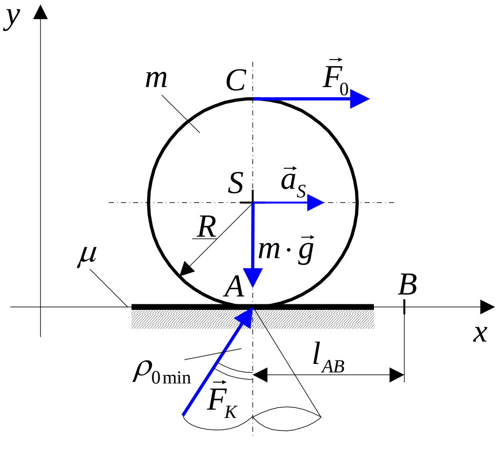
SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM — **ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK**

10. MECHANIKA-MOZGÁSTAN GYAKORLAT
(kidolgozta: Németh Imre óraadó tanár, Bojtár Gergely egyetemi ts., Szüle Veronika, egy. ts.)

Gördülő mozgás

10/1. feladat: Gördülő mozgás



$$\rho_{0\min} = arctg\,\mu_{0\min}$$

Adott:

$\vec a_S = (8\,\vec i)\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

$g \cong 10\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

$m = 30\text{ kg}$,

$l_{AB} = 2\text{ m}$,

$R = 0{,}1\text{ m}$.

Feladat:

a) Mekkora $\vec F_0$ erő szükséges a gyorsuló mozgás fenntartásához?

b) Határozza meg a tárcsára ható $\vec F_K$ kényszererő nagyságát!

c) Milyen $\mu_{0\min}$ nyugvásbeli súrlódási tényező szükséges a csúszásmentes, gördülő mozgás megvalósulásához?

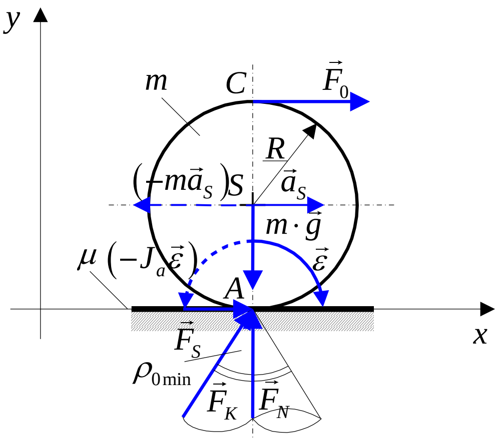
d) Mekkora W_{AB} munkát végez a tárcsára ható erőrendszer az $l_{AB} = 2\text{ m}$ távolságon?

A mozgás iránya alapján a tárcsa szöggyorsulása:

$$\vec\varepsilon = -\varepsilon\vec k = -\frac{a_S}{R}\vec k = -\frac{8}{0{,}1}\vec k = (-80\,\vec k)\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

A tárcsára ható kényszererőt vegyük fel $\vec F_K = \vec F_S + \vec F_N = (F_S\vec i + F_N\vec j)$ alakban.

a) Az A pontra felírt perdület tétel alapján:



$$\frac{d\vec\pi_A}{dt} = \dot{\vec\pi}_A = \vec M_A$$

$$\underline{\underline{J}}_A\vec\varepsilon + \underbrace{\vec\omega\times\vec\pi_A}_{=\vec 0,\ mert\ \|-ak} + \underbrace{\vec r_{AS}\times m\vec a_A}_{=\vec 0,\ mert\ \|-ak} = \vec M_A$$

