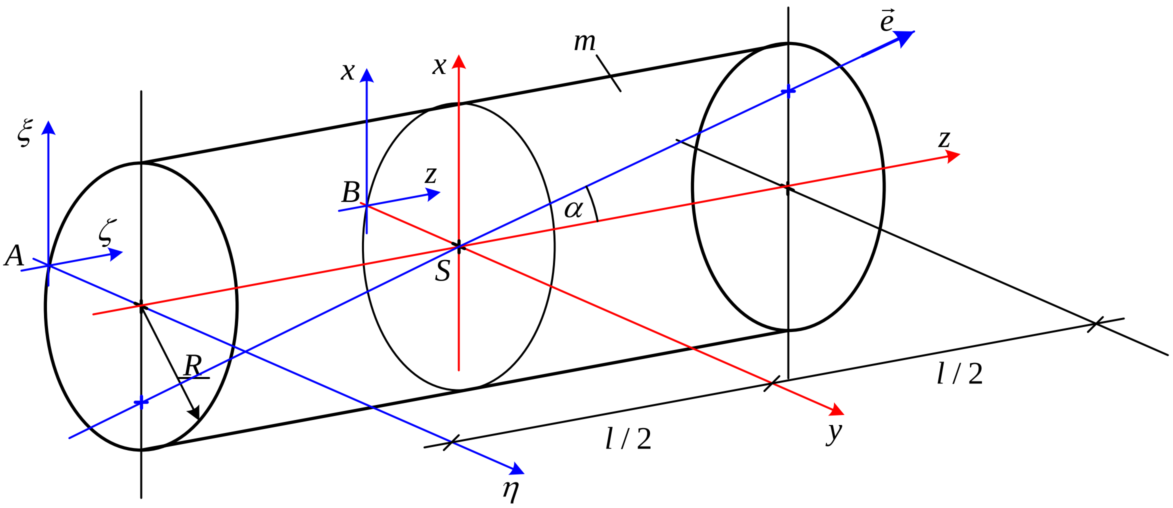
SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM | **ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK**

9. MECHANIKA-MOZGÁSTAN GYAKORLAT
(kidolgozta: Németh Imre óraadó tanár, Bojtár Gergely egyetemi ts., Szüle Veronika, egy. ts.)

Tehetetlenségi nyomatékok, teljesítmény, energia

9/1. feladat: Tehetetlenségi nyomatékok



Adott: $m = 10\,\text{kg}$, $R = 0{,}4\,\text{m}$, $l = 1\,\text{m}$, $\alpha = 30^\circ$.

Feladat:

a) Határozza meg a test S súlypontjára vonatkoztatott $\underline{\underline{J}}_S$ tehetetlenségi tenzorát!

b) Határozza meg a test S pontján átmenő $\vec{e}$ irányítású tengelyre számított J_e tehetetlenségi nyomatékát!

c) Határozza meg a test A pontjára számított $\underline{\underline{J}}_A$ tehetetlenségi tenzorát!

d) Határozza meg a test B pontjára számított $\underline{\underline{J}}_B$ tehetetlenségi tenzorát!

a) A henger S súlypontra számított tehetetlenségi tenzora: $\underline{\underline{J}}_S$. A henger x, y, z szimmetria tengelyei egyben a henger tehetetlenségi főtengelyei is, így az x, y, z tengelyekre számított tehetetlenségi nyomatékok fő tehetetlenségi nyomatékok!

$$\underline{\underline{J}}_S = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}23 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}23 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 \end{bmatrix} \text{kgm}^2$$

$$J_x = \frac{m}{12}\left(l^2 + 3R^2\right) = \frac{10}{12}\left(l^2 + 3\cdot 0{,}4^2\right) = 1{,}23\,\text{kgm}^2$$

$$J_y = \frac{m}{12}\left(l^2 + 3R^2\right) = \frac{10}{12}\left(l^2 + 3\cdot 0{,}4^2\right) = 1{,}23\,\text{kgm}^2$$

$$J_z = \frac{1}{2} mR^2 = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 0{,}4^2 = 0{,}8\,\text{kgm}^2$$

b) A henger tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka: J_e

$\vec{e}=\left(\sin\alpha\,\vec{i}+\cos\alpha\,\vec{k}\right)=\left(0,5\vec{i}+0,866\,\vec{k}\right)$, ahol $|\vec{e}|=1$

$$J_e=\vec{e}\cdot\left(\underline{\underline{J}}_S\cdot\vec{e}\right)=\vec{e}\cdot\vec{J}_S$$

$$\underline{\underline{J}}_S\cdot\vec{e}=\underline{\underline{J}}_S=\begin{bmatrix}1,23 & 0 & 0\\ 0 & 1,23 & 0\\ 0 & 0 & 0,8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,5\\ 0\\ 0,866\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1,23\cdot 0,5\\ 1,23\cdot 0\\ 0\cdot 0,5+0,8\cdot 0,866\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,615\\ 0\\ 0,693\end{bmatrix}$$

