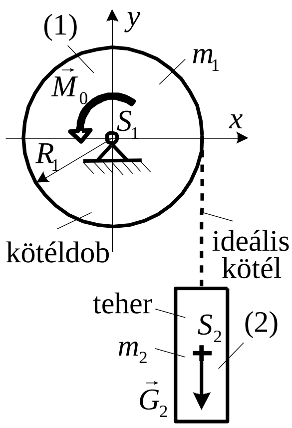
SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM **ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK**

14. MECHANIKA-MOZGÁSTAN GYAKORLAT

(kidolgozta: Németh Imre óraadó tanár, Bojtár Gergely egyetemi ts., Szüle Veronika, egy. ts.)

14/1. feladat: Emelő szerkezet kinetikája



Adott:

$m_1 = 50\,\text{kg}$, $m_2 = 200\,\text{kg}$,

$R_1 = 0{,}3\,\text{m}$,

$\vec{M}_0 = \left(500\vec{k}\right) Nm$

Feladat:

a) A kötéldob $\vec{\varepsilon}_1$ szöggyorsulásának és a teher $\vec{a}_2$ gyorsulásának meghatározása.

b) Az S_1 pontban fellépő $\vec{F}_{S1}$ támasztóerő (csapágyerő) és a K kötélerő meghatározása

Kidolgozás 1. eset:

Általános koordináta választás:

$q = \varphi_1$ - a kötéldob z tengely körüli szögelfordulása ($\vec{\varphi}_1 = \varphi_1 \vec{k}$),

$\dot{q} = \omega_1$ - a kötéldob szögsebessége ($\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k}$),

$\ddot{q} = \varepsilon_1$ - a kötéldob szöggyorsulása ($\vec{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 \vec{k}$).

Energiatétel az egész szerkezetre:

(1+2) $\dot{E} = P$.

A szerkezet kinetikai energiája: $E = \frac{1}{2} J_{s1}\omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$.

$v_2 = R_1\omega_1 = R_1\dot{q}$, $a_2 = R_1\varepsilon_1 = R_1\ddot{q}$, ($\vec{v}_2 = v_2\vec{j}$, $\vec{a}_2 = a_2\vec{j}$)

$$E = \frac{1}{2} J_{s1}\omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 R_1^2 \omega_1^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\left(J_{s1} + m_2 R_1^2\right)}_{m_{\varphi 1}}\omega_1^2 = \frac{1}{2} m_{\varphi 1}\omega_1^2 ,$$

$m_{\varphi 1}$ - a szerkezet $q = \varphi_1$ általános koordinátához tartozó általános (vagy redukált) tömege.

$$\dot{E} = \frac{d\,E}{dt} = \frac{1}{2} m_{\varphi 1} 2\omega_1 \frac{d\omega_1}{dt} = m_{\varphi 1}\omega_1\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{2} m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2\right)\omega_1\varepsilon_1 .$$

A szerkezetre ható ER teljesítménye:

$$P = \vec{M}_0 \cdot \vec{\omega}_1 + \underbrace{\vec{F}_{S1} \cdot \vec{v}_S}_{=\vec{0}} + \vec{G}_2 \cdot \vec{v}_2 + \underbrace{\vec{G}_1 \cdot \vec{v}_S}_{=\vec{0}} = M_0\omega_1 - m_2 g v_2 ,$$

$$P = M_0\omega_1 - m_2 g R_1 \omega_1 = \underbrace{(M_0 - m_2 g R_1)}_{Q_{\varphi 1}}\omega_1 = Q_{\varphi 1}\omega_1 ,$$

$Q_{\varphi 1}$ - a φ_1 általános koordinátához tartozó általános erő (egységnyi koordináta sebességhez tartozó teljesítmény).