$\vec{\omega}$ *és* $\vec{\pi}_A$ $\| -ak\ mert:$

$$\vec{\pi}_A = \underline{\underline{J}}_A \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}\left(l^2+15R^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}\left(l^2+3R^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}mR^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega\frac{3}{2}mR^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{J}}_A \vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}\left(l^2+15R^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}\left(l^2+3R^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}mR^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon\underbrace{\frac{3}{2}mR^2}_{J_a} \end{bmatrix} = J_a\vec{\varepsilon}$$

$$J_a\vec{\varepsilon} = \vec{M}_A$$

$$\left(-J_a\varepsilon\,\vec{k}\right) = \left(-F_0 2R\,\vec{k}\right) \quad /\cdot\vec{k}$$

$$(1.)\quad -J_a\varepsilon = -F_0 2R$$

$$F_0 = \frac{J_a\varepsilon}{2R} = \frac{\left(\frac{3}{2}mR^2\right)\varepsilon}{2R} = \frac{1{,}5\cdot 30\cdot 0{,}1^2\cdot 80}{2\cdot 0{,}1} = 180\ \text{N}$$

$$\vec{F}_0 = \left(180\,\vec{i}\ \right)\text{N}$$

b) Az impulzus tétel (a kinetika alaptörvénye) alapján:

$$\vec{F} = m\,\vec{a}_S$$

$$\left(\vec{F}_0 + \vec{G} + \vec{F}_K\right) = m\,\vec{a}_S$$

$$\left(F_0\,\vec{i} - mg\,\vec{j} + F_S\vec{i} + F_N\vec{j}\right) = \left(m\,a_S\,\vec{i}\right) \quad /\cdot\vec{i} \quad /\cdot\vec{j}$$

$$(1.)\ F_0 + F_S = m\,a_S \qquad\qquad (2.)\ -mg + F_N = 0$$

$$F_S = m\,a_S - F_0 = 30\cdot 8 - 180 = 60\ \text{N} \qquad\qquad F_N = mg = 30\cdot 10 = 300\ \text{N}$$

$$\vec{F}_K = F_S\vec{i} + F_N\vec{j} = \left(60\,\vec{i} + 300\,\vec{j}\right)\text{N}$$

Ellenőrzés: írjuk fel a perdület tételt a tárcsa S súlypontjára

$$\underline{\underline{J}}_S\vec{\varepsilon} + \underbrace{\vec{\omega}\times\vec{\pi}_S}_{=\vec{0},\ mert\ \|-ak} = \vec{M}_S$$

$\vec{\omega}$ *és* $\vec{\pi}_S$ $\| - ak$ *mert*:

$$\vec{\pi}_S = \underline{\underline{J}}_S \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}\left(l^2+3R^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}\left(l^2+3R^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega\frac{1}{2}mR^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{J}}_S \vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}\left(l^2+3R^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}\left(l^2+3R^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon\underbrace{\frac{1}{2}mR^2}_{J_S} \end{bmatrix} = J_S \vec{\varepsilon}$$

$$J_S \vec{\varepsilon} = \vec{M}_S$$

$$\left(-J_S \varepsilon\, \vec{k}\right) = \left(-F_0 R\, \vec{k}\right) + \left(F_S R\, \vec{k}\right) \quad / \cdot \vec{k}$$

$$(1.) \quad -J_S \varepsilon = -F_0 R + F_S R$$

$$F_S = F_0 - \frac{J_S \varepsilon}{R} = F_0 - \frac{\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\varepsilon}{R} = 180 - \frac{0{,}5 \cdot 30 \cdot 0{,}1^2 \cdot 80}{0{,}1} = 180 - 120 = 60 \text{ N}$$

c) A csúszásmentes gördüléshez szükséges minimális nyugvásbeli súrlódási tényező:

$$F_S = \mu_{0\min} F_N = 60 \text{ N}$$

$$\mu_{0\min} = \frac{F_S}{F_N} = \frac{60}{300} = 0{,}2$$

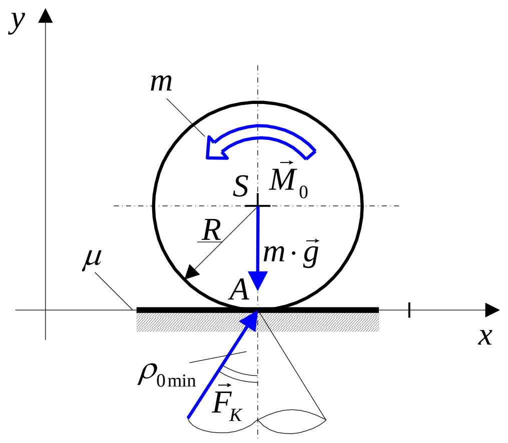
d) Az l_{AB} szakaszon végzett munka: W_{AB}

