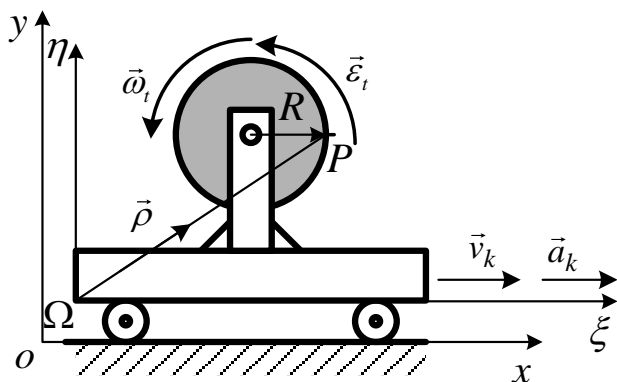


5. MECHANIKA-MOZGÁSTAN GYAKORLAT

(kidolgozta: Németh Imre óraadó tanár, Bojtár Gergely egyetemi ts., Szüle Veronika, egy. ts.)

Relatív mozgás kinematikája

5/1. feladat: Relatív mozgás kinematikája



Adott:

$$\vec{a}_k = (3 \vec{i}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$\vec{v}_k = (2 \vec{i}) \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\vec{\omega}_t = (2 \vec{k}) \frac{1}{\text{s}},$$

$$\vec{\epsilon}_t = (3 \vec{k}) \frac{1}{\text{s}^2},$$

$$R = 1,5 \text{ m}.$$

Feladat: A P pont abszolút sebességének és gyorsulásának meghatározása:

a) $\vec{v}_{abszP} = ?$

b) $\vec{a}_{abszP} = ?$

1. KR: xy (álló koordináta-rendszer)

2. KR: $\xi \eta$ (mozgó koordináta-rendszer)

a) A P pont abszolút sebessége: $\vec{v}_{absz} = \vec{v}_{abszP}$

$$\vec{v}_{absz} = \vec{v}_{száll} + \vec{v}_{rel}$$

$$\vec{v}_{száll} = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{v}_k = (2 \vec{i}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v}_{rel} = \vec{\omega}_t \times \vec{R} = (2 \vec{k}) \times (1,5 \vec{i}) = (3 \vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v}_{absz} = \vec{v}_{száll} + \vec{v}_{rel} = \vec{v}_k + \vec{\omega}_t \times \vec{R} = (2 \vec{i} + 3 \vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) A P pont abszolút gyorsulása:

$$\vec{a}_{absz} = \vec{a}_{száll} + \vec{a}_{Cor} + \vec{a}_{rel}$$

$$\vec{a}_{száll} = \vec{a}_\Omega + \vec{\epsilon} \times \vec{\rho} - \omega^2 \cdot \vec{\rho} = \vec{a}_k = (3 \vec{i}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{a}_{Cor} = 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_{rel} = \vec{\epsilon}_t \times \vec{R} - \omega_t^2 \cdot \vec{R} = (3 \vec{k}) \times (1,5 \vec{i}) - 2^2 (1,5 \vec{i}) = (-6 \vec{i} + 4,5 \vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{a}_{absz} = \vec{a}_{száll} + \vec{a}_{Cor} + \vec{a}_{rel} = (3 \vec{i}) + (\vec{0}) + (-6 \vec{i} + 4,5 \vec{j}) = (-3 \vec{i} + 4,5 \vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

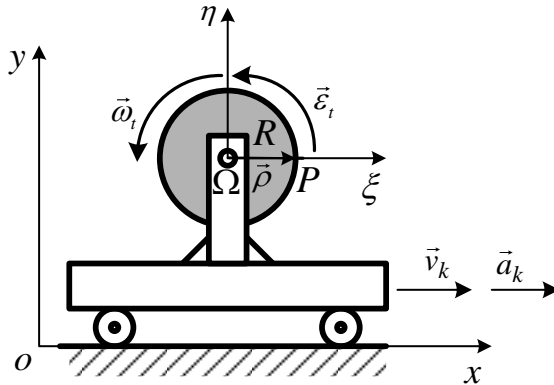
$$\vec{a}_{absz} = (-3\vec{i} + 4,5\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\text{A P pont abszolút sebessége: } \vec{v}_{abszP} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{A P pont abszolút gyorsulása: } \vec{a}_{abszP} = (-3\vec{i} + 4,5\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

5/1. B feladat:

Az adatok és a feladatok ugyan azok viszont ebben az esetben a mozgó $\xi \eta$ KR-t a kocsin forgó tárcsához kötöttük.