Az energiatételbe behelyettesítve:

$$m_{\varphi 1}\cancel{\omega_1}\varepsilon_1 = Q_{\varphi 1}\cancel{\omega_1},$$

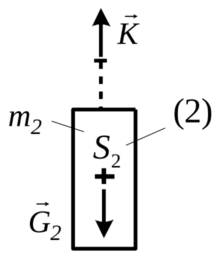
$$\varepsilon_1 = \frac{Q_{\varphi 1}}{m_{\varphi 1}} = \frac{M_0 - m_2 g R_1}{\frac{1}{2}m_1 R_1^2 + m_2 R_1^2} = \frac{500 - 200\cdot 10\cdot 0,3}{\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 0,3^2 + 200\cdot 0,3^2} = \frac{-100}{20,25} \cong -4,94\ {}^{1}\!/_{s^2}\ .$$

$$\vec{\varepsilon}_1 = \left(-4,94\vec{k}\right)\ {}^{1}\!/_{s^2}$$

$$a_2 = R_1\varepsilon_1 = 0,3\cdot(-4,94) = -1,482\ {}^{m}\!/_{s^2}$$

$$\vec{a}_2 = (-1,482\vec{j})\ {}^{m}\!/_{s^2}$$

Impulzus tétel a (2) jelű testre:



$$(2)\quad \dot{\vec{I}}_2 = \vec{F}\ .$$

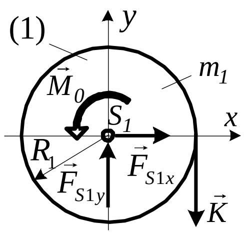
$$m_2\vec{a}_2 = \vec{K} + \vec{G}_2 \qquad /\cdot\vec{j}\ .$$

$$-m_2 a_2 = K - m_2 g$$

$$K = m_2(g - a_2) = 200(10 - 1,482) = 1703,6N \qquad (\uparrow)$$

$$\vec{K} = \left(1703,6\vec{j}\right)N\ .$$

Impulzus tétel az (1) jelű testre:



$$(1)\quad \dot{\vec{I}}_1 = \vec{F}\ .$$

$$m\,\vec{a}_{S1} = \vec{F}_{S1} + \vec{K} + \vec{G}_1$$

$$= \vec{0}$$

$$\vec{0} = \left(F_{S1x}\vec{i} + F_{S1y}\vec{j}\right) + \left(-K\vec{j}\right) + \left(-m_1 g\,\vec{j}\right) \qquad /\cdot\vec{i}\ /\cdot\vec{j}$$

$$(a)\quad 0 = F_{S1x}$$

$$(b)\quad 0 = F_{S1y} - K - m_1 g \qquad \Rightarrow$$

$$F_{S1y} = K + m_1 g = 1703,6 + 50\cdot 10 = 2203,6N\ \ (\uparrow)\ .$$

$$\vec{F}_{S1} = \left(2203,6\vec{j}\right)N$$

Kidolgozás 2. eset:

Általános koordináta választás:

$q = y_2$ - a teher y irányú elmozdulása ($\vec{y}_2 = y_2 \vec{j}$),

$\dot{q} = v_2$ - a teher sebessége ($\vec{v}_2 = v_2 \vec{j}$),

$\ddot{q} = a_2$ - a teher gyorsulása ($\vec{a}_2 = a_2 \vec{j}$).

Energiatétel az egész szerkezetre:

(1+2) $\dot{E} = P$.

A szerkezet kinetikai energiája: $E = \frac{1}{2} J_{s1} \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$.

$$\omega_1 = \frac{v_2}{R_1}, \qquad \varepsilon_1 = \frac{a_2}{R_1}, \quad (\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k} \ , \ \vec{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 \vec{k})$$

$$E = \frac{1}{2} J_{s1} \left(\frac{v_2}{R_1} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{J_{s1}}{R_1^2} + m_2 \right)}_{m_{y2}} v_2^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\frac{1}{2} m_1 R_1^2}{R_1^2} + m_2 \right)}_{m_{y2}} v_2^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 \right)}_{m_{y2}} v_2^2 = \frac{1}{2} m_{y2} v_2^2 ,$$

m_{y2} - a szerkezet $q = y_2$ általános koordinátához tartozó általános (vagy redukált) tömege.

$$\dot{E} = \frac{d\,E}{dt} = \frac{1}{2} m_{y2} 2 v_2 \frac{dv_2}{dt} = m_{y2} v_2 a_2 = \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 \right) v_2 a_2 .$$

A szerkezetre ható ER teljesítménye:

$$P = \vec{M}_0 \cdot \vec{\omega}_1 + \underbrace{\vec{F}_{S1} \cdot \vec{v}_S}_{=\vec{0}} + \vec{G}_2 \cdot \vec{v}_2 + \underbrace{\vec{G}_1 \cdot \vec{v}_S}_{=\vec{0}} = M_0 \omega_1 - m_2 g v_2 ,$$

$$P = M_0 \frac{v_2}{R_1} - m_2 g v_2 = \underbrace{\left(\frac{M_0}{R_1} - m_2 g \right)}_{Q_{y2}} v_2 = Q_{y2} v_2 ,$$

Q_{y2} - a y_2 általános koordinátához tartozó általános erő (egységnyi koordináta sebességhez tartozó teljesítmény).