$$W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} P\, dt = \int_{t_A}^{t_B} \left(\vec{F}_0 \cdot \vec{v}_C + \underbrace{\vec{G} \cdot \vec{v}_S}_{=0,\, mert \perp -ek} + \underbrace{\vec{F}_K \cdot \vec{v}_A}_{=\vec{0}} \right) dt = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}_0 \cdot 2\vec{v}_S\, dt$$

$$W_{AB} = 2\vec{F}_0 \cdot \int_{t_A}^{t_B} \vec{v}_S\, dt = 2\vec{F}_0 \cdot \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} d\vec{r} = 2\vec{F}_0 \cdot \left(\vec{r}_B - \vec{r}_A\right) = 2\vec{F}_0 \cdot \Delta\vec{r}_{AB} = 2\left(F_0 \vec{i}\right) \cdot \left(l_{AB} \vec{i}\right) =$$

$$= 2F_0 l_{AB} = 2 \cdot 180 \cdot 2 = 720 \text{ J}$$

10/2. feladat: Gördülő mozgás



Adott:

$\vec{M}_0 = \left(M_0 \cdot \vec{k}\right) = \left(36\,\vec{k}\right)$ Nm

$g \cong 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$,

$m = 20$ kg,

$R = 0{,}3$ m,

$J_S = 1{,}2$ kgm^2,

$\mu = 0{,}3$.

Feladat:

a) Mekkora a korong $\vec{\varepsilon}$ szöggyorsulása és S pontjának $\vec{a}_S$ gyorsulása?

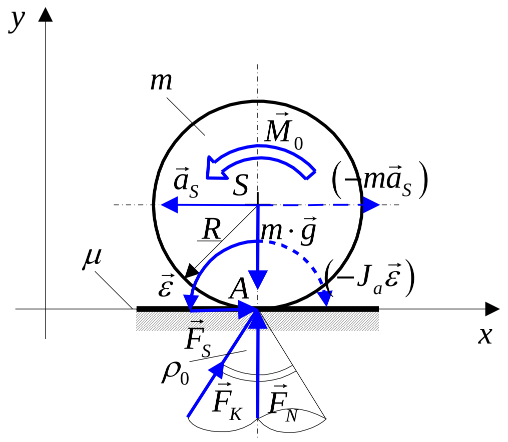
b) Határozza meg a korongra ható $\vec{F}_K$ kényszererő nagyságát!

c) Mekkora lehet a nyomaték legnagyobb értéke - $\vec{M}_{0\max}$ - , hogy a korong még éppen ne csússzon meg, ha a nyugvásbeli súrlódási tényező értéke $\mu_0 = tg\rho_0 = 0{,}4$?

A korong síkmozgást végez, ezért a korong szöggyorsulása $\vec{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \vec{k}$ irányítású, és ezzel összhangban $\vec{a}_S = -a_S \vec{i}$.

A korongra ható kényszer erőt vegyük fel $\vec{F}_K = F_S \vec{i} + F_N \vec{j}$ alakban.

a) Az A pontra felírt perdület tétel alapján:



$$\frac{d\vec{\pi}_A}{dt} = \dot{\vec{\pi}}_A = \vec{M}_A$$

$$\underline{\underline{J}}_A \vec{\varepsilon} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{\pi}_A}_{=\vec{0},\ mert\ \|-ak} + \underbrace{\vec{r}_{AS} \times m\vec{a}_A}_{=\vec{0},\ mert\ \|-ak} = \vec{M}_A$$

$$J_a \vec{\varepsilon} = \vec{M}_A$$

$$\left(J_a \varepsilon\, \vec{k}\right) = \left(M_0 \cdot \vec{k}\right) \quad / \cdot \vec{k}$$

$$J_a \varepsilon = M_0$$

$$\varepsilon = \frac{M_0}{J_a} = \frac{M_0}{J_S + mR^2} = \frac{36}{1{,}2 + 20 \cdot 0{,}09} = \frac{36}{3} = 12\,\frac{rad}{s^2}$$