a) A P pont abszolút sebessége: $\vec{v}_{absz} = \vec{v}_{abszP}$

$$\vec{v}_{absz} = \vec{v}_{száll} + \vec{v}_{rel}$$

$$\vec{v}_{száll} = \vec{v}_{\Omega} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{v}_k + \vec{\omega}_t \times \vec{\rho} = (2\vec{i}) + (2\vec{k}) \times (1,5\vec{i}) = (2\vec{i} + 3\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v}_{rel} = \vec{0} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v}_{absz} = \vec{v}_{száll} + \vec{v}_{rel} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) A P pont abszolút gyorsulása:

$$\vec{a}_{absz} = \vec{a}_{száll} + \vec{a}_{Cor} + \vec{a}_{rel}$$

$$\vec{a}_{száll} = \vec{a}_{\Omega} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} - \omega_t^2 \vec{\rho} = \vec{a}_k + \vec{\varepsilon}_t \times \vec{\rho} - \omega_t^2 \vec{\rho} = (3\vec{i}) + (3\vec{k}) \times (1,5\vec{i}) - 2^2 \cdot (1,5\vec{i}) = (-3\vec{i} + 4,5\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{a}_{Cor} = 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = 2\vec{\omega}_t \times \vec{v}_{rel} = \vec{0} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{a}_{rel} = \vec{0} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

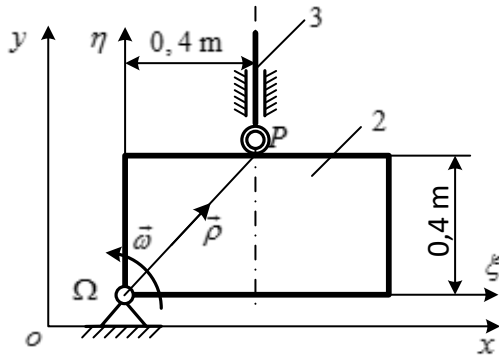
$$\vec{a}_{absz} = \vec{a}_{száll} + \vec{a}_{Cor} + \vec{a}_{rel} = (-3\vec{i} + 4,5\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\text{A P pont abszolút sebessége: } \vec{v}_{abszP} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{A P pont abszolút gyorsulása: } \vec{a}_{abszP} = (-3\vec{i} + 4,5\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Megjegyzés: Ugyan azt kaptuk, mint az előző feladatban.

5/2. feladat: Relatív mozgás kinematikája



Adott:

$$\vec{\omega} = (2\vec{k}) \frac{1}{s}$$

A P pont a 2 jelű test és a 3 jelű rúd érintkezési pontja.

Feladat: A P pont abszolút és relatív sebességének és gyorsulásának meghatározása:

a) $\vec{v}_{aP} = ?$, $\vec{v}_{relP} = ?$

b) $\vec{a}_{aP} = ?$, $\vec{a}_{relP} = ?$

1. KR: xy (álló koordináta-rendszer)

2. KR: $\xi\eta$ (mozgó koordináta-rendszer)

c) A P pont abszolút sebessége: $\vec{v}_{absz} = \vec{v}_{aP}$, $\vec{v}_{rel} = \vec{v}_{relP}$

$$\vec{v}_{absz} = v_{absz} \vec{j}$$

$$\vec{v}_{rel} = v_{rel} \vec{i}$$

$$\vec{v}_{száll} = \vec{v}_{\Omega} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = (2\vec{k}) \times (0,4\vec{i} + 0,4\vec{j}) = (-0,8\vec{i} + 0,8\vec{j}) \frac{m}{s}$$

$\vec{v}_{száll} = \vec{0}$

$$\vec{v}_{absz} = \vec{v}_{száll} + \vec{v}_{rel}$$

$$v_{absz} \vec{j} = (-0,8\vec{i} + 0,8\vec{j}) + v_{rel} \vec{i} \quad / \cdot \vec{i} / \cdot \vec{j}$$

$$0 = -0,8 + v_{rel}$$

$$v_{absz} = 0,8 + 0$$

$$v_{rel} = 0,8$$

$$v_{absz} = 0,8$$

$$\vec{v}_{rel} = (0,8\vec{i}) \frac{m}{s}$$

$$\vec{v}_{absz} = (0,8\vec{j}) \frac{m}{s}$$

d) A P pont abszolút gyorsulása: $\vec{a}_{absz} = \vec{a}_{aP}$, $\vec{a}_{rel} = \vec{a}_{relP}$

$$\vec{a}_{absz} = \vec{a}_{száll} + \vec{a}_{Cor} + \vec{a}_{rel}$$

$$\vec{a}_{absz} = a_{absz} \vec{j}$$

$$\vec{a}_{száll} = \vec{a}_{\Omega} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} - \omega^2 \vec{\rho} = -2^2 (0,4\vec{i} + 0,4\vec{j}) = (-1,6\vec{i} - 1,6\vec{j}) \frac{m}{s^2}$$