$$J_e=\vec{e}\cdot\left(\underline{\underline{J}}_S\cdot\vec{e}\right)=\vec{e}\cdot\vec{J}_S=\begin{bmatrix}0,5 & 0 & 0,866\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,615\\ 0\\ 0,693\end{bmatrix}=0,5\cdot 0,615+0+0,866\cdot 0,693=$$

$$=0,31+0,60=0,91$$

$$J_e=0,91\,\mathrm{kgm}^2$$

c) A henger A pontra számított tehetetlenségi tenzora: $\underline{\underline{J}}_A$

$$\vec{r}_{SA}=x_{SA}\vec{i}+y_{SA}\vec{j}+z_{SA}\vec{k}=0\,\vec{i}-R\,\vec{j}-\frac{l}{2}\vec{k}=\left(0\vec{i}-0,4\vec{j}-0,5\vec{k}\right)\mathrm{m}$$

A Steiner tétel alapján

$$J_\xi=J_x+m\left(y_{SA}^2+z_{SA}^2\right)=1,23+10\left(0,4^2+0,5^2\right)=5,33\,\mathrm{kgm}^2$$
$$J_\eta=J_y+m\left(x_{SA}^2+z_{SA}^2\right)=1,23+10\left(0^2+0,5^2\right)=3,73\,\mathrm{kgm}^2$$
$$J_\zeta=J_z+m\left(x_{SA}^2+y_{SA}^2\right)=0,8+10\left(0^2+0,4^2\right)=2,4\,\mathrm{kgm}^2$$

$$J_{\xi\eta}=J_{xy}+m\,x_{SA}y_{SA}=0+10\cdot 0\cdot(-0,4)=0$$
$$J_{\eta\zeta}=J_{yz}+m\,y_{SA}z_{SA}=0+10\cdot(-0,4)\cdot(-0,5)=2\,\mathrm{kgm}^2$$
$$J_{\zeta\xi}=J_{zx}+m\,z_{SA}x_{SA}=0+10\cdot(-0,5)\cdot 0=0$$

$$\underline{\underline{J}}_A=\begin{bmatrix}J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta}\\ -J_{\eta\xi} & J_\eta & -J_{\eta\zeta}\\ -J_{\zeta\xi} & -J_{\zeta\eta} & J_\zeta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5,33 & 0 & 0\\ 0 & 3,73 & -2\\ 0 & -2 & 2,4\end{bmatrix}\mathrm{kgm}^2$$

d) A henger B pontra számított tehetetlenségi tenzora: $\underline{\underline{J}}_B$

$$\vec{r}_{SB}=x_{SB}\vec{i}+y_{SB}\vec{j}+z_{SB}\vec{k}=0\,\vec{i}-R\,\vec{j}+0\vec{k}=\left(0\vec{i}-0,4\vec{j}+0\vec{k}\right)\mathrm{m}$$

A Steiner tétel alapján

$$J_{xB}=J_x+m\left(y_{SB}^2+z_{SB}^2\right)=\frac{m}{12}\left(l^2+3R^2\right)+mR^2=\frac{m}{12}\left(l^2+15R^2\right)=$$
$$=1,23+10\left(0,4^2+0^2\right)=2,83\,\mathrm{kgm}^2$$

$$J_{yB} = J_y + m\left(x_{SB}^2 + z_{SB}^2\right) = \frac{m}{12}\left(l^2 + 3R^2\right) + 0 = 1,23 + 10\left(0^2 + 0^2\right) = 1,23\ \text{kgm}^2$$

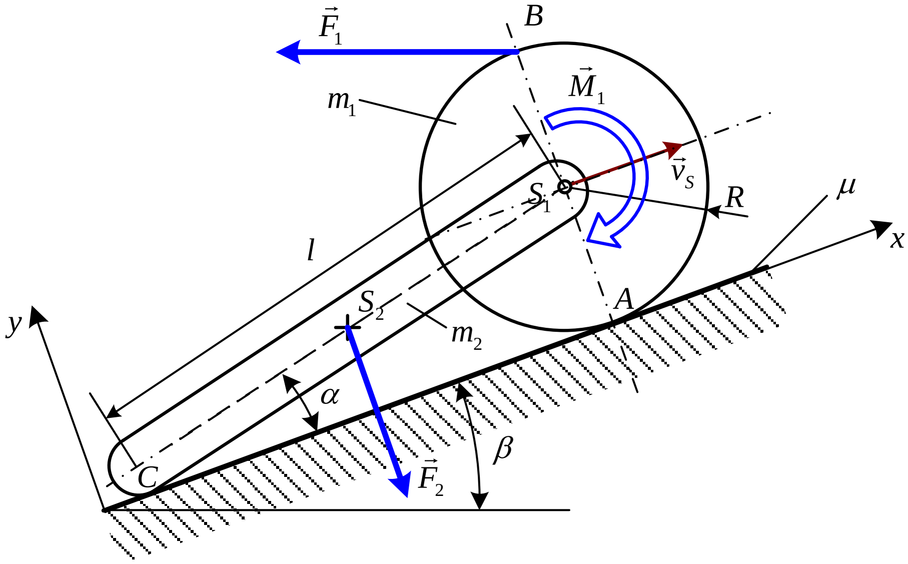
$$J_{zB} = J_z + m\left(x_{SB}^2 + y_{SB}^2\right) = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 =$$
$$= 0,8 + 10\left(0^2 + 0,4^2\right) = 2,4\ \text{kgm}^2$$