$$\vec{\varepsilon} = \left(12\vec{k}\right)\frac{rad}{s^2}$$

$$\vec{a}_S = a_{Se}\vec{i} + \underbrace{a_{Sn}}_{=0}\vec{j} = -\varepsilon R\,\vec{i} = -12 \cdot 0{,}3\,\vec{i} = \left(-3{,}6\,\vec{i}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

b) Az impulzus tétel (a kinetika alaptörvénye) alapján:

$$\vec{F} = m\,\vec{a}_S$$

$$\left(\vec{G} + \vec{F}_K\right) = m\,\vec{a}_S$$

$$\left(-mg\,\vec{j} + F_S \vec{i} + F_N \vec{j}\right) = \left(-m\,a_S\,\vec{i}\right) \quad / \cdot \vec{i} \quad / \cdot \vec{j}$$

$(1)\ F_S = -m\, a_S$ $\qquad$ $(2)\ -mg + F_N = 0$

$F_S = -m\, a_S = -20 \cdot 3{,}6 = -72\ \text{N}\ (\leftarrow)$ $\qquad$ $F_N = mg = 20 \cdot 10 = 200\ \text{N}(\uparrow)$

$$\vec{F}_K = F_S \vec{i} + F_N \vec{j} = \left(-72\,\vec{i} + 200\,\vec{j}\right)\text{N}$$

c) A megcsúszáshoz tartozó határérték: $\vec{M}_{0\max}$

$\mu_0 = 0{,}4$

$$F_{S\max} = \mu_0 F_N = 0{,}4 \cdot 200 = 80\ \text{N}$$

Az előzőek alapján: $F_{S\max} = -ma_{s\max} = -80\ \text{N}\ (\leftarrow)$

$$F_{S\max} = -ma_{s\max} = -mR\varepsilon_{\max} = -80$$

$$\varepsilon_{\max} = \frac{F_{S\max}}{mR} = \frac{80}{20 \cdot 0{,}3} = \frac{40}{3} = 13{,}33\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{\varepsilon}_{\max} = \left(13{,}33\,\vec{k}\right)\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

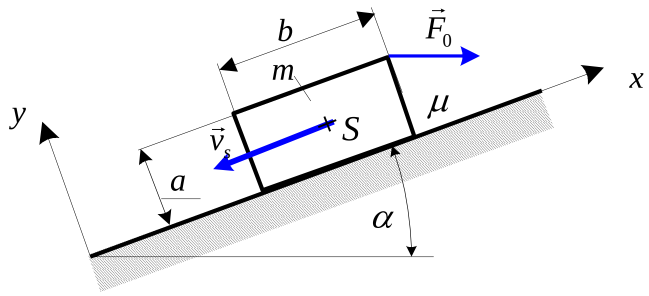
továbbá

$$J_a \varepsilon_{\max} = M_{0\max}$$

$$M_{0\max} = 3 \cdot \frac{40}{3} = 40\ \text{Nm}$$

$$\vec{M}_{0\max} = \left(40\,\vec{k}\right)\text{Nm}$$

10/3. feladat: Hasáb mozgása kényszerpályán



Adott: Az érdes, α hajlásszögű felületen $\vec{v}_S$ pillanatnyi sebességgel lefelé mozgó m tömegű hasáb.

$\vec{v}_S = \left(-10\,\vec{i}\right)\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$,

$\mu = 0,25$,

$m = 40\ \text{kg}$,

$g = 10\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $\alpha = 30^\circ$,

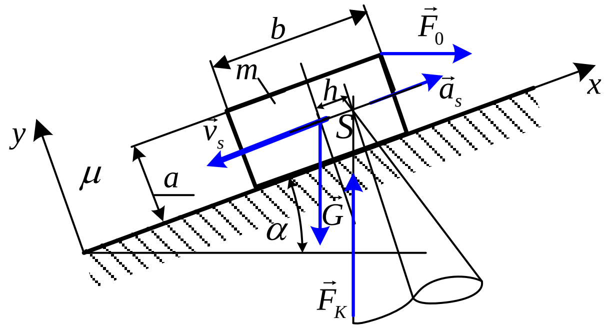
$a = 1\,\text{m}$, $b = 2\,\text{m}$,

$\vec{F}_0 = \left(200\,\vec{i} - 100\,\vec{j}\right)\text{N}$.