$\vec{a}_{száll} = \vec{0}$

$$\vec{a}_{Cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = 2(2\vec{k}) \times (0,8\vec{i}) = (3,2\vec{j}) \frac{m}{s^2}$$

$$\vec{a}_{rel} = a_{rel} \vec{i}$$

$$\vec{a}_{absz} = \vec{a}_{száll} + \vec{a}_{Cor} + \vec{a}_{rel}$$

$$a_{absz} \vec{j} = (-1,6 \vec{i} - 1,6 \vec{j}) + (3,2 \vec{j}) + a_{rel} \vec{i} \quad / \cdot \vec{i} / \cdot \vec{j}$$

$$0 = -1,6 + a_{rel} \quad a_{absz} = -1,6 + 3,2$$

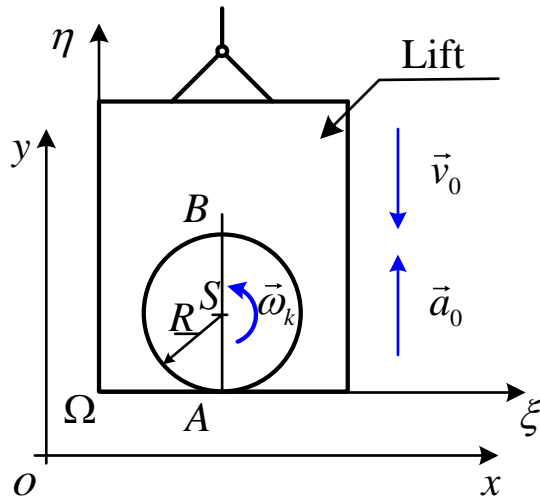
$$a_{rel} = 1,6 \quad a_{absz} = 1,6$$

$$\vec{a}_{rel} = (1,6 \vec{i}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \vec{a}_{absz} = (1,6 \vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A P pont abszolút sebessége: $\vec{v}_{aP} = (0,8 \vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$, abszolút gyorsulása: $\vec{a}_{aP} = (1,6 \vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

A P pont relatív sebessége: $\vec{v}_{relP} = (0,8 \vec{i}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$, relatív gyorsulása: $\vec{a}_{relP} = (1,6 \vec{i}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

5/3. feladat: Relatív mozgás kinematikája



Adott:

$$\vec{v}_0 = (-3\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\vec{a}_0 = (8\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$\vec{\omega}_k = (2\vec{k}) \frac{1}{\text{s}},$$

$$R = 2 \text{ m}.$$

Az ábrán látható lift \vec{v}_0 sebességgel és \vec{a}_0 lassulással végez függőleges haladó mozgást. A liftben az R sugarú henger állandó $\vec{\omega}$ szögsebességgel tisztán gördül.

Feladat: A henger A és B pontjának \vec{v}_a abszolút sebességének és \vec{a}_a gyorsulásának meghatározása az xy álló koordináta-rendszerben:

a) $\vec{v}_{abszA} = ?$, $\vec{v}_{abszB} = ?$

b) $\vec{a}_{abszA} = ?$, $\vec{a}_{abszB} = ?$

a) Az A és B pont abszolút sebessége:

$$\vec{v}_{relA} = \vec{0} \quad (\text{a tiszta gördülés miatt})$$

$$\vec{v}_{relB} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_k \times \vec{r}_{AB} = \vec{0} + (2\vec{k}) \times (4\vec{j}) = -2R \omega \vec{i} = (-8\vec{i}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v}_{szállA} = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_A = \vec{v}_0 = (-3\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v}_{szállB} = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_B = \vec{v}_0 = (-3\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v}_{relS} = \text{áll.} \Rightarrow \vec{a}_{relS} = \vec{0}$$

$$\vec{\omega}_k = \text{áll.} \Rightarrow \vec{\varepsilon} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_{abszA} = \vec{v}_{relA} + \vec{v}_{szállA} = \vec{v}_0 = (-3\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v}_{abszB} = \vec{v}_{relB} + \vec{v}_{szállB} = (-8\vec{i} - 3\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Az A és B pont abszolút gyorsulása:

