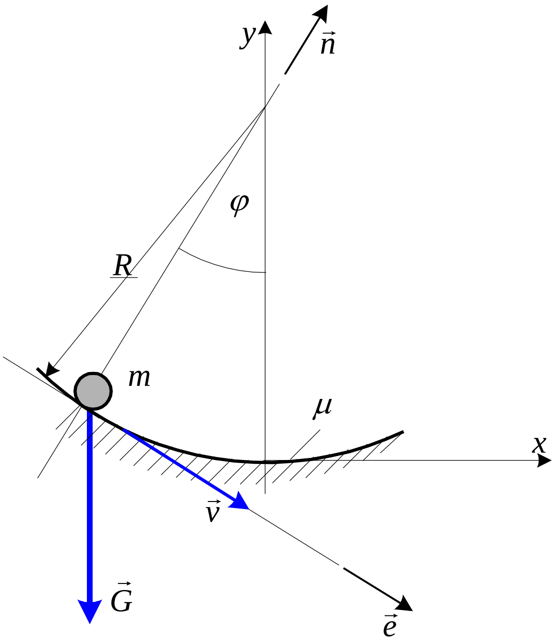
8. MECHANIKA-MOZGÁSTAN GYAKORLAT
(kidolgozta: Németh Imre óraadó tanár, Bojtár Gergely egyetemi ts., Szüle Veronika, egy. ts.)

Tömegpont kinetikája, relatív mozgás kinetikája

8/1. feladat: Tömegpont kinetikája



Adott:

$\vec{G} = \left(-60\ \vec{j}\right)\text{N}$,

$g = 10\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

$\vec{v} = \left(v\,\vec{e}\right),\ v = 2\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$,

$\mu = 0{,}2$,

$\vec{e} = \left(0{,}8\,\vec{i} - 0{,}6\ \vec{j}\right)$,

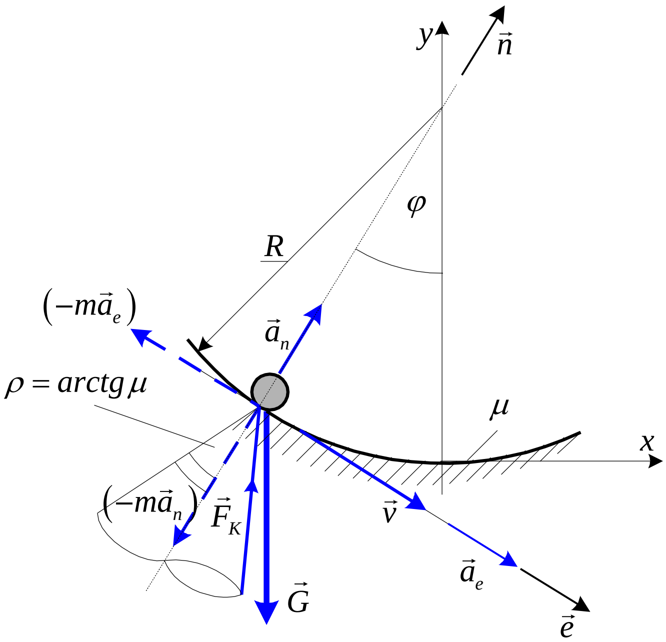
$\vec{n} = \left(0{,}6\,\vec{i} + 0{,}8\ \vec{j}\right)$,

$R = 2\ \text{m}$.