Az energiatételbe behelyettesítve:

$$m_{y2} \cancel{v}_2 a_2 = Q_{y2} \cancel{v}_2 ,$$

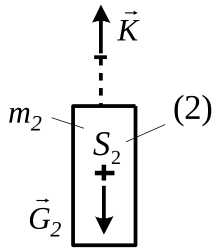
$$a_2 = \frac{Q_{y2}}{m_{y2}} = \frac{\left(\frac{M_0}{R_1} - m_2 g \right)}{\left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 \right)} = \frac{\frac{500}{0,3} - 200 \cdot 10}{\frac{1}{2} \cdot 50 + 200} = \frac{-333,333}{225} \cong -1,48148 \, m/s^2 .$$

$$\vec{a}_2 = (-1,482 \vec{j}) \, m/s^2$$

$$\varepsilon_1 = \frac{a_2}{R_1} = \frac{-1,48148}{0,3} \cong -4,94 \, rad/s^2$$

$$\vec{\varepsilon}_1 = \left(-4,94 \vec{k} \right) rad/s^2$$

Impulzus tétel a (2) jelű testre:



$$(2)\quad \dot{\vec{I}}_2 = \vec{F}\ .$$

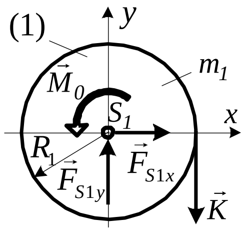
$$m_2\vec{a}_2 = \vec{K} + \vec{G}_2 \qquad /\cdot\ \vec{j}\ .$$

$$-m_2 a_2 = K - m_2 g$$

$$K = m_2(g - a_2) = 200(10 - 1{,}482) = 1703{,}6N \qquad (\uparrow)$$

$$\vec{K} = \left(1703{,}6\,\vec{j}\right)N\ .$$

Impulzus tétel az (1) jelű testre:



$$(1)\quad \dot{\vec{I}}_1 = \vec{F}\ .$$

$$\underbrace{m\,\vec{a}_{S1}}_{=\vec{0}} = \vec{F}_{S1} + \vec{K} + \vec{G}_1$$

$$\vec{0} = \left(F_{S1x}\vec{i} + F_{S1y}\vec{j}\right) + \left(-K\vec{j}\right) + \left(-m_1 g\,\vec{j}\right) \qquad /\cdot\vec{i}\ /\cdot\vec{j}$$

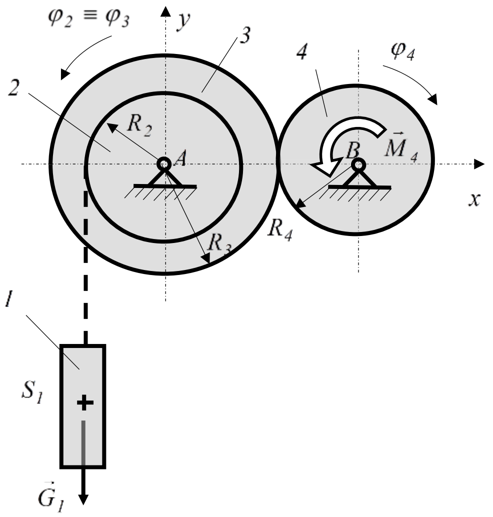
$$(a)\quad 0 = F_{S1x}$$

$$(b)\quad 0 = F_{S1y} - K - m_1 g \qquad \Rightarrow$$

$$F_{S1y} = K + m_1 g = 1703{,}6 + 50\cdot 10 = 2203{,}6N\ \ (\uparrow)\ .$$

$$\vec{F}_{S1} = \left(2203{,}6\,\vec{j}\right)N$$

14/2. feladat: Emelő szerkezet kinetikája



__Adott:__
A (2), (3) és a (4) jelű homogén körhenger (kötéldob és fogaskerekek), amelyek az *a* illetve a *b* tengelyek körül szabadon elforognak. Az (1) jelű test a (2) jelű hengerhez súlytalan és nyújthatatlan kötéllel csatlakozik.