$$J_{xyB} = J_{xy} + m\, x_{SB} y_{SB} = 0 + 10 \cdot 0 \cdot \left(-0,4\right) = 0 = J_{yxB}$$
$$J_{yzB} = J_{yz} + m\, y_{SB} z_{SB} = 0 + 10 \cdot \left(-0,4\right) \cdot \left(0\right) = 0 = J_{zyB}$$
$$J_{zxB} = J_{zx} + m\, z_{SB} x_{SB} = 0 + 10 \cdot 0 \cdot 0 = 0 = J_{xzB}$$

$$\underline{\underline{J}}_B = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}\left(l^2 + 15R^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}\left(l^2 + 3R^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}mR^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{J}}_B = \begin{bmatrix} 2,83 & 0 & 0 \\ 0 & 1,23 & 0 \\ 0 & 0 & 2,4 \end{bmatrix} \text{kgm}^2$$

9/2. feladat: Teljesítmény, energia



Adott:

$\vec{v}_S=\left(2\,\vec{i}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $g\cong 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $m_1=10\,\text{kg}$, $m_2=8\,\text{kg}$, $R=0{,}5\,\text{m}$, $\alpha=30^\circ$, $\beta=30^\circ$,

$\mu=0{,}2$, $\vec{F}_1=\left(-60\,\vec{i}+20\,\vec{j}\right)\text{N}$, $\vec{F}_2=\left(-80\,\vec{j}\right)\text{N}$, $\vec{M}_1=\left(-20\,\vec{k}\right)\text{Nm}$.

Feladat:

a) Határozza meg a rendszer teljesítményét!

b) Határozza meg a rendszer kinetikai energiáját!

a) A két testből álló rendszerre ható nyomaték és erők teljesítménye: P

$$P_{G1}=\vec{G}_1\cdot\vec{v}_{S1}=-m_1g\left(\sin\beta\vec{i}+\cos\beta\vec{j}\right)\cdot\left(v_S\vec{i}\right)=-m_1g\sin\beta v_S$$

$$P_{G1}=-10\cdot 10\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=-100\text{ W}$$

$$P_{G2}=\vec{G}_2\cdot\vec{v}_{S2}=-m_2g\left(\sin\beta\vec{i}+\cos\beta\vec{j}\right)\cdot\left(v_S\vec{i}\right)=-m_2g\sin\beta v_S$$

$$P_{G2}=-8\cdot 10\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=-80\text{ W}$$

$$P_{F1}=\vec{F}_1\cdot\vec{v}_B=\left(F_{1x}\vec{i}+F_{1y}\vec{j}\right)\cdot\left(2v_S\vec{i}\right)$$

$$\vec{v}_{S1}=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\vec{r}_{AS}=\vec{0}+\left(-\omega\,\vec{k}\right)\times\left(R\,\vec{j}\right)=\left(R\omega\,\vec{i}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v}_B=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\vec{r}_{AB}=\vec{0}+\left(-\omega\,\vec{k}\right)\times\left(2R\,\vec{j}\right)=\left(2R\omega\,\vec{i}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}}=2\vec{v}_{S1}$$

$$P_{F1}=\left(-60\vec{i}+20\vec{j}\right)\cdot\left(4\vec{i}\right)=-240\text{ W}$$

$$P_{F2}=\vec{F}_2\cdot\vec{v}_S=\left(-80\vec{j}\right)\cdot\left(2\,\vec{i}\right)=0$$

$$P_{M1}=\vec{M}_1\cdot\vec{\omega}_1=\left(M_1\vec{k}\right)\cdot\left(\omega_1\vec{k}\right)=\left(-20\vec{k}\right)\cdot\left(-4\vec{k}\right)=80\text{ W}$$

