SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM

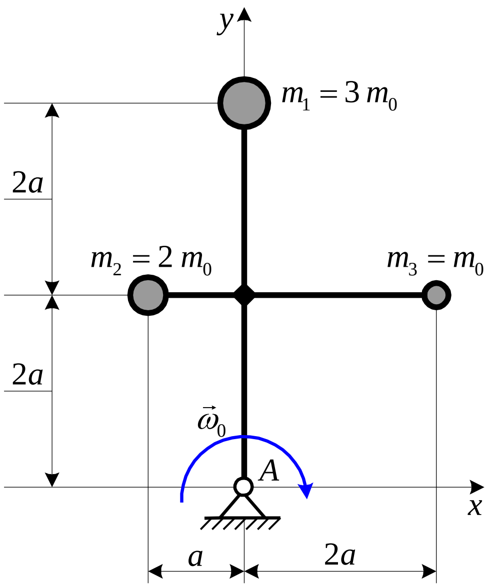
ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK

6. MECHANIKA-MOZGÁSTAN GYAKORLAT

(kidolgozta: Németh Imre óraadó tanár, Bojtár Gergely egyetemi ts., Szüle Veronika, egy. ts.)

Tömegpontrendszer impulzusa, tömegpont ferde hajítása

6/1. feladat: *Tömegpontrendszer impulzusa*



Adott:
$m_0 = 1\,\text{kg}$,
$a = 1\,\text{m}$,
$\vec{\omega}_0 = \left(-2\,\vec{k}\right)\frac{1}{s}$,
A rudak merevek és súlytalanok!

Feladat: meghatározni
a) a tömegpontok sebességeit,
b) a rendszer eredő impulzusvektorát,
c) a rendszer A pontra számított perdületét és
d) az eredő impulzusvektor hatásvonalát!

a) A tömegpontok sebessége: $\vec{v}_i$

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega}_0 \times \vec{r}_{A1} = \left(-\omega_0\,\vec{k}\right)\times\left(4a\,\vec{j}\right) = \left(4a\omega_0\vec{i}\right) = \left(8\,\vec{i}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{\omega}_0 \times \vec{r}_{A2} = \left(-\omega_0\,\vec{k}\right)\times\left(-a\,\vec{i} + 2a\,\vec{j}\right) = \left(2a\omega_0\,\vec{i} + a\omega_0\,\vec{j}\right) = \left(4\,\vec{i} + 2\,\vec{j}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v}_3 = \vec{\omega}_0 \times \vec{r}_{A3} = \left(-\omega_0\,\vec{k}\right)\times\left(2a\,\vec{i} + 2a\,\vec{j}\right) = \left(2a\omega_0\,\vec{i} - 2a\omega_0\,\vec{j}\right) = \left(4\,\vec{i} - 4\,\vec{j}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) A rendszer impulzusa: $\vec{I}$

$$\vec{I}_1 = m_1\vec{v}_1 = 3m_0\left(4a\omega_0\,\vec{i}\right) = \left(12\,a\,m_0\,\omega_0\,\vec{i}\right) = \left(24\vec{i}\right)\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{I}_2 = m_2\vec{v}_2 = 2m_0\left(2a\omega_0\,\vec{i} + a\omega_0\,\vec{j}\right) = \left(4\,a\,m_0\,\omega_0\,\vec{i} + 2\,a\,m_0\,\omega_0\,\vec{j}\right) = \left(8\vec{i} + 4\vec{j}\right)\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{I}_3 = m_3\vec{v}_3 = m_0\left(2a\omega_0\,i - 2a\omega_0\,\vec{j}\right) = \left(2\,a\,m_0\,\omega_0\,\vec{i} - 2\,a\,m_0\,\omega_0\,\vec{j}\right) = \left(4\vec{i} - 4\vec{j}\right)\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^{3}\vec{I}_i = \left(18\,a\,m_0\,\omega_0\,\vec{i}\right) = \left(36\,\vec{i}\right)\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{Ns}$$

