

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen der Elastizitätstheorie	6
1.1. Grundbegriffe	6
1.2. Festigkeitszustände	7
1.2.1. Der Verschiebungszustand	7
1.2.2. Der Verzerrungszustand	7
1.2.3. Der Spannungszustand	8
1.2.4. Formänderungsenergie	11
1.3. Grundgleichungen der Elastizitätslehre	11
1.3.1. Gleichgewichtsbedingungen	11
1.3.2. Die kinematischen Gleichungen	11
1.3.3. Das Stoffgesetz für linear elastisches Material	12
1.3.4. Die Randbedingungen	13
1.3.5. Grundgleichungen der Elastizitätstheorie	13
2. Energieprinzipien der Elastizitätstheorie	15
2.1. Kinematisch und statisch mögliche Felder	15
2.1.1. Das kinematisch mögliche Verschiebungsfeld	15
2.1.2. Das statisch mögliche Spannungsfeld	15
2.2. Das Prinzip der virtuellen Arbeit	15
2.3. Das Prinzip des Minimums der gesamten potentiellen Energie	16
2.4. Das Variationsprinzip von Lagrange	17
2.5. Die <i>Ritzsche</i> Methode	17
2.6. Anwendung auf ebene Tragwerke	18
2.7. Das Prinzip des Minimums der gesamten komplementären Energie	21
2.8. Das Variationsprinzip von <i>Castigliano</i>	22
3. Das Verschiebungsverfahren der Finiten Elemente Methode (FEM)	23
3.1. Der Aufbau der Verschiebungsmethode	23
3.1.1. Bezeichnungen	23
3.1.2. Die Formulierung der elastischen Randwertaufgabe	24
3.1.3. Die Näherungslösung für die gestellte Aufgabe	24
3.2. Konvergenz der Finite Elemente Methode, Allgemeiner Aufbau der Finite Elemente Programmsysteme	34
3.3. Stabtragwerke	36
3.3.1. Biegestab-Theorien	36
3.3.2. Räumliche Stabtragwerke, räumliches Stabelement	38
3.3.3. Ebene Stabtragwerke - ebenes Stabelement	41
3.3.4. Ebene Fachwerke, ebene Zug-Druck Stabelemente	47
3.4. Der allgemeine Aufbau der FE-Programmsysteme	52
4. 2D-Aufgaben der Elastizitätslehre	53
4.1. Definition der 2D-Aufgaben	53
4.1.1. Ebener Verzerrungszustand (EVZ)	53
4.1.2. Verallgemeinerter ebener Spannungszustand (ESZ)	54
4.1.3. Rotationssymmetrische / Axialsymmetrische Aufgaben (RSA / ASA)	55