Feladat:

a) Határozza meg a tömegpont gyorsulását!
b) Határozza meg a tömegpontra ható kényszererő nagyságát!

a) A tömegpont gyorsulásának meghatározása:



Impulzus tétel: $\vec{F} = m\,\vec{a}$

$\vec{F} + \left(-m\,\vec{a}\right) = \vec{0}$

$\vec{F} = \vec{G} + \vec{F}_K$

$G_e = \vec{G}\cdot\vec{e} = \left(-60\ \vec{j}\right)\cdot\left(0{,}8\,\vec{i} - 0{,}6\ \vec{j}\right) = 36\ \text{N}$

$G_n = \vec{G}\cdot\vec{n} = \left(-60\ \vec{j}\right)\cdot\left(0{,}6\,\vec{i} + 0{,}8\ \vec{j}\right) = -48\ \text{N}$

$\vec{G} = G_e\vec{e} - G_n\vec{n} = \left(36\,\vec{e} - 48\,\vec{n}\right)\ \text{N}$

$\vec{F}_K = \vec{F}_S + \vec{F}_N = \left(-\mu F_N\ \vec{e} + F_N\ \vec{n}\right)$

$m = \dfrac{G}{g} = \dfrac{60}{10} = 6\ \text{kg}$

$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_n = a_e\vec{e} + a_n\vec{n}$

$a_n = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{2^2}{2} = 2\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$\vec{G}+\vec{F}_K+(-m\,\vec{a})=\vec{0}$$
$$(G_e\vec{e}-G_n\vec{n})+(-\mu F_N\,\vec{e}+F_N\,\vec{n})+(-ma_e\vec{e}-ma_n\vec{n})=\vec{0}$$
$$(36\,\vec{e}-48\,\vec{n})+(-\mu F_N\,\vec{e}+F_N\,\vec{n})+(-ma_e\vec{e}-m\,2\,\vec{n})=\vec{0}\qquad /\cdot\vec{e}/\cdot\vec{n}$$

$(1.)\ 36-\mu F_N-ma_e=0$ $\qquad\qquad$ $(2.)\ -48+F_N-2m=0$

$ma_e=36-\mu\,F_N$ $\qquad \Leftarrow \qquad$ $F_N=48+2m=48+2\cdot 6=60\ \text{N}$

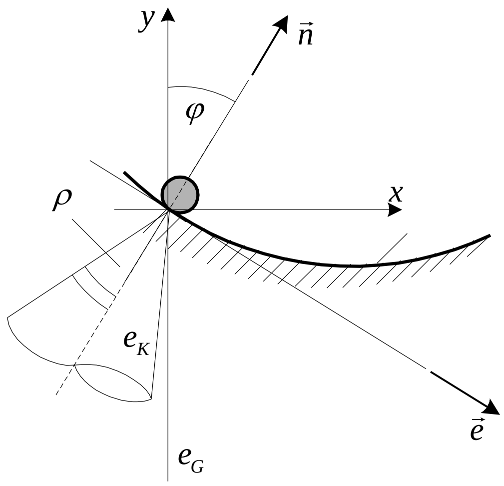
$$a_e=\frac{36-\mu\,F_N}{m}=\frac{36-0,2\cdot 60}{6}=4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A fentiek alapján:

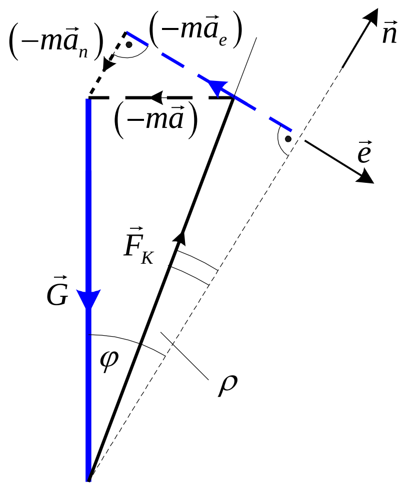
$$\vec{a}=(4\,\vec{e}+2\,\vec{n})\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$
$$\vec{F}_K=\vec{F}_S+\vec{F}_N=-\mu F_N\,\vec{e}+F_N\,\vec{n}=(-0,2\cdot 60\,\vec{e}+60\,\vec{n})=(-12\,\vec{e}+60\,\vec{n})\ \text{N}$$

b) Megoldás szerkesztéssel:

$$\vec{G}+(-\mu F_N\,\vec{e}+F_N\,\vec{n})+(-ma_e\vec{e}-ma_n\vec{n})=\vec{0}$$

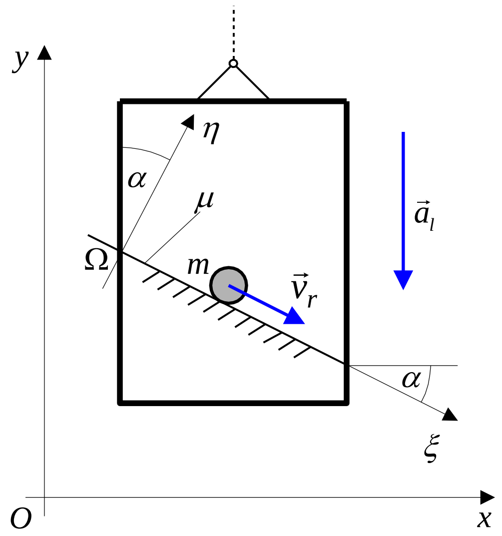


Helyzetábra



Vektorábra

8/2. feladat: Tömegpont kinetikája



Adott:

$m = 4\ \mathrm{kg}$,

$g = 10\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$,

$\vec{v}_{rel} = \left(0{,}8\,\vec{e}_\xi\right)\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$,

$\mu = 0{,}1$,

$\vec{e}_\xi = \left(\cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j}\right)$,

$\vec{e}_\eta = \left(\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}\right)$,

$\alpha = 20^\circ$

$\vec{a}_l = \left(-2\vec{j}\right)\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

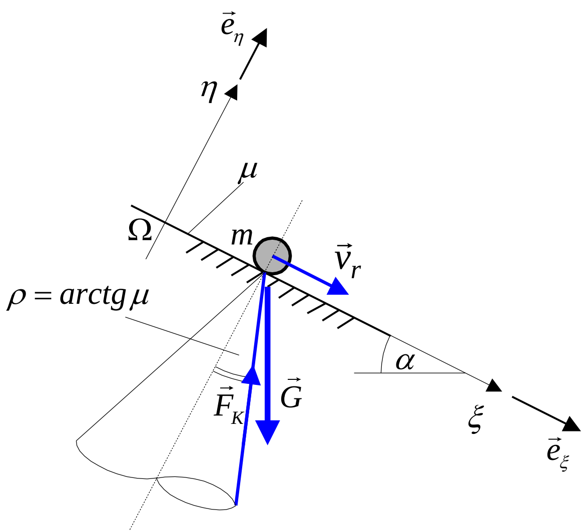
Feladat:

a) Határozza meg a tömegpont relatív gyorsulását!

b) Határozza meg a tömegpontra ható kényszererő nagyságát!

c) Mekkora gyorsulással mozoghat lefelé a lift, hogy a tömegpont még éppen ne váljon el a kényszerpályától, $\vec{a}_l^{\,*} = ?$

A tömegpontra ható abszolút erők (az álló xy koordináta rendszerben ható erők): $\vec{F}_K, \vec{G}$



$\vec{F}_{absz} = \vec{F}_K + \vec{G} = m\,\vec{a}_{absz}$

Kényszererő: $\vec{F}_K$

$\vec{F}_K = \vec{F}_S + \vec{F}_N = \left(-\mu F_N\,\vec{e}_\xi + F_N\vec{e}_\eta\right)$

Súlyerő: $\vec{G}$

$\vec{G} = \left(-mg\,\vec{j}\right)$

$\vec{G} = G_\xi\vec{e}_\xi + G_\eta\vec{e}_\eta$

$G_\xi = \vec{G}\cdot\vec{e}_\xi = \left(-mg\,\vec{j}\right)\cdot\left(\cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j}\right) = mg\sin\alpha$