c) A rendszer perdülete az A pontra: $\vec{\pi}_A$

$$\vec{\pi}_{A1}=\vec{r}_{A1}\times\vec{I}_1=\left(4a\,\vec{j}\right)\times\left(12\,a\,m_0\,\omega_0\,\vec{i}\right)=\left(-48\,a^2\,m_0\,\omega_0\,\vec{k}\right)=\left(-96\vec{k}\right)\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$$

$$\vec{\pi}_{A2}=\vec{r}_{A2}\times\vec{I}_2=\left(-a\,\vec{i}+2a\,\vec{j}\right)\times\left(4\,a\,m_0\,\omega_0\,\vec{i}+2\,a\,m_0\,\omega_0\,\vec{j}\right)=\left(-10\,a^2\,m_0\,\omega_0\,\vec{k}\right)=\left(-20\vec{k}\right)\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$$

$$\vec{\pi}_{A3}=\vec{r}_{A3}\times\vec{I}_3=\left(2a\,\vec{i}+2a\,\vec{j}\right)\times\left(2\,a\,m_0\,\omega_0\,\vec{i}-2\,a\,m_0\,\omega_0\,\vec{j}\right)=\left(-8\,a^2\,m_0\,\omega_0\,\vec{k}\right)=\left(-16\vec{k}\right)\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$$

$$\vec{\pi}_A=\sum_{i=1}^{3}\vec{\pi}_{Ai}=\left(-66\,a^2\,m_0\,\omega_0\,\vec{k}\right)=\left(-132\,\vec{k}\right)\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}=\mathrm{Nms}$$

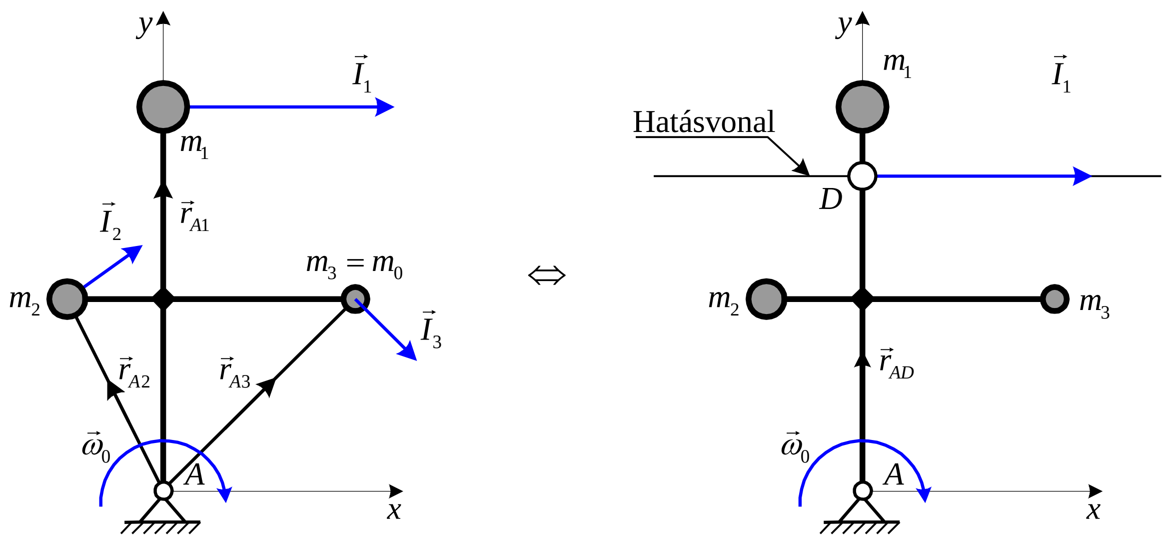
d) Az eredő impulzusvektor hatásvonalának meghatározása