4.1.4. Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen den 2D-Aufgaben	56
4.2. Die isoparametrische Näherung / Interpolation	57
4.3. Interpolationsmethoden	61
4.3.1. Die <i>Lagrangesche</i> Interpolation	61
4.3.2. Die <i>Hermiteische</i> Interpolation	62
4.4. Vergleich der „traditionellen“ und der isoparametrischen finiten Elemente	62
4.5. Lineare und quadratische finite Elemente zur Lösung von 2D-Aufgaben	63
4.6. Numerische Integration	69
4.7. Bemerkungen zu 2D-Aufgaben	71
4.8. Aufgaben mit rotationssymmetrischer Geometrie und mit nicht-rotationssymmetrischer Belastung	73
4.9 Beispiele	74
5. Verbesserung der FE-Näherung – Erhöhung des Grades der Ansatzfunktionen	78
5.1. Erhöhung des Grades der Ansatzfunktionen bei Zug-Druck Stabelementen	78
5.2. Erhöhung des Grades der Ansatzfunktionen bei Biege-Stabelementen	82
5.3. Verallgemeinerung Erhöhung des Grades der Ansatzfunktionen für den 2D-Fall	84
6. Lösung räumlicher / von 3D-Aufgaben mittels isoparametrischer Elemente	88
6.1. Kurze Wiederholung	88
6.2. Quadratisches Hexaeder-Element – Abbildung, Formfunktionen	88
6.3. Pentaeder-Element – Abbildung, Formfunktionen	89
6.4. Tetraeder-Element – Abbildung, Formfunktionen	90
6.5. Die Steifigkeitsmatrix der Elemente im globalen x,y,z -Koordinatensystem	91
6.6. Der Knotenpunktbelastungsvektor aus Volumenkräften im globalen x,y,z -Koordinatensystem	94
6.7. Der Knotenpunktbelastungsvektor aus Flächenkräften im globalen x,y,z -Koordinatensystem	94
6.8. Berücksichtigung der elastischen Bettung	97
6.9. Berücksichtigung der Randbedingungen bei räumlichen / 3D Aufgaben	98
7. Versteifte Platten und Schalenkonstruktionen	100
7.1. Biegetheorien von Schalen / Platten	100
7.1.1. Die <i>Kirchhoff-Lovesche</i> Theorie	100
7.1.2. Die <i>Reissner-Mindlinsche</i> Theorie	101
7.2. Flächenspannungen und Flächenmomente	103
7.3. Isoparametrisches Plattenelement	104
7.4. Modellierung der exzentrischen Kopplung	106
7.5. Isoparametrisches Schalenelement	107
7.6. Geschichtetes Composite-Schalenelement	112
8. Finite Elemente Lösung für Dynamikaufgaben	115
8.1. Schwingungssysteme mit mehreren Freiheitsgraden	115
8.2. Energieprinzipien für bewegliche Kontinua	115
8.3. Anwendung der Finite-Elemente-Methode – das Bewegungsgleichungssystem und seine Lösung	117
8.4. Anwendung der FEM zur Lösung von Schwingungsaufgaben	122
FACHLITERATUR	124

ANHANG: Mathematik	125
A.1. Matrizenalgebra	125
A.2. Vektorenalgebra	127
A.3. Definition und Bildung von Tensoren	130
A.4. Koordinatensysteme	134
A.4.1. Descartessches / Kartesisches Koordinatensystem	134
A.4.2. Zylinderkoordinatensystem	135
A.5. Koordinaten Transformation	135
A.6. Differenzierung nach dem Ort	136
A.6.1. Die Ableitungen nach dem Ort eines Vektors in kartesischen Koordinaten	136
A.6.2. Die Ableitungen nach dem Ort eines Vektors in Zylinderkoordinaten	137
A.7. Der Hamiltonsche Differentialoperator (nabla)	137
A.7.1. Divergenz (skalare Multiplikation)	137
A.7.2. Rotation (Kreuzprodukt)	138
A.7.3. Gradient (dyadische Multiplikation)	139
A.8. Grundgedanke der Variationsrechnung	139
BERECHNUNGSAUFGABEN	142
B.1. Ebenes Fachwerk	142
B.2. Räumliches Fachwerk	144
B.3. Ebenes Tragwerk mit ebener Belastung	146
B.4. Ebenes Tragwerk mit räumlicher Belastung	148
B.5. Ebener Verzerrungszustand – Bett und Damm eines Flusses	150
B.6. Ebener Verzerrungszustand - Dickwandiges Rohr	152
B.7. Ebener Spannungszustand - Rechteckscheibe mit Bohrung	155
B.8. Ebener Spannungszustand - Schnell rotierende Kreisscheibe mit Bohrungen	157
B.9. Rotationssymmetrische Aufgabe – gekerbtes Zug-Probestück	160
B.10. Zylinder-Behälter – Rotationsschale	162
B.11. Schalenmodell eines dünnwandigen Balkens	165
B.12. Räumliche Aufgabe – Damm eines Reservoir-Beckens	168
B.13. Räumliche Aufgabe – Wellenende	171
B.14. Dynamische Aufgabe - Eigenfrequenzen einer Glocke	173