogonale Matrix ist: $\underline{\underline{P}}^T = \underline{\underline{P}}^{-1}$.

In Kurzschreibweise: $\underline{\underline{\tilde{M}}}\,\underline{\underline{\ddot{x}}}(t) + \underline{\underline{\tilde{K}}}\,\underline{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{\tilde{f}}}(t)$.

Man sucht die Transformationsmatrix $\underline{\underline{P}}$, die die Bandbreite der Matrizen $\underline{\underline{M}}$ und $\underline{\underline{K}}$ optimal vermindert.

Verfahren zum Finden / zur Bestimmung der Transformationsmatrix $\underline{\underline{P}}$:

Die Bewegungsgleichung eines ungedämpften freien Schwingungssystems: $\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\ddot{q}}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{0}}$.

Die Lösung: $\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{\varphi}} \sin \alpha t$, vagy $\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{\varphi}} \cos \alpha t$.

Nach dem Einsetzen in das Bewegungsgleichungssystems: $\left(-\alpha^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}\right)\underline{\underline{\varphi}} = \underline{\underline{0}}$.

Aus der Eigenwertaufgabe erhält man der Anzahl der Systemfreiheitsgrade entsprechend viele Eigenfrequenzen und Eigenvektoren / Moden.

Lösung der Eigenwertaufgabe: Eigenfrequenzen und Eigenvektoren / Moden.

Bezeichnung: $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \ \dots \ \le \alpha_n$, wobei α_i die i-te Eigenfrequenz ist.

$\left(\alpha_1 \underline{\underline{\varphi}}_1\right), \left(\alpha_2 \underline{\underline{\varphi}}_2\right), \left(\alpha_3 \underline{\underline{\varphi}}_3\right) \ \dots \ \left(\alpha_n \underline{\underline{\varphi}}_n\right)$, wobei

$\underline{\underline{\varphi}}_i$ der zur i-ten Eigenfrequenz gehörende Eigenvektor ist.

Die Eigenvektoren sind bezüglich der Massenmatrix $\underline{\underline{M}}$ normiert und orthogonal (orthonormiert):

$$\underline{\underline{\varphi}}_i^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\varphi}}_j \begin{cases} = 1, & \text{wenn } i = j, \\ = 0, & \text{wenn } i \ne j. \end{cases}$$

Einführung neuer Matrizen:

$$\underline{\underline{\phi}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\varphi}}_1 & \underline{\underline{\varphi}}_2 & \cdots & \underline{\underline{\varphi}}_n \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{\Omega}}^2 = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & & & & \\ & \alpha_2^2 & & & \\ & & \alpha_3^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha_n^2 \end{bmatrix}$$ - eine diagonale Matrix.

Die Eigenwertaufgabe: $\underline{\underline{\phi}}^T \ /$

$$-\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\phi}}\,\underline{\underline{\Omega}}^2 + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\phi}} = \underline{\underline{0}},$$

$$-\underbrace{\underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\phi}}}_{\underline{\underline{E}}}\,\underline{\underline{\Omega}}^2 + \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\phi}} = \underline{\underline{0}}.$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{\Omega}}^2 = \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\phi}}.$$

Nehmen wir die folgende Transformation: $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{\phi}} \quad \Rightarrow \quad \underline{q}(t) = \underline{\underline{\phi}}^T \underline{x}(t)$.

Nach dem Einsetzen in die Bewegungsgleichung: $\ddot{\underline{x}}(t) + \underline{\underline{\Omega}}^2 \underline{x}(t) = \underline{\underline{\phi}}^T \underline{f}(t) = \underline{r}(t)$.

Anfangsbedingungen: $\underline{x}^0 = \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{q}^0, \quad \dot{\underline{x}}^0 = \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{M}}\,\dot{\underline{q}}^0$.

Die Koeffizientenmatrix von $\ddot{\underline{x}}(t)$ ist eine Einheitsmatrix und die Koeffizientenmatrix von $\underline{x}(t)$ ist eine Diagonalmatrix.

$$\Downarrow$$

Das Bewegungsgleichungssystem zerfällt so in n, voneinander unabhängigen Differentialgleichungen. Diese Differentialgleichungen löst man gesondert:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}_i(t) + \alpha_i^2 x(t) = r_i(t), \\ &r_i(t) = \underline{\underline{\varphi}}_i^T f(t). \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, 3, \ \dots \ n.$$

Anfangsbedingungen: $x_i\big|_{t=0} = \underline{\underline{\varphi}}_i^T \underline{\underline{M}}\,\underline{q}^0, \quad \dot{x}_i\big|_{t=0} = \underline{\underline{\varphi}}_i^T \underline{\underline{M}}\,\dot{q}^0$.