Definíció: a hatásvonal bármely pontjára számított impulzusnyomaték (perdület) zérus. A D pont az eredő impulzusvektor hatásvonalán levő azon pont, mely az A ponthoz legközelebb van.

$$\underbrace{\vec{\pi}_D}_{=\vec{0}}=\vec{\pi}_A+\vec{I}\times\vec{r}_{AD}\qquad/\times\vec{I}$$

$$\vec{0}=\vec{\pi}_A\times\vec{I}+\left(\vec{I}\times\vec{r}_{AD}\right)\times\vec{I}=\left(\vec{\pi}_A\times\vec{I}\right)+\vec{r}_{AD}\cdot I^2-\vec{I}\cdot\underbrace{\left(\vec{r}_{AD}\cdot\vec{I}\right)}_{=0}$$

$$\vec{r}_{AD}=\frac{-\left(\vec{\pi}_A\times\vec{I}\right)}{I^2}=-\frac{\left(-66\,a^2\,m_0\,\omega_0\,\vec{k}\right)\times\left(18\,a\,m_0\,\omega_0\,\vec{i}\right)}{\left(18^2\,a^2\,m_0^2\,\omega_0^2\right)}=\left(\frac{22}{6}a\,\vec{j}\right)=\left(3{,}66\,\vec{j}\right)\mathrm{m}$$



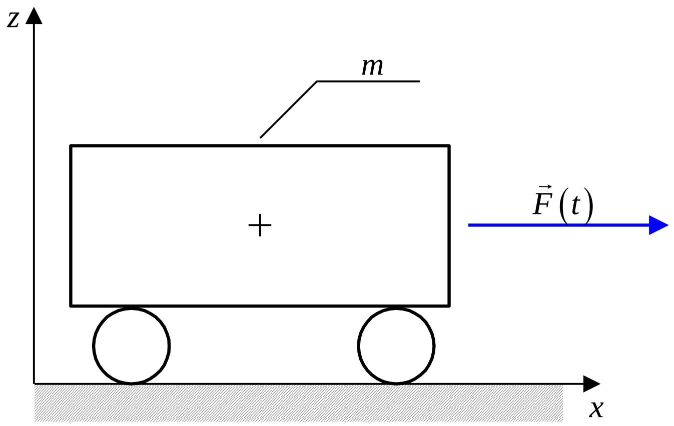
$$\vec{\pi}_A=\sum_{i=1}^{3}\left(\vec{r}_{Ai}\times\vec{I}_i\right)=\left(132\,\vec{k}\right)\mathrm{Nms}\qquad\Leftrightarrow\qquad\vec{\pi}_A=\underbrace{\vec{\pi}_D}_{=\vec{0}}+\vec{r}_{AD}\times\vec{I}=\left(-132\,\vec{k}\right)\mathrm{Nms}$$

$$\underbrace{\vec{\pi}_D}_{=\vec{0}}=\vec{\pi}_A+\vec{I}\times\vec{r}_{AD}$$

$$\vec{0}=\left(-132\vec{k}\right)+\left(36\vec{i}\right)\times\left(y_{AD}\,\vec{j}\right)\qquad/\cdot\vec{k}$$

$$0=-132+36y_{AD}\quad\Rightarrow\quad y_{AD}=\frac{132}{36}=3{,}66m\qquad\vec{r}_{AD}=\left(3{,}66\,\vec{j}\right)m$$

6/2. feladat: ***Newton II. törvénye***



Adott:

$\vec{F}=\vec{F}(t)$ vonóerő függvény

$\vec{F}(t)=\left(a\,t^2+b\,t+c\right)\vec{i}$

$a=300\,\dfrac{\text{N}}{\text{s}^2},\quad c=500\ \text{N},$

$b=200\,\dfrac{\text{N}}{\text{s}},\quad m=1000\ \text{kg},$

$\vec{v}_0=\vec{0},\quad \vec{r}_0=\vec{0}.,$

Feladat: meghatározni

a) $\vec{a}=\vec{a}(t)$ gyorsulás-idő függvényt,

b) $\vec{v}=\vec{v}(t)$ sebesség-idő függvényt,

c) $\vec{r}=\vec{r}(t)$ mozgásfüggvényt.