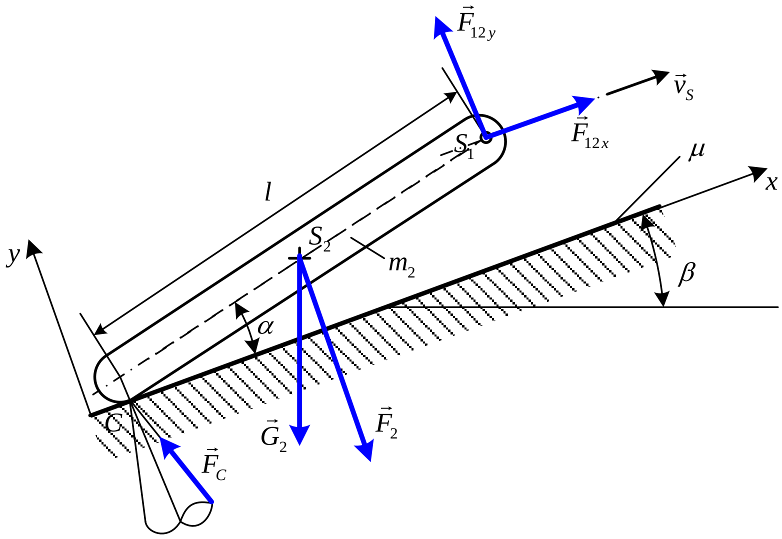
$$\omega_1 = \frac{v_S}{R} = \frac{2}{0,5} = 4 \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}_1 = \left(-4\,\vec{k}\right)\frac{1}{s}$$

$$P_{FC} = \vec{F}_C \cdot \vec{v}_C = \vec{F}_C \cdot \vec{v}_S = (-\mu F_N\,\vec{i} + F_N\,\vec{j}) \cdot (v_S\,\vec{i}) = (-11,3\vec{i} + 56,5\,\vec{j}) \cdot (2\,\vec{i}) = -22,6\ W$$

$$P = \sum P_i = \left(-100 - 80 - 240 + 80 - 22,6\right) = -362,6\ \mathrm{W}$$

$P_{FA} = 0$, mert $\vec{v}_A = 0$ (az A pont a henger sebességpólusa)

Perdület tétel a (2)-es test S_1 pontjára:



$\vec{F}_C = \vec{F}_S + \vec{F}_N = (-\mu F_N\,\vec{i} + F_N\,\vec{j})$

Az S_1 ponti tengelyre felírt perdület tétel:

$\dot{\vec{\pi}}_{S1} = \vec{0} = \vec{M}_{S1}$

$$M_{S1} = F_2\frac{l}{2}\cos\alpha + m_2 g\cos\beta\frac{l}{2}\cos\alpha - m_2 g\sin\beta\frac{l}{2}\sin\alpha - F_S\,l\sin\alpha - F_N\,l\cos\alpha$$

$$F_2\frac{l}{2}\cos\alpha + m_2 g\cos\beta\frac{l}{2}\cos\alpha - m_2 g\sin\beta\frac{l}{2}\sin\alpha = F_S\,l\sin\alpha + F_N\,l\cos\alpha$$

$$F_2\frac{l}{2}\cos\alpha + m_2 g\cos\beta\frac{l}{2}\cos\alpha - m_2 g\sin\beta\frac{l}{2}\sin\alpha = \mu F_N\,l\sin\alpha + F_N\,l\cos\alpha$$

$$F_2\cos\alpha + m_2 g(\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha) = 2F_N(\mu\sin\alpha + \cos\alpha)$$

$$F_N = \frac{F_2\cos\alpha + m_2 g(\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha)}{2(\mu\sin\alpha + \cos\alpha)} = \frac{80\cdot 0,866 + 8\cdot 10\cdot(0,866^2 - 0,5^2)}{2(0,2\cdot 0,5 + 0,866)} = 56,5\ N$$

$$\vec{F}_C = \vec{F}_S + \vec{F}_N = (-\mu F_N\,\vec{i} + F_N\,\vec{j}) = (-0,2\cdot 56,5\vec{i} + 56,5\vec{j}) = (-11,3\vec{i} + 56,5\,\vec{j})\ N$$

b) A rendszer kinetikai energiája: E

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{S1}^2 + \frac{1}{2} J_{S1} \omega_1^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 \left(R\omega_1\right)^2 + J_{S1}\omega_1^2\right) = \frac{1}{2}\left(m_1 R^2 \omega_1{}^2 + J_{S1}\omega_1^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(m_1 R^2 + J_{S1}\right)}_{J_a}\omega_1^2 = \frac{1}{2} J_a \omega_1^2$$

$$J_{S1} = \frac{1}{2} m_1 R^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,5^2 = 1,25 \text{ kgm}^2$$

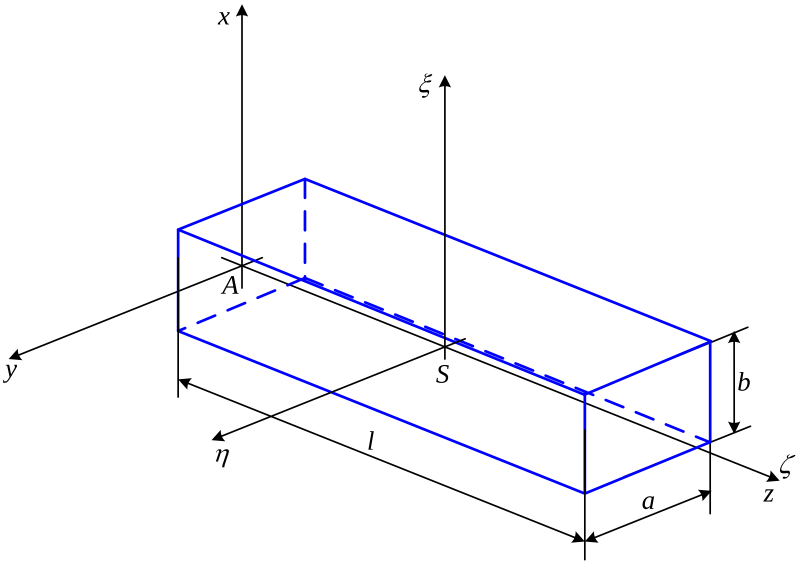
$$J_a = \frac{3}{2} m_1 R^2 = \frac{3}{2} \cdot 10 \cdot 0,5^2 = 3,75 \text{ kgm}^2$$