Feladat: A hasáb súlyponti gyorsulásnak, valamint a hasábra ható kényszererőnek és az erőhatásvonalának meghatározása

a) számítással,
b) szerkesztéssel!

a) A feladat megoldása számítással:



Impulzus tétel:

$$m\,\vec{a}_S = \left(\vec{G} + \vec{F}_0 + \vec{F}_K\right)$$

$$\vec{a}_S = \left(a_S\,\vec{i}\right)$$

$$\vec{F}_0 = \left(F_{0x}\vec{i} + F_{0y}\vec{j}\right),$$

$$\vec{F}_K = \left(\mu F_N\vec{i} + F_N\vec{j}\right).$$

$$\left(m\,a_S\vec{i}\right) = \left(-mg\sin\alpha\vec{i} - mg\cos\alpha\,\vec{j}\right) + \left(F_{0x}\vec{i} + F_{0y}\vec{j}\right) + \left(\mu F_N\vec{i} + F_N\vec{j}\right) \qquad /\cdot\vec{j}\ /\cdot\vec{i}$$

$$(1.)\quad 0 = -mg\cos\alpha + F_{0y} + F_N \quad \Rightarrow F_N = 346,4 + 100 = 446,4\ \text{N}$$

$$(2.)\quad m\,a_S = -mg\sin\alpha + F_{0x} + \mu F_N \quad \Rightarrow a_S = \frac{1}{m}\left(-mg\sin\alpha + F_{0x} + \mu F_N\right),$$

$$a_S = \frac{1}{40}\left(-40\cdot 10\cdot 0,5 + 200 + 0,25\cdot 446,4\right) = 2,91\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A kényszererő: $\vec{F}_K = \left(\mu F_N\vec{i} + F_N\vec{j}\right) = \left(111,6\,\vec{i} + 446,4\,\vec{j}\right)\text{N}$

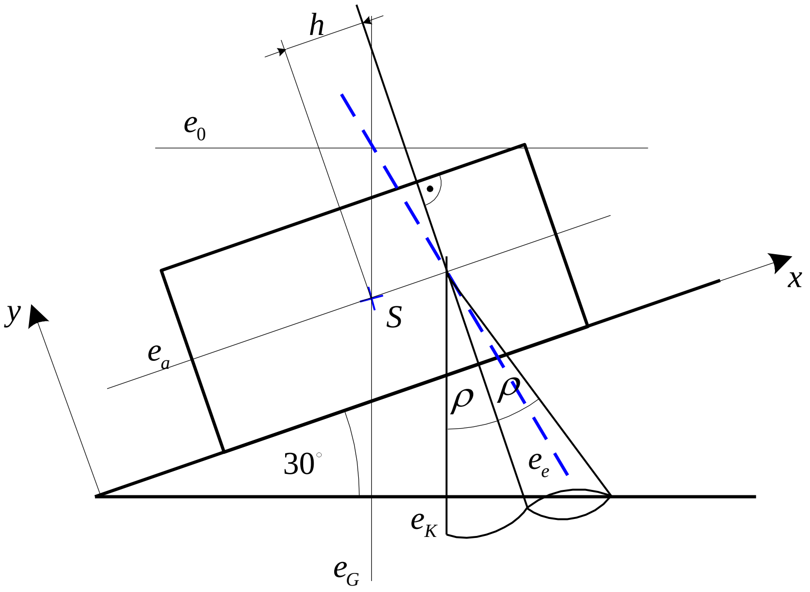
A kényszererő hatásvonala a perdület tételből:

$$\dot{\vec{\pi}}_S = \vec{M}_S,$$

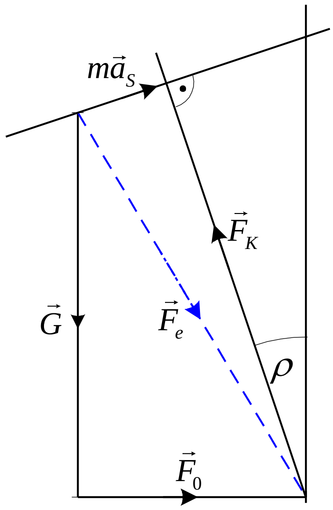
$$0 = -\frac{a}{2}F_{0x} - \frac{b}{2}F_{0y} + h\,F_N$$