Die allgemeine Lösung für die einzelnen Differentialgleichungen:

$$x_i(t) = \underbrace{a_i \sin\alpha_i t + b_i \cos\alpha_i t}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{\frac{1}{\alpha_i}\int_{\tau=0}^{t} r_i(\tau)\sin\alpha_i(t-\tau)\,d\tau}_{\text{partikuläre Lösung}}.$$

Lösung der ursprünglichen Aufgabe: $\underline{q}(t) = \sum_{i=1}^{n} \underline{\underline{\varphi}}_i x_i(t)$.

$\underline{\underline{\varphi}}_i$ - Eigenvektoren / Moden.

Der Gedankengang der Modenüberlagerungsmethode:

- Lösung des Eigenwertproblem: Eigenwerte / Eigenfrequenzen, Eigenvektoren / Moden.
- Lösung des zerfallenen Bewegungsgleichungssytems.
- Superposition der vorherigen Lösungen.

8.4. Anwendung der FEM zur Lösung von Schwingungsaufgaben

Erregung (Krafterregung): die Belastung des zu untersuchenden Systems ändert sich periodisch mit der Zeit. Erregung $\equiv$ periodische Belastung.

a) Harmonische Erregung:

Bewegungsgleichung: $\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{q}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{q} = \underline{\underline{f_0}} \cos \omega t$,

wobei $\underline{\underline{f_0}}$ die Amplituden der Erregung enthält und ω die Kreisfrequenz der Erregung ist.

Das Finden der Lösung: $\underline{q} = \underline{\underline{q_0}} \cos \omega t$.

$\underline{\underline{q_0}}$ - die Schwingungsamplituden in den Knotenpunkten.

Nach dem Einsetzen der Lösung in das Bewegungsgleichungssystem:

$$\underbrace{\left(-\omega^2\,\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}\right)}_{\underline{\underline{Z}}(\omega^2)} \underline{q}_{=0} = \underline{f}_{=0} ,$$

wobei $\underline{\underline{Z}}(\omega^2)$ die dynamische Steifigkeitsmatrix ist.

$\underline{\underline{Z}}(\omega^2)\,\underline{q}_{=0} = \underline{f}_{=0}$ - ein lineares algebraisches Gleichungssystem für die Amplituden der Knotenpunktverschiebungen.

Lösung des Gleichungssystems: $\underline{q}_{=0} = \left[\underline{\underline{Z}}(\omega^2)\right]^{-1} \underline{f}_{=0}$.

Voraussetzung für die Lösung: $\omega^2 \neq \alpha_i^2$, $\left(i = 1, 2, 3, \ldots, n\right)$.

b) Freie Schwingungen, Eigenwertaufgabe:

Definition der freien Schwingung: $\underline{\underline{f}}\left(t\right) = \underline{0}$.

Das Bewegungsgleichungssystem einer freien ungedämpften Schwingung: $\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{q}}(t) + \underline{\underline{K}}\,\underline{q}(t) = \underline{0}$.

Die Spaltenmatrix $\underline{q}(t)$ enthält *n* unbekannte verallgemeinerte Verschiebungsfunktionen.

Die Lösung: $\underline{q} = \underline{\varphi} \sin \alpha t$, wobei $\underline{\varphi}$ der Eigenvektor / die Mode und α die Eigenkreisfrequenz sind.

Nach dem Einsetzen der Lösung in das Bewegungsgleichungssystem:

$$\left(-\alpha^2\,\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}\right)\underline{\varphi} = \underline{0} .$$

Man erhält ein homogenes lineares algebraisches Gleichungssystem für die Koordinaten von $\underline{\varphi}$.

Voraussetzung für die Existenz der nichttrivialen Lösung: $\det\left|\underline{\underline{K}} - \alpha^2\,\underline{\underline{M}}\right| = p\left(\alpha^2\right) = 0$.

$p\left(\alpha^2\right)$ das charakteristische Polynom (ein Polynom *n*-ten Grades für die Veränderliche α^2).

Die Wurzeln des charakteristischen Polynoms sind die Eigenkreisfrequenzen des Schwingungssystems:

$$0 \leq \alpha_1^2 \leq \alpha_2^2 \leq \ldots \leq \alpha_m^2 .$$

α_i^2 ist eine positive reale Zahl, wenn die Matrizen $\underline{\underline{K}}$ und $\underline{\underline{M}}$ positiv definite Matrizen sind.

Zu jeder Eigenkreisfrequenz gehört ein Eigenvektor:

$$\left(\underline{\underline{K}} - \alpha_i^2\,\underline{\underline{M}}\right)\underline{\varphi}_i = \underline{0} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\varphi}_{=i} = \ldots \quad \text{, wobei } \left(i = 1, 2, \ldots, n\right).$$

c) Der Ortogonalitätssatz:

Nehmen wir an, dass $\alpha_i \neq \alpha_j$.

Zu jeder Eigenkreisfrequenz gehört ein Eigenvektor: $\alpha_i \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\varphi}}_i$, und $\alpha_j \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\varphi}}_j$.