$$E_1 = \frac{1}{2} J_a \omega_1^2 = 0,5 \cdot 3,75 \cdot 4^2 = 30\ J$$

$$E_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{S2}^2 = 0,5 \cdot 8 \cdot 2^2 = 16\ J$$

$$E = \sum E_i = E_1 + E_2 = 30 + 16 = 46\ J$$

9/3. feladat: Prizmatikus rúd tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka



Adott: a rúd geometriai méretei: a, b, l és az anyag ρ tömegsűrűsége.
Feladat: a ξ, η, ζ és az x, y tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékok meghatározása.

$$J_\xi = \int_{(m)} \left(\eta^2+\zeta^2\right) dm = \int_{\xi=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\eta=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{\zeta=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\eta^2+\zeta^2\right)\rho \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = \int_{\eta=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{\zeta=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\left(\eta^2+\zeta^2\right)\rho \, \xi\right]_{\xi=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} d\eta \, d\zeta =$$

$$= b\rho \int_{\zeta=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\frac{\eta^3}{3}+\zeta^2\eta\right]_{\eta=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} d\zeta = b\rho \int_{\zeta=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{a^3}{24}+\zeta^2\frac{a}{2}+\frac{a^3}{24}+\zeta^2\frac{a}{2}\right) d\zeta = b\rho \int_{\zeta=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{a^3}{12}+\zeta^2 a\right) d\zeta =$$

$$= b\rho\frac{a^3}{12}\left[\zeta\right]_{\zeta=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} + b\rho a\left[\frac{\zeta^3}{3}\right]_{\zeta=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = b\rho\frac{a^3}{12}\left[\frac{l}{2}-\left(-\frac{l}{2}\right)\right] + b\rho a\left[\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3}-\frac{\left(-\frac{l}{2}\right)^3}{3}\right] = b\rho\frac{a^3}{12}l + b\rho a\left[\frac{l^3}{12}\right] =$$

$$= \frac{1}{12}\underbrace{abl\rho}_{=m}\left(a^2+l^2\right) = \frac{m}{12}\left(a^2+l^2\right)$$

$$\boxed{J_\xi = \frac{m}{12}\left(a^2+l^2\right)}$$

$$J_\eta = \int\limits_{(m)} \left(\xi^2+\zeta^2\right) dm = \int\limits_{\xi=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int\limits_{\eta=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{\zeta=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\xi^2+\zeta^2\right)\rho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \int\limits_{\eta=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{\zeta=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\left(\frac{\xi^3}{3}+\zeta^2\xi\right)\rho\right]_{\xi=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} d\eta\, d\zeta =$$

$$= \int\limits_{\eta=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{\zeta=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{b^3}{24}+\zeta^2\frac{b}{2}+\frac{b^3}{24}+\zeta^2\frac{b}{2}\right)\rho\, d\eta\, d\zeta = \int\limits_{\zeta=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{b^3}{12}+\zeta^2 b\right)\rho\left[\eta\right]_{\eta=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\, d\zeta =$$

$$= \int\limits_{\zeta=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{b^3}{12}+\zeta^2 b\right)\rho\left[\frac{a}{2}-\left(-\frac{a}{2}\right)\right] d\zeta = \int\limits_{\zeta=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{b^3}{12}+\zeta^2 b\right)\rho a\, d\zeta = \left[\left(\frac{b^3}{12}\zeta+\frac{\zeta^3}{3}b\right)\rho a\right]_{\zeta=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} =$$

$$= \left(\frac{b^3}{12}\frac{l}{2}+\frac{l^3}{24}b+\frac{b^3}{12}\frac{l}{2}+\frac{l^3}{24}b\right)\rho a = \left(\frac{b^3}{12}l+\frac{l^3}{12}b\right)\rho a = \frac{1}{12}\underbrace{abl\rho}_{=m}\left(b^2+l^2\right) = \frac{m}{12}\left(b^2+l^2\right)$$

$$\boxed{J_\eta = \frac{m}{12}\left(b^2+l^2\right)}$$

$$J_\zeta = \int\limits_{(m)} \left(\xi^2+\eta^2\right) dm = \int\limits_{\xi=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int\limits_{\eta=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{\zeta=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\xi^2+\eta^2\right)\rho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \int\limits_{\eta=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{\zeta=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\left(\frac{\xi^3}{3}+\eta^2\xi\right)\rho\right]_{\xi=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} d\eta\, d\zeta =$$