$$h = \frac{a}{2}\frac{F_{0x}}{F_N} + \frac{b}{2}\frac{F_{0y}}{F_N} = \frac{1}{2}\frac{200}{446,4} + \frac{2}{2}\frac{100}{446,4} = 0,448\ \text{m}.$$

b) A feladat megoldása szerkesztéssel: $m\,\vec{a}_S = \left(\underbrace{\vec{G} + \vec{F}_0}_{\vec{F}_{er}} + \vec{F}_K \right)$

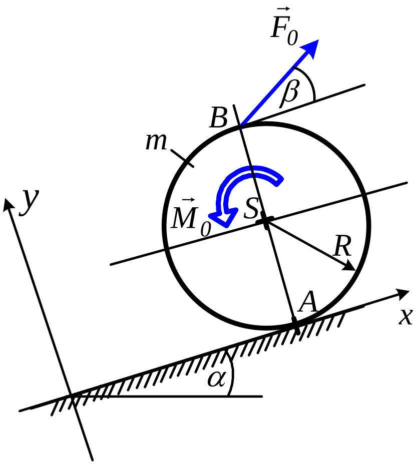


Helyzetábra



Erőábra

10/4. feladat: Gördülő mozgás



Adott:

A tiszta gördülő mozgást végző henger, továbbá

$$\alpha = 30^\circ, \quad m = 15kg, \quad \beta = 45^\circ, \quad F_0 = 40N, \; M_0 = 10Nm, \quad g = 10\frac{m}{s^2}, \; R = 0{,}5m$$

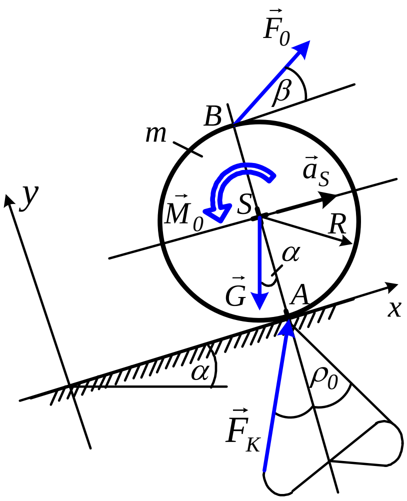
Feladat:

a) A henger S ponti $\vec{a}_S$ gyorsulásának meghatározása.

b) Az A ponti $\vec{F}_K$ kényszer erő meghatározása.

c) A kerék csúszásmentesen gördül-e, ha $\mu_0 = 0{,}3$ a nyugvásbeli súrlódási tényező értéke?

Kidolgozás:



a) A henger S ponti $\vec{a}_S$ gyorsulásának meghatározása:

$$\vec{M}_0 = \left(10\vec{k}\right)Nm$$

$$\vec{F}_0 = F_0\left(\cos\beta\vec{i} + \sin\beta\vec{j}\right) = 40\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) = 20\sqrt{2}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)N$$

$$\vec{G} = mg\left(-\sin\alpha\vec{i} - \cos\alpha\vec{j}\right) = 150\left(-\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right) = 75\left(-\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}\right)N$$

$$\vec{F}_K = \left(F_S\vec{i} + F_N\vec{j}\right) = \left(\mu_0 F_N\vec{i} + F_N\vec{j}\right)$$

$$\vec{\varepsilon} = \left(\varepsilon\vec{k}\right)$$

Perdület tétel az A pontra:

$$\underline{\underline{J}}_A\vec{\varepsilon} + \underbrace{\vec{\omega}\times\underbrace{\left(\underline{\underline{J}}_A\vec{\omega}\right)}_{\parallel\vec{\omega}}}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{r}_{AS}\times m\;\underbrace{\vec{a}_A}_{\parallel\vec{r}_{AS}}}_{\vec{0}} = \vec{M}_A$$