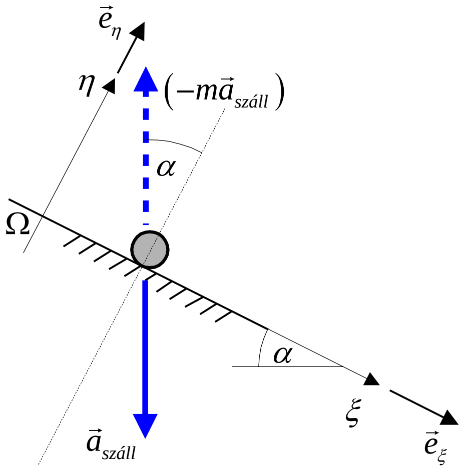
$G_\eta = \vec{G}\cdot\vec{e}_\eta = \left(-mg\,\vec{j}\right)\cdot\left(\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}\right) = -mg\cos\alpha$

$\vec{G} = \left(mg\sin\alpha\vec{e}_\xi - mg\cos\alpha\vec{e}_\eta\right)$

vagy

$$\underset{\xi\eta}{\vec{G}} = \underline{\underline{T}}\,\underset{xy}{\vec{G}} = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -mg\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}mg\sin\alpha\\ -mg\cos\alpha\end{bmatrix}$$

A tömegpontra ható járulékos erők: $\vec{F}_{száll}$, $\vec{F}_{Cor}$



Szállító erő: $\vec{F}_{száll}$

$$\vec{a}_{száll} = \vec{a}_\Omega + \underbrace{\vec{\varepsilon}\times\vec{\rho} - \omega^2\vec{\rho}}_{=\vec{0}} = \vec{a}_\Omega = \vec{a}_l$$

$$\vec{F}_{száll} = (-m\vec{a}_{száll}) = (-m\vec{a}_l) = (ma_l\,\vec{j})$$

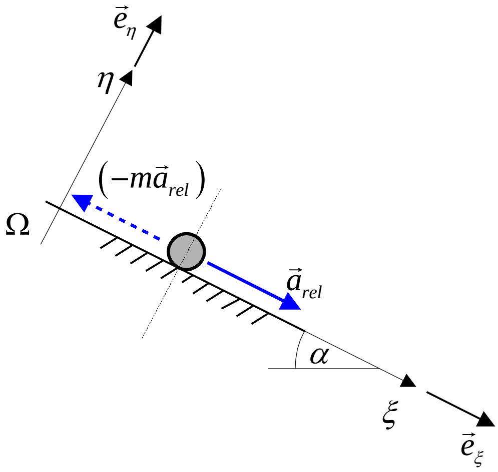
$$\underset{\xi\eta}{\vec{F}_{száll}} = \underline{\underline{T}}\,\underset{xy}{\vec{F}_{száll}} = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ ma_l\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-ma_l\sin\alpha\\ ma_l\cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$\vec{F}_{száll} = \left(-ma_l\sin\alpha\vec{e}_\xi + ma_l\cos\alpha\vec{e}_\eta\right)$$

Coriolis erő: $\vec{F}_{Cor}$

$$\vec{a}_{Cor} = 2\cdot\underbrace{\vec{\omega}}_{=\vec{0}}\times\vec{v}_{rel} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_{Cor} = (-m\vec{a}_{Cor}) = \vec{0}$$



Relatív erő (a mozgó $\xi\eta$ koordinátarendszerben ható erő): $\vec{F}_{rel}$

A kényszer miatt $\vec{a}_{rel} = (a_{rel}\vec{e}_\xi)$

$$\vec{F}_{rel} = m\vec{a}_{rel}$$

$$\vec{F}_{rel} = (ma_{rel}\vec{e}_\xi)$$

a) A tömegpont relatív gyorsulása: $\vec{a}_{rel}$

$$\vec{F}_{absz} + \vec{F}_{száll} + \vec{F}_{Cor} = \vec{F}_{rel}$$

$$\vec{G} + \vec{F}_K + (-m\,\vec{a}_{száll}) + (-m\,\vec{a}_{Cor}) = m\,\vec{a}_{rel}$$