$$= \int\limits_{\eta=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{\zeta=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{b^3}{24}+\eta^2\frac{b}{2}+\frac{b^3}{24}+\eta^2\frac{b}{2}\right)\rho\, d\eta\, d\zeta = \int\limits_{\zeta=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\left(\frac{b^3}{12}\eta+\frac{\eta^3}{3}b\right)\rho\right]_{\eta=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} d\zeta =$$

$$= \int\limits_{\zeta=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{b^3}{12}\left[\frac{a}{2}-\left(-\frac{a}{2}\right)\right]+\left[\frac{a^3}{24}-\left(-\frac{a^3}{24}\right)\right]b\right)\rho\, d\zeta = \int\limits_{\zeta=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{b^3}{12}a+\frac{a^3}{12}b\right)\rho\, d\zeta = \left[\left(\frac{b^3}{12}a+\frac{a^3}{12}b\right)\rho\zeta\right]_{\zeta=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} =$$

$$= \left(\frac{b^3}{12}a+\frac{a^3}{12}b\right)\rho l = \frac{1}{12}\underbrace{abl\rho}_{=m}\left(b^2+a^2\right) = \frac{m}{12}\left(b^2+a^2\right)$$

$$\boxed{J_\zeta = \frac{m}{12}\left(a^2+b^2\right)}$$

$$J_x = \int\limits_{(m)} \left(\eta^2+\zeta^2\right) dm = \int\limits_{\xi=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int\limits_{\eta=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{\zeta=0}^{l} \left(\eta^2+\zeta^2\right)\rho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \int\limits_{\eta=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{\zeta=0}^{l} \left[\left(\eta^2+\zeta^2\right)\rho\,\xi\right]_{\xi=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} d\eta\, d\zeta =$$

$$= b\rho\int\limits_{\zeta=0}^{l}\left[\frac{\eta^3}{3}+\zeta^2\eta\right]_{\eta=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} d\zeta = b\rho\int\limits_{\zeta=0}^{l}\left(\frac{a^3}{24}+\zeta^2\frac{a}{2}+\frac{a^3}{24}+\zeta^2\frac{a}{2}\right)d\zeta = b\rho\int\limits_{\zeta=0}^{l}\left(\frac{a^3}{12}+\zeta^2 a\right)d\zeta =$$

$$= b\rho\frac{a^3}{12}\left[\zeta\right]_{\zeta=0}^{l} + b\rho a\left[\frac{\zeta^3}{3}\right]_{\zeta=0}^{l} = b\rho\frac{a^3}{12}\left[l-0\right]+b\rho a\left[\frac{l^3}{3}-0\right] = b\rho\frac{a^3}{12}l+b\rho a\left[\frac{l^3}{3}\right] =$$

$$= \frac{1}{12}\underbrace{abl\rho}_{=m}\left(a^2+4l^2\right) = \frac{m}{12}\left(a^2+4l^2\right)$$

$$\boxed{J_x = \frac{m}{12}\left(a^2 + 4l^2\right)}$$

$$J_y = \int\limits_{(m)} \left(\xi^2 + \zeta^2\right) dm = \int\limits_{\xi=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int\limits_{\eta=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{\zeta=0}^{l} \left(\xi^2 + \zeta^2\right) \rho \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = \int\limits_{\eta=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{\zeta=0}^{l} \left[\left(\frac{\xi^3}{3} + \zeta^2 \xi\right)\rho\right]_{\xi=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} d\eta \, d\zeta =$$

$$= \int\limits_{\eta=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{\zeta=0}^{l} \left(\frac{b^3}{24} + \zeta^2 \frac{b}{2} + \frac{b^3}{24} + \zeta^2 \frac{b}{2}\right)\rho \, d\eta \, d\zeta = \int\limits_{\zeta=0}^{l} \left(\frac{b^3}{12} + \zeta^2 b\right)\rho\left[\eta\right]_{\eta=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \, d\zeta =$$

$$= \int\limits_{\zeta=0}^{l} \left(\frac{b^3}{12} + \zeta^2 b\right)\rho\left[\frac{a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right)\right] \, d\zeta = \int\limits_{\zeta=0}^{l} \left(\frac{b^3}{12} + \zeta^2 b\right)\rho a \, d\zeta = \left[\left(\frac{b^3}{12}\zeta + \frac{\zeta^3}{3} b\right)\rho a\right]_{\zeta=0}^{l} =$$

$$= \left(\frac{b^3}{12}\left[l - 0\right] + \left[\frac{l^3}{3} - 0\right] b\right)\rho a = \left(\frac{b^3}{12} l + \frac{l^3}{3} b\right)\rho a = \frac{1}{12} \underbrace{abl\rho}_{=m}\left(b^2 + 4l^2\right) = \frac{m}{12}\left(b^2 + 4l^2\right)$$