$m_1 = 1000\,\text{kg}$, $m_2 = 500\,\text{kg}$, $m_3 = 1000\,\text{kg}$,
$m_4 = 375\,\text{kg}$,
$R_2 = R_4 = 0{,}4\,\text{m}$, $R_3 = 0{,}8\,\text{m}$,
$\vec{M}_4 = 2480\,Nm$

__Feladat:__

a) Határozza meg a (2) jelű henger $\vec{\varepsilon}_2$ szöggyorsulását!

b) Számítsa ki a kötélben ébredő $\vec{K}_1$ kötélerőt!

__Kidolgozás:__

Általános koordináta választás:

$q = \varphi_2$ - a kötéldob z tengely körüli szögelfordulása ($\vec{\varphi}_2 = \varphi_2 \vec{k}$),

$\dot{q} = \omega_2$ - a kötéldob szögsebessége ($\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{k}$),

$\ddot{q} = \varepsilon_2$ - a kötéldob szöggyorsulása ($\vec{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 \vec{k}$).

Energiatétel az egész szerkezetre:

(1+2) $\dot{E} = P$.

A szerkezet kinetikai energiája: $E = \frac{1}{2} J_a\, \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_b\, \omega_4^2 + \frac{1}{2} m_1\, v_{S1}^2$

$$R_3\, \varphi_2 = R_4\, \varphi_4 \quad \Rightarrow \quad \varphi_4 = \frac{R_3}{R_4} \varphi_2\,; \quad \omega_4 = -\frac{R_3}{R_4} \omega_2\,; \quad s_1 = R_2\, \varphi_2\,, \quad v_1 = R_2 \omega_2 .$$

$$\frac{1}{2} J_a\, \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_b \left(-\omega_2 \frac{R_3}{R_4} \right)^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(R_2\, \omega_2 \right)^2 = \frac{1}{2} J_a\, \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_b \frac{R_3^2}{R_4^2} \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_1\, R_2^2\, \omega_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(J_a + J_b \frac{R_3^2}{R_4^2} + m_1\, R_2^2 \right)}_{m_q} \omega_2^2 = \frac{1}{2} m_q\, \omega_2^2 .$$

$$m_q = J_a + J_b \frac{R_3^2}{R_4^2} + m_1\, R_2^2 = \overbrace{\left(\frac{1}{2} m_2\, R_2^2 + \frac{1}{2} m_3 R_3^2 \right)}^{J_a} + \frac{1}{2} m_4\, R_4^2\, \frac{R_3^2}{R_4^2} + m_1\, R_2^2 =$$

$$= m_1\, R_2^2 + \frac{1}{2} (m_2\, R_2^2 + m_3\, R_3^2 + m_4\, R_3^2) =$$

$$= 1000 \cdot 0{,}4^2 + \frac{1}{2} (500 \cdot 0{,}4^2 + 1000 \cdot 0{,}8^2 + 375 \cdot 0{,}8^2) = 160 + 40 + 320 + 120 = 640 \;\; kgm^2 .$$

m_q - a szerkezet $q=\varphi_2$ általános koordinátához tartozó általános (vagy redukált) tömege.

$$\dot{E}=\frac{dE}{dt}=\frac{1}{2}m_q 2\omega_2\frac{d\omega_2}{dt}=m_q\omega_2\varepsilon_2 .$$

A szerkezetre ható ER teljesítménye:

$$P=\vec{M}_4\cdot\vec{\omega}_4+\vec{G}_1\cdot\vec{v}_1+\underbrace{\vec{G}_2\cdot\vec{v}_A}_{=\vec{0}}+\underbrace{\vec{G}_3\cdot\vec{v}_A}_{=\vec{0}}+\underbrace{\vec{F}_A\cdot\vec{v}_A}_{=\vec{0}}+\underbrace{\vec{G}_4\cdot\vec{v}_B}_{=\vec{0}}+\underbrace{\vec{F}_B\cdot\vec{v}_B}_{=\vec{0}}=M_4\omega_4+m_1gv_1 ,$$

$$P=-M_4\frac{R_3}{R_4}\omega_2+m_1gR_2\omega_2=\underbrace{(-M_4\frac{R_3}{R_4}+m_1gR_2)}_{Q_{\varphi 2}}\omega_2 ,$$

$$Q_{\varphi 2}=-M_4\frac{R_3}{R_4}+m_1gR_2=-2480\cdot\frac{0,8}{0,4}+1000\cdot 10\cdot 0,4=-4960+4000=-960\,Nm$$