$$\vec{a}_{relA} = \underbrace{\vec{a}_{relS}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{\varepsilon}_k \times \vec{r}_{SA}}_{=\vec{0}} - \omega_k^2 \vec{r}_{SA} = -2^2 (-2\vec{j}) = (8\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{a}_{relB} = \underbrace{\vec{a}_{relS}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{\varepsilon}_k \times \vec{r}_{SB}}_{=\vec{0}} - \omega_k^2 \vec{r}_{SB} = -2^2 (2\vec{j}) = (-8\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{a}_{szállA} = \underbrace{\vec{a}_{\Omega}}_{=\vec{a}_0} + \underbrace{\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_A}_{=\vec{0}} - \underbrace{\omega^2 \vec{\rho}_A}_{=0} = \vec{a}_0 = (8\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{a}_{szállB} = \underbrace{\vec{a}_{\Omega}}_{=\vec{a}_0} + \underbrace{\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_B}_{=\vec{0}} - \underbrace{\omega^2 \vec{\rho}_B}_{=0} = \vec{a}_0 = (8\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

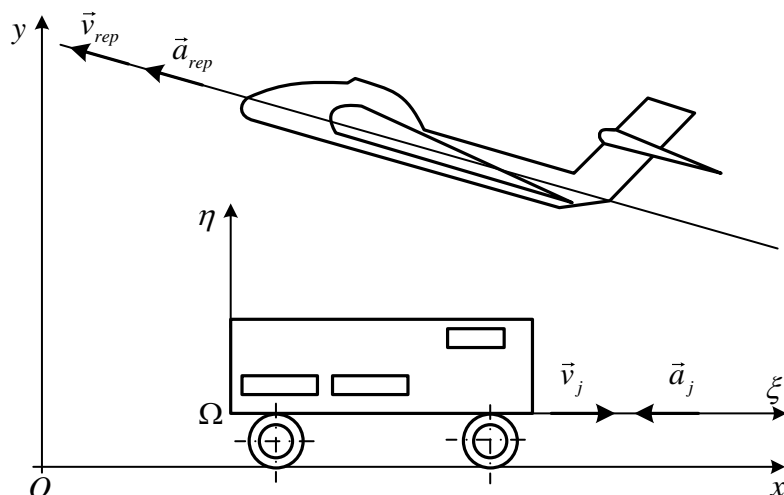
$$\vec{a}_{CorA} = 2 \underbrace{\vec{\omega}}_{=\vec{0}} \times \underbrace{\vec{v}_{relA}}_{=\vec{0}} = \vec{0} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{a}_{CorB} = 2 \underbrace{\vec{\omega}}_{=\vec{0}} \times \underbrace{\vec{v}_{relB}}_{=\vec{0}} = \vec{0} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{a}_{abszA} = \vec{a}_{relA} + \vec{a}_{szállA} + \vec{a}_{CorA} = (8\vec{j}) + (8\vec{j}) = (16\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{a}_{abszB} = \vec{a}_{relB} + \vec{a}_{szállB} + \vec{a}_{CorB} = (-8\vec{j}) + (8\vec{j}) = \vec{0}$$

5/4. feladat: Relatív mozgás kinematikája



Az ábrán látható jármű egy repülőtér melletti úton végez haladó mozgást és megállásra készülve fékez. A repülőtérről ebben a pillanatban száll fel egy repülőgép. A jármű és a repülőgép egymással párhuzamos síkokban mozognak.

Adott:

A jármű pillanatnyi

$$\text{sebessége: } \vec{v}_j = (5 \vec{i}) \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

pillanatnyi gyorsulása:

$$\vec{a}_j = (-3 \vec{i}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

a repülőgép pillanatnyi

$$\text{sebessége: } \vec{v}_{rep} = (-100 \vec{i} + 25 \vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

pillanatnyi gyorsulása:

$$\vec{a}_{rep} = (-16 \vec{i} + 3 \vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Feladat: a repülőgép sebességének és gyorsulásának meghatározása a járműhöz képest.

$$\vec{v}_{absz} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{száll} \Rightarrow \vec{v}_{rel} = \vec{v}_{absz} - \vec{v}_{száll}$$

$$\vec{v}_{száll} = \vec{v}_{\Omega} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{v}_j = (5 \vec{i}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v}_{absz} = \vec{v}_{rep} = (-100 \vec{i} + 25 \vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_{absz} - \vec{v}_{száll} = \vec{v}_{rep} - \vec{v}_j = (-100 \vec{i} + 25 \vec{j}) - (5 \vec{i}) = (-105 \vec{i} + 25 \vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A repülőgép sebessége a járműhöz viszonyítva: $\vec{v} = \vec{v}_{rel} = (-105 \vec{i} + 25 \vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$$\vec{a}_{absz} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{száll} + \vec{a}_{Cor} \Rightarrow \vec{a}_{rel} = \vec{a}_{absz} - \vec{a}_{száll} - \vec{a}_{Cor}$$

$$\vec{a}_{száll} = \vec{a}_{\Omega} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} - \omega^2 \vec{\rho} = \vec{a}_j = (-3 \vec{i}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