$$\boxed{J_y = \frac{m}{12}\left(b^2 + 4l^2\right)}$$

Steiner tétel alapján:

$$J_x = J_\xi + m\left(y_{SA}^2 + z_{SA}^2\right) = J_\xi + m\left(0 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right) = J_\xi + m\frac{l^2}{4} = \frac{m}{12}\left(a^2 + l^2\right) + m\frac{l^2}{4} = \frac{m}{12}\left(a^2 + l^2\right) + \frac{m}{12} 3l^2 =$$

$$= \frac{m}{12}\left(a^2 + l^2 + 3l^2\right) = \frac{m}{12}\left(a^2 + 4l^2\right)$$

$$J_y = J_\eta + m\left(x_{SA}^2 + z_{SA}^2\right) = J_\xi + m\left(0 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right) = J_\xi + m\frac{l^2}{4} = \frac{m}{12}\left(b^2 + l^2\right) + m\frac{l^2}{4} = \frac{m}{12}\left(b^2 + l^2\right) + \frac{m}{12} 3l^2 =$$

$$= \frac{m}{12}\left(b^2 + l^2 + 3l^2\right) = \frac{m}{12}\left(b^2 + 4l^2\right)$$

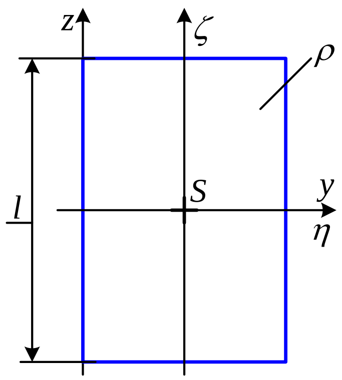
Ha $l \gg a, b$ vagyis a rúd karcsú, akkor $J_\xi = J_\eta = \dfrac{ml^2}{12}$.

Steiner-tétel ebben az esetben:

$$J_x = J_\xi + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3},$$

$$J_y = J_\eta + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}.$$

9/4. feladat: Henger tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka

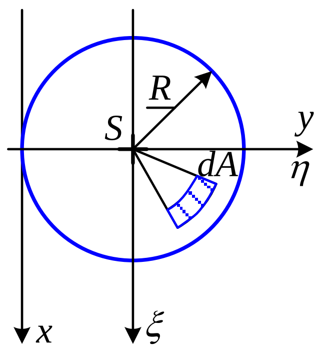


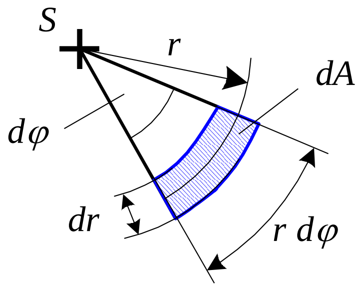
Adott:

a henger geometriai méretei: R, l és az anyag ρ tömegsűrűsége.

Feladat:

a ξ, η és a z tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték meghatározása.





$$J_\zeta = \int\limits_{(m)} \left(\xi^2+\eta^2\right)\rho\, dV = \int\limits_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} r^2\ \rho\ \underbrace{r\, d\varphi\, dr\, dz}_{dV} = \rho\, h\, 2\pi \int\limits_{r=0}^{R} r^3 dr =$$

$$= \rho\, h\, 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \rho\, h\, 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} \underbrace{\underbrace{R^2 \pi h}_{=V} \rho}_{=m} R^2 = \frac{1}{2} m\, R^2$$

$$\boxed{J_\zeta = \frac{1}{2} m\, R^2}$$

$$J_\eta = \int\limits_{(m)} \left(\xi^2+\zeta^2\right) dm = \int\limits_{(V)} \left(\xi^2+\zeta^2\right)\rho\, dV = \int\limits_{(V)} \xi^2\, \underbrace{\rho\, dV}_{dm} + \int\limits_{(V)} \zeta^2\, \underbrace{\rho\, dV}_{dm} = *$$

$$\int\limits_{(V)} \zeta^2 \rho\, dV = \int\limits_{\zeta=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \zeta^2 \rho A\, d\zeta = \rho A \int\limits_{\zeta=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \zeta^2\, d\zeta = \rho A \left[\frac{\zeta^3}{3}\right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \rho A \left[\frac{l^3}{8\cdot 3} - \left(-\frac{l^3}{8\cdot 3}\right)\right] =$$

$$= \rho A 2 \frac{l^3}{24} = \rho A \frac{l^3}{12} = \underbrace{\rho A l}_{m} \frac{l^2}{12} = \frac{1}{12} m l^2$$

$$\int_{(V)} \xi^2 \rho\, dV = \int_{(A)} \xi^2 \underbrace{\rho\, l dA}_{dV} = \rho\, l \underbrace{\int_{(A)} \xi^2 dA}_{I_y} = \rho\, l\, I_y = \rho\, l\, \frac{D^4 \pi}{64} = \rho\, l\, \frac{(2R)^4 \pi}{64} =$$