$$\left(mg\sin\alpha\vec{e}_\xi - mg\cos\alpha\vec{e}_\eta\right) + \left(-\mu F_N\,\vec{e}_\xi + F_N\vec{e}_\eta\right) + \left(-ma_l\sin\alpha\vec{e}_\xi + ma_l\cos\alpha\vec{e}_\eta\right) +$$
$$+\left(-ma_{rel}\vec{e}_\xi\right) = \vec{0} \qquad /\cdot\vec{e}_\xi \quad /\cdot\vec{e}_\eta$$

$$(1.)\; mg\sin\alpha - \mu F_N - ma_l\sin\alpha - ma_{rel} = 0$$

$$(2.)\; -mg\cos\alpha + F_N + ma_l\cos\alpha = 0$$

$$F_N = m\cos\alpha(g - a_l)$$

$$F_N = 4\cdot 0{,}939(10-2) = 30{,}04\ \mathrm{N}$$

$$ma_{rel} = mg\sin\alpha - \mu F_N - ma_l\sin\alpha$$

$$ma_{rel} = mg\sin\alpha - \mu m\cos\alpha(g - a_l) - ma_l\sin\alpha$$

$$a_{rel} = g\sin\alpha - \mu\cos\alpha(g - a_l) - a_l\sin\alpha$$

$$a_{rel} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - a_l(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$$a_{rel} = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)(g - a_l) = (0{,}342 - 0{,}1\cdot 0{,}939)\cdot(10-2) = 1{,}98\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$\vec{a}_{rel} = (1{,}98\,\vec{e}_\xi)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

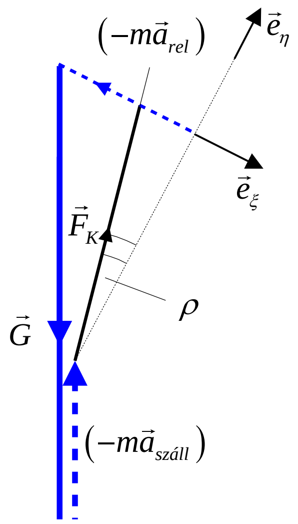
b) A tömegpontra ható kényszererő: $\vec{F}_K$

$$\vec{F}_K = \vec{F}_S + \vec{F}_N = \left(-\mu F_N\, \vec{e}_\xi + F_N \vec{e}_\eta\right) = -0{,}1\cdot 30{,}04\vec{e}_\xi + 30{,}04\,\vec{e}_\eta$$

$$\vec{F}_K = \left(-3{,}004\,\vec{e}_\xi + 30{,}04\,\vec{e}_\eta\right)\,\mathrm{N}$$

Megoldás szerkesztéssel:

$$\left(\vec{G}+\vec{F}_K\right)+\left(-m\vec{a}_{száll}\right)+\left(-m\vec{a}_{Cor}\right)=m\vec{a}_{rel}$$



Vektorábra

c) A pályaelhagyáshoz (elváláshoz) szükséges felvonó lift gyorsulás: $\vec{a}_l^*$

Feltétel: $\Rightarrow F_N = 0$

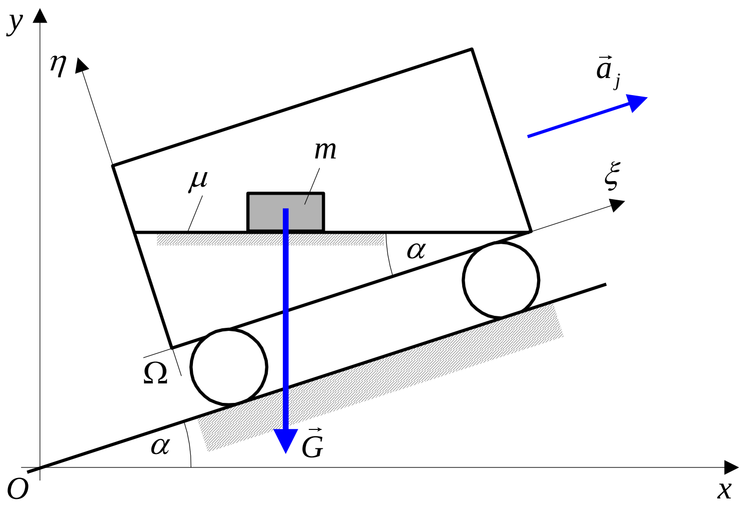
$$F_N = mg\cos\alpha\left(g - a_l^*\right) = 0$$

$$a_l^* = g$$

$$\vec{a}_l^* = \left(-10\,\vec{j}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