$Q_{\varphi 2}$ - a φ_2 általános koordinátához tartozó általános erő (egységnyi koordináta sebességhez tartozó teljesítmény).

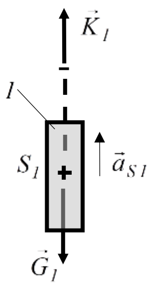
Az energiatételbe behelyettesítve:

$$m_q\cancel{\omega}_2\varepsilon_2=Q_{\varphi 2}\cancel{\omega}_2 ,$$

$$\varepsilon_2=\frac{Q_{\varphi 2}}{m_q}=\frac{-960}{640}=-1,5\,{}^{rad}\!/_{s^2} .$$

$$\vec{\varepsilon}_1=\left(-1,5\vec{k}\right){}^{rad}\!/_{s^2}$$

A $\vec{K}_1$ kötélerő meghatározása:



$$\vec{a}_{S1}=\vec{\varepsilon}_2\times\vec{R}_2=\left(-1,5\vec{e}_z\right)\times\left(-0,4\vec{e}_x\right)=\left(0,6\vec{e}_y\right)\,m/s^2.$$

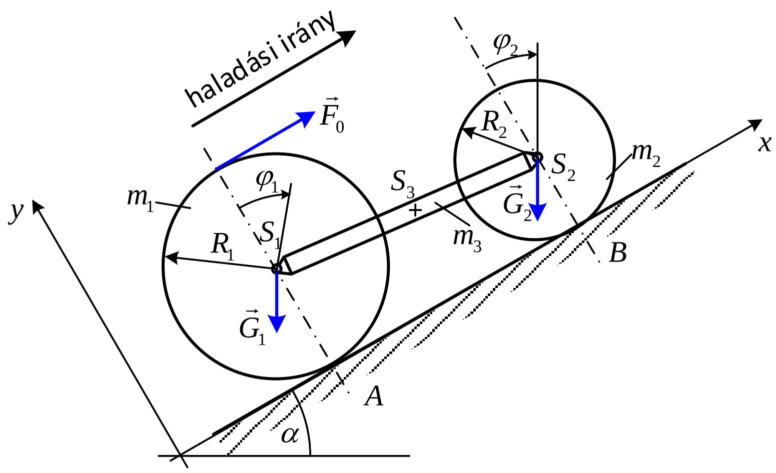
Impulzus tétel az (1) testre:

$$m_1\,a_{S1}=K_1-G_1 ,$$

$$K_1=m_1\,a_{S1}+G_1=m_1\left(a_{S1}+g\right)=1000\left(0,6+10\right)=10600\ N,$$

$$K_1=10,6\ kN\ (\uparrow)$$

14/3. feladat: Szerkezetek kinetikája (traktor modell)



Adott:
$m_1 = 80\,\text{kg},\ m_2 = 30\,\text{kg},\ m_3 \approx 0\,\text{kg},$
$R_1 = 0{,}8\,m,\ R_2 = 0{,}4\,m,$
$\alpha = 30^\circ,\ F_0 = 600\,N$ és μ_0 elég nagy, hogy a kerekek ne csússzanak meg.

Feladat: Határozza meg a traktor $\vec{a}_0$ gyorsulását!