$$= \rho\, l\, \frac{16R^4 \pi}{64} = \rho\, l\, \frac{R^4 \pi}{4} = \underbrace{\rho\, l \pi R^2}_{m} \frac{R^2}{4} = \frac{1}{4} mR^2$$

$$I_y = \int_{(A)} \xi^2\, dA = \int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin^2 \varphi\, \underbrace{r\, d\varphi\, dr}_{dA} = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \left[\frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{\sin(2\varphi)}{2}\right)\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{R^4}{4}\pi = \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^4}{4}\pi = \frac{D^4}{64}\pi$$

$$* = J_\eta = \int_{(m)} \left(\xi^2 + \zeta^2\right) dm = \int_{(V)} \xi^2 \underbrace{\rho\, dV}_{dm} + \int_{(V)} \zeta^2 \underbrace{\rho\, dV}_{dm} =$$

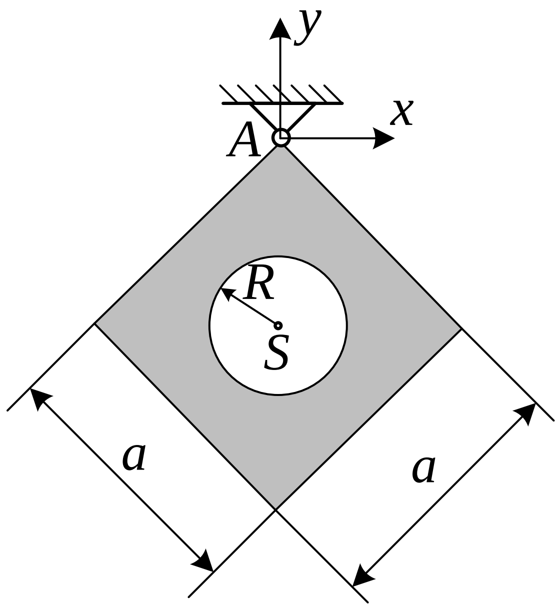
$$= \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} ml^2 = \frac{1}{12} m 3R^2 + \frac{1}{12} ml^2 = \frac{1}{12} m\left(3R^2 + l^2\right)$$

$$\boxed{J_\eta = \frac{1}{12} m\left(3R^2 + l^2\right)}$$

Steiner-tétel:

$$J_z = J_\zeta + m\, R^2 = \frac{1}{2} m\, R^2 + m\, R^2 = \frac{3}{2} m\, R^2$$

9/5. feladat: Tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték



Adott: Az ábrán látható test, ami az A ponton átmenő z tengely körül végez lengő mozgást. A méretei az ábrán láthatóak a test vastagsága 12 mm. A test anyaga alumínium, sűrűsége $2700\frac{kg}{m^3}$.

$$a = 50mm, \quad R = 10mm, \quad v = 12mm, \quad \rho = 2700\frac{kg}{m^3}$$

Feladat:

a) Mekkora az ábrán látható merev test tehetetlenségi nyomatéka az A ponton átmenő z tengelyre?

Az alap négyzet lemez tömege: $m_{négyzet} = \rho V_{négyzet} = \rho a^2 v = \frac{2700}{10^9}50^2 \cdot 12 = 0,081\,kg$

A kifúrt henger tömege: $m_{henger} = \rho V_{henger} = \rho R^2 \pi v = \frac{2700}{10^9}10^2 \cdot 3,1415 \cdot 12 \simeq 0,01018\,kg$

$$J_z = J_z^{négyzet} - J_z^{henger}$$

Az S ponton átmenő és az A ponton átmenő z tengelyek távolsága:

az átló hossza: $d = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$, így a tengelyek távolsága $\frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Steiner tétel alapján a négyzet tehetetlenségi nyomatéka a z tengelyre:

$$J_z^{négyzet} = \frac{1}{12} m_{négyzet} \left[a^2 + a^2 \right] + m_{négyzet} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \underbrace{\frac{1}{12} 0,081 \left[50^2 + 50^2 \right]}_{=33,75} + \underbrace{0,081 \left(\frac{50\sqrt{2}}{2} \right)^2}_{=101,25} =$$

$$= 33,75 + 101,25 = 135\ kgmm^2 = 135 \cdot 10^{-6}\ kgm^2$$

Steiner tétel alapján a kifúrt henger tehetetlenségi nyomatéka a z tengelyre:

$$J_z^{henger} = \frac{1}{2} m_{henger}\ R^2 + m_{henger} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} 0,01018 \cdot 10^2 + 0,01018 \left(\frac{50\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 0,509 + 12,725 =$$

$$= 13,234\ kgmm^2 = 13,234 \cdot 10^{-6} kgm^2$$

A test tehetetlenségi nyomatéka az A ponti z tengelyre így:

$$J_z = J_z^{négyzet} - J_z^{henger} = 135 \cdot 10^{-6} - 13,234 \cdot 10^{-6} = 121,766 \cdot 10^{-6}\ kgm^2$$