FL

8/3. feladat: Tömegpont kinetikája



Adott:

$t_0 = 0 \Rightarrow \vec{v}_j = \vec{0}, \vec{v}_{rel} = \vec{0}$,

$\vec{a}_j = \left(1{,}2\,\vec{i} + 0{,}5\,\vec{j}\right)\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

$\vec{G} = \left(-100\,\vec{j}\right)\text{N}$,

$g = 10\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

$\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$, $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$.

Feladat:

a) Határozza meg a tömegpont relatív gyorsulását és a tömegpontra ható kényszererő nagyságát, ha $\mu = \mu_0 = 0$!

b) Határozza meg $\mu_{0\min}$ értékét melynél a test nyugalomban marad!

c) Határozza meg a tömegpont relatív gyorsulását és a tömegpontra ható kényszererő nagyságát, ha $\mu = 0{,}1$ és $\mu_0 = 0{,}11$!

a) $\vec{F}_{absz} + \vec{F}_{száll} + \vec{F}_{Cor} = \vec{F}_{rel}$

$$\left(\vec{G} + \vec{F}_K\right) + \left(-m\vec{a}_{száll}\right) + \left(-m\vec{a}_{Cor}\right) = m\vec{a}_{rel}$$

$$\vec{F}_{absz} = \vec{F}_K + \vec{G}$$

Kényszererő: $\vec{F}_K$

$$\vec{F}_K = \vec{F}_S + \vec{F}_N = \left(F_N\,\vec{j}\right)$$

Súlyerő: $\vec{G}$

$$\vec{G} = \left(-mg\,\vec{j}\right)$$

$$m = \frac{G}{g} = 10\text{ kg}$$

$$\vec{a}_{száll} = \vec{a}_\Omega + \underbrace{\vec{\varepsilon}\times\vec{\rho} - \omega^2\vec{\rho}}_{=\vec{0}} = \vec{a}_\Omega = \vec{a}_j$$

$$\vec{F}_{száll} = \left(-m\vec{a}_{száll}\right) = \left(-m\vec{a}_j\right) = \left(-12\,\vec{i} - 5\,\vec{j}\right)\text{N}$$

$$\vec{F}_{Cor} = \left(-m\vec{a}_{Cor}\right) = -m\left(\underbrace{2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}}_{=\vec{0}}\right) = \vec{0}$$

A tömegpont relatív gyorsulása a kényszer miatt $\vec{a}_{rel} = \left(a_{rel}\,\vec{i}\right)$ irányítású vektor, így

$$\vec{F}_{rel} = m\vec{a}_{rel} = \left(F_{rel}\,\vec{i}\right)$$

$$\left(-mg\,\vec{j}\right) + \left(F_N\,\vec{j}\right) + \left(-m\vec{a}_j\right) + \left(-ma_{rel}\,\vec{i}\right) = \vec{0}$$

$$\left(-100\,\vec{j}\right) + \left(F_N\,\vec{j}\right) + \left(-12\,\vec{i} - 5\vec{j}\right) + \left(-ma_{rel}\,\vec{i}\right) = \vec{0} \quad /\cdot\vec{i} \quad /\cdot\vec{j}$$

$(1.)\ -12 - ma_{rel} = 0$ $\qquad$ $(2.)\ -100 + F_N - 5 = 0$

$a_{rel} = -\frac{12}{m} = -1{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ $\qquad$ $F_N = 105\ \text{N}$