Bemerkung: wenn man $\underline{\underline{\varphi}}_i, \underline{\underline{\varphi}}_j$ mit Konstanten multipliziert, erhält man auch Eigenvektoren.

$$\underline{\underline{\varphi}}_j^T \; / \quad \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\varphi}}_i = \alpha_i^2 \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\varphi}}_i \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\varphi}}_j^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\varphi}}_i = \alpha_i^2 \underline{\underline{\varphi}}_j^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\varphi}}_i \,,$$
$$\underline{\underline{\varphi}}_i^T \; / \quad \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\varphi}}_j = \alpha_j^2 \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\varphi}}_j \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\varphi}}_i^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\varphi}}_j = \alpha_j^2 \underline{\underline{\varphi}}_i^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\varphi}}_j \,.$$

Da die Matrizen $\underline{\underline{K}}$ und $\underline{\underline{M}}$ symmetrisch sind, gelten die Zusammenhänge $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}^T$ und $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}}^T$.

$$0 = \left(\alpha_i^2 - \alpha_j^2\right) \underline{\underline{\varphi}}_i^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\varphi}}_j \,.$$

Wenn $\alpha_i \neq \alpha_j \;\; (i \neq j) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\varphi}}_i^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\varphi}}_j = 0$.

Die Eigenvektoren sind in Bezug auf die Massenmatrix orthogonal.

Wenn $\alpha_i = \alpha_j \;\; (i = j)$, dann gilt $\underline{\underline{\varphi}}_i^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\varphi}}_i = 1$.

Die Eigenvektoren sind in Bezug auf die Massenmatrix normiert.

Die Analogie der „normiert“ Eigenschaft im 3D Vektorraum:

Forderung: Der Vektor muss ein Einheitsvektor sein.
Die zweite Bedingung gibt den Eigenvektor $\underline{\underline{\varphi}}_i$ eindeutig an.

Nehmen wir an, dass $i = j$.

$$\underline{\underline{\varphi}}_i^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\varphi}}_i = \alpha_i^2 \underbrace{\underline{\underline{\varphi}}_i^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\varphi}}_i}_{=1} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_i^2 = \underline{\underline{\varphi}}_i^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\varphi}}_i \,.$$

Im Kentnis des Eigenvektors φ_i kann man die Eigenfrequenz α_i bestimmen.

Die Verallgemeinerung des Ergebnisses:

Eingeführt werden: $\underline{\underline{\Phi}} = \left[\underline{\underline{\varphi}}_1 \quad \underline{\underline{\varphi}}_2 \quad \ldots \quad \underline{\underline{\varphi}}_n \right]$, $\qquad \underline{\underline{\Omega}}^2 = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n^2 \end{bmatrix}$.

n - die Freiheitsgrade des Systems.

$$\underline{\underline{\Phi}}^T / \quad -\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\Phi}}\,\underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\Phi}} = \underline{0}\,.$$

$$-\underbrace{\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\Phi}}}_{\underline{\underline{E}}}\,\underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\Phi}} = \underline{0} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\Omega}}^2 = \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\Phi}}\,.$$

Wenn die Anzahl n der Eigenvektoren des Systems bekannt ist, dann kann man jede Eigenfrequenz bestimmen.

FACHLITERATUR

[1] Bathe K. – J.: *Finite element procedures*, Prentice Hall, Inc. 1996.

[2] Szabó B., Babuška I.: *Finite element analysis*, John Wiley & Sons, Inc. 1991.

[3] Altenbach J., Fischer U.: *Finite-element Praxis*, Fachbuchverlag Leipzig, 1991.

[4] Matthews F. L., Davies G. A. O., Hitchings D., Soutis C.: *Finite Element modelling of composite materials and structures*, Woodhead Ltd., 2000.

[5] Budynas R. G.: *Advanced Strength and Applied Stress Analysis*, Mc. Graw-Hill, 1999.

[6] Kleiber M.: *Handbook of Computational Solid Mechanics*, Springer Verlag, 1998.

[7] Krätzig W. B., Basar Y.: *Tragwerke 3, Theorie und Anwendung der Methode der Finiten Elemente*, Springer Verlag, 1997.

[8] Papastavridis J. G.: *Tensor calculus and analytical dynamics*, CRC Press, 1999.

[9] Reddy J. N. : *Mechanics of laminated composite plates and shells* – Theory and Analysis, CRC Press, 2004.

[10] Barbero E.J.: *Finite Element Analysis of Composite Materials*, CRC Press, 2008.

[11] Berlioz A., Trompette Ph.: *Solid Mechanics using the Finite Element Method*, John Wiley & Sons Inc., 2010.

[12] Smith I. M., Griffiths D. V.: *Programming the Finite Element Method*, John Wiley & Sons Inc., 2004.

[13] Zienkiewicz O. C., Taylor R.L.: The *Finite Element Method, Vol. 1.: The Basis*, Butterworth – Heinemann, 2000.

[14] Zienkiewicz O. C., Taylor R.L.: *The Finite Element Method, Vol. 2.: Solid Mechanics*, Butterworth – Heinemann, 2000.