Kidolgozás:
A traktor haladó mozgást végez és az egyes tömegek közötti kényszerkapcsolat miatt mindhárom tömeg súlypontjának sebessége azonos, tehát $\vec{v}_{S1} = \vec{v}_{S2} = \vec{v}_{S3} = \vec{v}_S = \left(v_S \vec{i}\right)$, továbbá $\vec{a}_0 = \left(a_0 \vec{i}\right) = \vec{a}_{S1} = \vec{a}_{S2} = \vec{a}_{S3}$ valamint $\vec{\omega}_1 = \left(-\omega_1 \vec{k}\right),\ \vec{\omega}_2 = \left(-\omega_2 \vec{k}\right),\ \vec{\varepsilon}_1 = \left(-\varepsilon_1 \vec{k}\right),\ \vec{\varepsilon}_2 = \left(-\varepsilon_2 \vec{k}\right)$

Csúszásmentes gördülést feltételezve: $R_1\omega_1 = R_2\omega_2$

Általános koordináta választás:

$q = \varphi_2$ - a kerék z tengely körüli szögelfordulása
$\dot{q} = \omega_2$ - a kerék szögsebessége ($\vec{\omega}_2 = -\omega_2 \vec{k}$),
$\ddot{q} = \varepsilon_2$ - a kerék szöggyorsulása ($\vec{\varepsilon}_2 = -\varepsilon_2 \vec{k}$).

Energia tétel alapján: $\dot{E} = P$

Szerkezet mozgási energiája:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2}J_a\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_b\omega_2^2 = \frac{1}{2}J_a\left(\frac{R_2}{R_1}\omega_2\right)^2 + \frac{1}{2}J_b\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left[J_a\frac{R_2^2}{R_1^2} + J_b\right]\omega_2^2 = \frac{1}{2}J_{red}\omega_2^2$$

$$J_a = \frac{3}{2}m_1R_1^2 = \frac{3}{2}80\cdot 0{,}8^2 = 76{,}8\,kgm^2$$

$$J_b = \frac{3}{2}m_2R_2^2 = \frac{3}{2}30\cdot 0{,}4^2 = 7{,}2\,kgm^2$$

Redukált tehetetlenségi nyomaték:

$$J_{red} = J_a\frac{R_2^2}{R_1^2} + J_b = 76{,}8\frac{0{,}4^2}{0{,}8^2} + 7{,}2 = 26{,}4\,kgm^2$$

$$\dot{E} = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J_{red}\omega_2^2\right) = \frac{1}{2}J_{red}2\omega_2\varepsilon_2 = J_{red}\omega_2\varepsilon_2$$

Szerkezetre ható ER teljesítménye:

$$P=\vec{F}_0\cdot\vec{v}_C+\vec{G}_1\cdot\vec{v}_{S1}+\vec{G}_2\cdot\vec{v}_{S2}+\underbrace{\vec{F}_{KA}\cdot\vec{v}_A}_{=\vec{0}}+\underbrace{\vec{F}_{KB}\cdot\vec{v}_B}_{=\vec{0}}=$$

$$=\left(F_0\vec{i}\right)\cdot\left(v_C\vec{i}\right)+\left(-G_1\sin\alpha\vec{i}-G_1\cos\alpha\vec{j}\right)\cdot\left(v_S\vec{i}\right)=\left(-G_2\sin\alpha\vec{i}-G_2\cos\alpha\vec{j}\right)\cdot\left(v_S\vec{i}\right)=$$

$$=F_0v_C-\left(G_1+G_2\right)v_S\sin\alpha=F_0 2v_S-\left(G_1+G_2\right)v_S\sin\alpha=\left(2F_0-\left(G_1+G_2\right)\sin\alpha\right)v_S=$$

$$=\left(2F_0-\left(G_1+G_2\right)\sin\alpha\right)R_2\omega_2$$

Energia tétel: $\dot{E}=P$

$$J_{red}\omega_2\varepsilon_2=\left(2F_0-\left(G_1+G_2\right)\sin\alpha\right)R_2\omega_2$$

$$J_{red}\varepsilon_2=\left(2F_0-\left(G_1+G_2\right)\sin\alpha\right)R_2$$

$$\varepsilon_2=\left(2F_0-\left(G_1+G_2\right)\sin\alpha\right)\frac{R_2}{J_{red}}=\left(2\cdot 600-\left(800+300\right)\sin 30^\circ\right)\frac{0,4}{26,4}=9,848\ \frac{rad}{s^2}$$

$$\vec{\varepsilon}_2=\left(-9,848\vec{k}\right)\frac{rad}{s^2}$$

$$a_0=R_2\varepsilon_2=0,4\cdot 9,848=3,94\ \frac{m}{s^2}$$

$$\vec{a}_0=\left(3,94\vec{i}\right)\frac{m}{s^2}$$