$\vec{a}_{rel} = \left(-1{,}2\,\vec{i}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ $\qquad$ $\vec{F}_K = \vec{F}_N = \left(105\,\vec{j}\right)\ \text{N}$

b) $\vec{a}_{rel} = \vec{0}$ mivel a test nyugalomban marad.

$$\vec{F}_{absz} + \vec{F}_{száll} + \vec{F}_{Cor} = \vec{F}_{rel}$$

$$\left(\vec{G} + \vec{F}_K\right) + \left(-m\vec{a}_{száll}\right) + \underbrace{\left(-m\vec{a}_{Cor}\right)}_{=\vec{0}} = \underbrace{m\vec{a}_{rel}}_{=\vec{0}}$$

Kényszererő: $\vec{F}_K$

$$\vec{F}_K = \vec{F}_S + \vec{F}_N = \left(F_N\ \vec{j}\right)$$

$$\left(-mg\ \vec{j}\right) + \left(F_S\ \vec{i} + F_N\vec{j}\right) + \left(-12\,\vec{i} - 5\,\vec{j}\right) = \vec{0}$$

$$\left(-100\ \vec{j}\right) + \left(F_S\ \vec{i} + F_N\vec{j}\right) + \left(-12\,\vec{i} - 5\,\vec{j}\right) = \vec{0} \qquad /\cdot\vec{i}\ /\cdot\vec{j}$$

$(1.)\ F_S - 12 = 0$ $\qquad$ $(2.)\ -100 + F_N - 5 = 0$

$F_S = 12\ \text{N}$ $\qquad$ $F_N = 105\ \text{N}$

$$\mu_{0\min} = \frac{F_S}{F_N} = \frac{12}{105} = 0{,}114$$

c) A tömegpont a járműhöz képest megcsúszik: $\mu_0 = 0{,}11 < \mu_{0\min} = 0{,}114$

$$\vec{F}_{absz} + \vec{F}_{száll} + \vec{F}_{Cor} = \vec{F}_{rel}$$

$$\left(\vec{G} + \vec{F}_K\right) + \left(-m\vec{a}_{száll}\right) + \underbrace{\left(-m\vec{a}_{Cor}\right)}_{=\vec{0}} = m\vec{a}_{rel}$$

$$\vec{a}_{rel} = \left(-a_{rel}\ \vec{i}\right)$$

$$\vec{a}_{száll} = \vec{a}_\Omega + \underbrace{\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} - \omega^2\vec{\rho}}_{=\vec{0}} = \vec{a}_\Omega = \vec{a}_j$$

Kényszererő: $\vec{F}_K$

$$\vec{F}_K = \vec{F}_S + \vec{F}_N = \left(\mu F_N\vec{i} + F_N\ \vec{j}\right)$$

$$\left(-100\ \vec{j}\right) + \left(\mu F_N\vec{i} + F_N\vec{j}\right) + \left(-12\,\vec{i} - 5\vec{j}\right) + \left(-ma_{rel}\ \vec{i}\right) = \vec{0} \quad /\cdot\vec{i}\ /\cdot\vec{j}$$

$(1.)\ \mu F_N - 12 - ma_{rel} = 0$ $\qquad$ $(2.)\ -100 + F_N - 5 = 0$

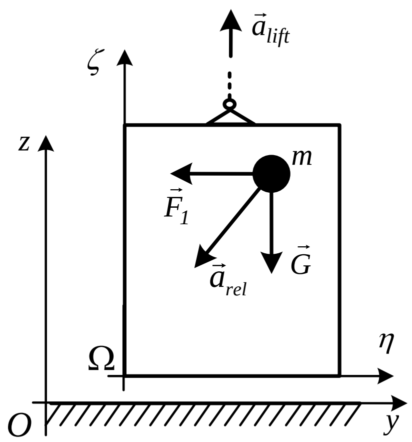
$a_{rel} = \frac{\mu F_N - 12}{m} = \frac{0{,}1\cdot 105 - 12}{10}$ $\qquad \Leftarrow \qquad$ $F_N = 105\ \text{N}$

$$a_{rel} = -0{,}15\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{a}_{rel} = \left(-0{,}15\,\vec{i}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{F}_K = \vec{F}_S + \vec{F}_N = \left(\mu F_N\vec{i} + F_N\ \vec{j}\right) = \left(10{,}5\,\vec{i} + 105\,\vec{j}\right)\ \text{N}$$