$$J_a\left(\varepsilon\vec{k}\right) = \left(M_0\vec{k}\right) + \left(G_x R\,\vec{k}\right) + \left(-F_{0x}2R\,\vec{k}\right) \qquad /\cdot\vec{k}$$

$$J_a\varepsilon = M_0 + RG\sin\alpha - 2RF_0\cos\beta$$

$$\varepsilon = \frac{M_0 + RG\sin\alpha - 2RF_0\cos\beta}{J_a} = \frac{10+0,5\cdot 75 - 2\cdot 0,5\cdot 20\sqrt{2}}{5,625} = 3,42\frac{rad}{s^2}$$

$$J_a = \frac{3}{2}mR^2 = \frac{3}{2}15\cdot 0,5^2 = 5,625kgm^2$$

$$\vec{\varepsilon} = \left(\varepsilon\vec{k}\right) = \left(3,42\vec{k}\right)\frac{rad}{s^2}$$

$$a_S = a_{Sx} = R\varepsilon = 0,5\cdot 3,42 = 1,71\frac{m}{s^2}$$

$$\vec{a}_S = \left(-1,71\vec{i}\right)\frac{m}{s^2}$$

b) Az *A* ponti $\vec{F}_K$ támasztóerő meghatározása:

Impulzus tétel: $m\vec{a}_S = \vec{F} = \left(\vec{G} + \vec{F}_0 + \vec{F}_K\right)$

$$m\left(-a_S\vec{i}\right) = \left(-mg\sin\alpha\vec{i} - mg\cos\alpha\vec{j}\right) + \left(F_0\cos\beta\vec{i} + F_0\sin\beta\vec{j}\right) + \left(F_S\vec{i} + F_N\vec{j}\right) \quad /\cdot\vec{i}, \vec{j}$$

$$(1.)\ -ma_S = -mg\sin\alpha + F_0\cos\beta + F_S$$

$$(2.)\ 0 = -mg\cos\alpha + F_0\sin\beta + F_N$$

$$(2.)\ F_N = mg\cos\alpha - F_0\sin\beta = 75\sqrt{3} - 20\sqrt{2} = 101,62N$$

$$(1.)\ F_S = mg\sin\alpha - F_0\cos\beta - ma_S = 75 - 20\sqrt{2} - 15\cdot 1,71 = 21,09N$$

$$\vec{F}_K = \left(F_S\vec{i} + F_N\vec{j}\right) = \left(21,09\vec{i} + 101,62\vec{j}\right)N$$

Ellenőrzés:

Perdület tétel az *S* pontra: $\underline{\underline{J}}_S\vec{\varepsilon} + \underbrace{\vec{\omega}\times\underbrace{\left(\underline{\underline{J}}_S\vec{\omega}\right)}_{\parallel\vec{\omega}}}_{\vec{0}} = \vec{M}_S$

$$J_s\left(\varepsilon\vec{k}\right) = \left(M_0\vec{k}\right) + \left(-RF_0\cos\beta\vec{k}\right) + \left(RF_S\vec{k}\right) \quad /\cdot\vec{k}$$

$$J_s\varepsilon = M_0 + -RF_0\cos\beta + RF_S$$

$$F_S = \frac{J_s\varepsilon - M_0 + RF_0\cos\beta}{R} = \frac{1,875\cdot 3,42 - 10 + 0,5\cdot 20\sqrt{2}}{0,5} = 21,09N$$

$$J_s = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}15\cdot 0,5^2 = 1,875kgm^2$$

c) A kerék csúszásmentesen gördül-e, ha $\mu_0 = 0,3$ a nyugvásbeli súrlódási tényező értéke?

A tiszta gördülés feltétele: $\vec{v}_A = \vec{0} \Rightarrow$ nyugvásbeli súrlódás.

Az $\vec{F}_K$ kényszererőnek (támasztóerőnek) a nyugvásbeli súrlódási kúpon belül kell lennie:

$\frac{|F_S|}{|F_N|} \le tg\rho_0 = \mu_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{|F_S|}{|F_N|} = \frac{|21,09|}{|101,62|} = 0,208 < \mu_0 = 0,3 \Rightarrow$ a kerék tisztán gördül!