a) Gyorsulás-idő függvényt: $\vec{a}(t)$

Newton II. törvénye: $\vec{F}=m\,\vec{a}$ alapján

$$\vec{a}(t)=\frac{1}{m}\vec{F}(t)=\frac{1}{m}\left(a\,t^2+b\,t+c\right)\vec{i}=\left(0{,}3\,t^2+0{,}2\,t+0{,}5\right)\vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

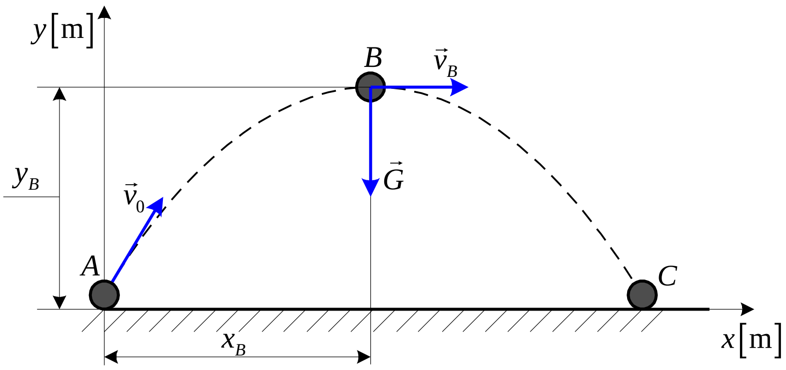
b) Sebesség-idő függvényt: $\vec{v}(t)$

$$\vec{v}(t)=\underbrace{\vec{v}_0}_{=\vec{0}}+\int\vec{a}(t)\,dt=\frac{1}{m}\left(a\frac{t^3}{3}+b\frac{t^2}{2}+ct\right)\vec{i}=\left(0{,}1t^3+0{,}1t^2+0{,}5t\right)\vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) Mozgás függvény: $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t)=\underbrace{\vec{r}_0}_{=\vec{0}}+\int\vec{v}(t)\,dt=\frac{1}{m}\left(a\frac{t^4}{12}+b\frac{t^3}{6}+c\frac{t^2}{2}\right)\vec{i}=\left(\frac{0{,}1}{4}t^4+\frac{0{,}1}{3}t^3+\frac{0{,}5}{2}t^2\right)\vec{i}\ \text{m}$$

6/3. feladat: Tömegpont ferde hajítása



Adott:

$\vec{r}(t=0)=\vec{r}_0=\vec{0},$

$\vec{v}(t=0)=\vec{v}_0=\left(100\vec{i}+60\vec{j}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$

$\vec{\mathrm{g}}=\left(-10\vec{\mathrm{j}}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$

Feladat: a) Határozza meg az $\vec{a}(t)$ gyorsulásfüggvényt, a $\vec{v}(t)$ sebességfüggvényt és az $\vec{r}(t)$ mozgásfüggvényt!

b) Határozza meg a pálya legmagasabb B pontjának eléréséhez szükséges hajítási időt és a teljes hajítási időt!

c) Határozza meg az anyagi pont pályájának magasságát és hosszát!

a) Impulzus tétel: $m\,\vec{a}=\vec{G}=m\,\vec{g}\Rightarrow\vec{a}=\vec{g}=\text{állandó}$

A sebességfüggvény: $\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\int\vec{g}\,dt=\vec{v}_0+\vec{g}\cdot t$