8/4. feladat: Tömegpont kinetikája



Adott:

Egy $\vec{a}_{lift}$ gyorsulással mozgó liftben lévő m tömegű anyagi pontra a $\vec{G}$ súlyerőn kívül még az $\vec{F}_1$ erő is hat. Ismert az anyagi pontnak a lifthez viszonyított $\vec{a}_{rel}$ gyorsulása. Az η, ζ koordináta-rendszer a lifthez mereven rögzített.

$m = 2$ kg, $\vec{g} = \left(-10\vec{k}\right)$ m/s², $\vec{a}_{rel} = \left(-3\vec{j} - 2\vec{k}\right)$ m/s².

Feladat:

A lift $\vec{a}_{lift}$ gyorsulásának és az anyagi pontra ható $\vec{F}_1$ erőnek a meghatározása.

$$\vec{F}_{absz} + \vec{F}_{száll} + \vec{F}_{Cor} = \vec{F}_{rel}$$
$$\left(\vec{G} + \vec{F}_1\right) + \left(-m\vec{a}_{száll}\right) + \left(-m\vec{a}_{Cor}\right) = m\vec{a}_{rel}$$

$$\vec{F}_{absz} = \vec{G} + \vec{F}_1 = \left(-mg\,\vec{k} + F_1\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{F}_{száll} = \left(-m\vec{a}_{száll}\right)$$
$$\vec{a}_{száll} = \vec{a}_{\Omega} + \underbrace{\vec{\varepsilon}}_{=\vec{0}} \times \vec{\rho} - \underbrace{\omega^2}_{=0}\,\vec{\rho} = \vec{a}_{\Omega} = \vec{a}_{lift} = \left(a_{lift}\,\vec{k}\right)$$
$$\vec{F}_{száll} = \left(-ma_{lift}\,\vec{k}\right)$$

$$\vec{F}_{Cor} = \left(-m\vec{a}_{Cor}\right)$$
$$\vec{a}_{Cor} = 2\underbrace{\vec{\omega}}_{=\vec{0}} \times \vec{v}_{rel} = \vec{0}$$
$$\vec{F}_{Cor} = \left(-m\vec{a}_{Cor}\right) = \vec{0}$$

$$\vec{F}_{rel} = m\vec{a}_{rel} = 2\left(-3\,\vec{j} - 2\,\vec{k}\right)$$

$$\left(\vec{G} + \vec{F}_1\right) + \left(-m\vec{a}_{száll}\right) + \left(-m\vec{a}_{Cor}\right) = m\vec{a}_{rel}$$
$$\left(-mg\,\vec{k} + F_1\,\vec{j}\right) + \left(-ma_{lift}\,\vec{k}\right) + \vec{0} = m\vec{a}_{rel}$$
$$\left(-2\cdot 10\,\vec{k} + F_1\,\vec{j}\right) + \left(-2a_{lift}\,\vec{k}\right) = 2\left(-3\,\vec{j} - 2\,\vec{k}\right) \qquad /\cdot\vec{j} \;\; /\cdot\vec{k}$$
$$(1.)\quad F_1 = -6\ N$$
$$(2.)\quad -20 - 2a_{lift} = -4 \quad \Rightarrow \quad a_{lift} = \frac{-16}{2} = -8\ m/s^2$$

Megoldás: $\vec{F}_1 = \left(-6\,\vec{j}\right)$N. $\vec{a}_{lift} = \left(-8\vec{k}\right)$ m/s².