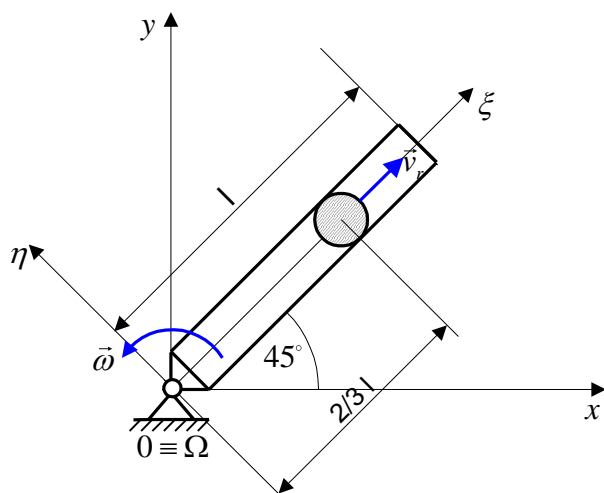
$$\vec{a}_{Cor} = 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_{absz} = \vec{a}_{rep} = (-16 \vec{i} + 3 \vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_{absz} - \vec{a}_{száll} - \vec{a}_{Cor} = \vec{a}_{rep} - \vec{a}_j = (-16 \vec{i} + 3 \vec{j}) - (-3 \vec{i}) = (-13 \vec{i} + 3 \vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A repülőgép gyorsulása a járműhöz viszonyítva: $\vec{a} = \vec{a}_{rel} = (-13 \vec{i} + 3 \vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

5/5. feladat: Tömegpont relatív mozgás kinematikája



Adott:

$$\vec{\omega} = (10 \vec{k}) \frac{1}{s} = \text{áll.},$$

$$\vec{v}_r = (5 \vec{e}_\xi) \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{áll.},$$

$$l = 3 \text{ m}$$

Feladat: a lövedék abszolút sebességének és gyorsulásának meghatározása

$$\vec{v}_{absz} = ?, \vec{a}_{absz} = ?$$

$$\vec{\omega} = \text{áll.} \Rightarrow \vec{\varepsilon} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_r = \text{áll.} \Rightarrow \vec{a}_r = \vec{0}$$

$$\text{Koordináta transzformáció: } \vec{e}_\xi = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right)$$

$$\vec{e}_\eta = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right)$$

$$\text{Abszolút sebesség: } \vec{v}_{absz} = \vec{v}_{száll} + \vec{v}_{rel}$$

$$\vec{v}_{száll} = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{0} + (10 \vec{k}) \times (2 \vec{e}_\xi) = (20 \vec{e}_\eta) = 20 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right) = (-10\sqrt{2} \vec{i} + 10\sqrt{2} \vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$0 = \Omega \Rightarrow \vec{v}_\Omega = \vec{0}$

$$\vec{v}_r = (5 \vec{e}_\xi) = 5 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right) = 2,5 (\sqrt{2} \vec{i} + \sqrt{2} \vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v}_{absz} = (5 \vec{e}_\xi + 20 \vec{e}_\eta) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v}_{absz} = (-7,5\sqrt{2} \vec{i} + 12,5\sqrt{2} \vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Abszolút gyorsulás: } \vec{a}_{absz} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{száll} + \vec{a}_{Cor}$$

$$\vec{a}_{rel} = \vec{0} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{a}_{száll} = \vec{a}_\Omega + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} - \omega^2 \vec{\rho} = \vec{0} + \vec{0} - 10^2 (2 \vec{e}_\xi) = (-200 \vec{e}_\xi) = -100 (\sqrt{2} \vec{i} + \sqrt{2} \vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{a}_{Cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = 2(10 \vec{k}) \times (5 \vec{e}_\xi) = (100 \vec{e}_\eta) = 50 (-\sqrt{2} \vec{i} + \sqrt{2} \vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{a}_{absz} = (-200 \vec{e}_\xi + 100 \vec{e}_\eta) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{a}_{absz} = (-150\sqrt{2} \vec{i} - 50\sqrt{2} \vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$