A mozgásfüggvény: $\vec{r}(t)=\underbrace{\vec{r}_0}_{=\vec{0}}+\vec{v}_0t+\vec{g}\,\frac{t^2}{2}$

b) Az impulzus tétel integrál alakja: $\vec{I}(B)-\vec{I}(A)=\int\limits_{t_0}^{t_B}\vec{F}\,dt$

$$m\,\vec{v}_B-m\,\vec{v}_0=m\,\vec{g}\,t_B\quad/\cdot\vec{i},\,\vec{j}$$

$$m\,v_B-m\,v_{0x}=0\qquad\Rightarrow v_B=v_{0x},\,\vec{v}_B=v_{Bx}\vec{i}=\left(100\,\vec{i}\right)\frac{m}{s}$$

$$mv_{0y}=-mgt_B\Rightarrow t_B=\frac{v_{0y}}{g}=\frac{60}{10}=6\,s$$

A pálya legmagasabb pontjának eléréséhez szükséges idő: t_B.

Az egész hajítási idő: $t_C=2t_B=12\,s$

c) Az anyagi pont pályájának magassága és hossza:

Munkatétel integrál alakja: $\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\int\limits_{\vec{0}}^{\vec{r}_B}\vec{G}d\vec{r}=\int\limits_{\vec{0}}^{\vec{r}_B}m\,\vec{g}\,d\vec{r}=m\,\vec{g}\cdot\vec{r}_B-0$

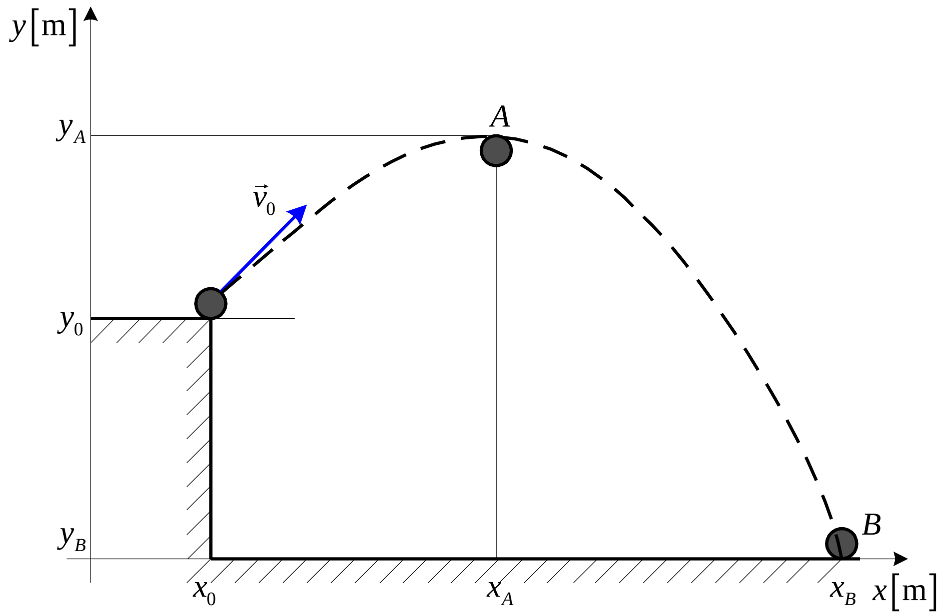
$$\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_0^2=m\left(-g\vec{j}\right)\cdot\left(x_B\vec{i}+y_B\vec{j}\right)=-mgy_B$$

$v_{0x}^2-v_0^2=-2\,g\,y_B\Rightarrow$ A pálya magassága: $y_B=\frac{v_0^2-v_{0x}^2}{2g}=\frac{\left(100^2+60^2\right)-100^2}{20}=180\,\mathrm{m}$

A mozgástörvényből: $x_B=v_{0x}t_B=100\cdot6=600\,\mathrm{m}$

A pálya hossza: $x_C=2x_B=2v_{0x}t_B=2\cdot100\cdot6=1200\,\mathrm{m}$

6/4. feladat: Tömegpont ferde hajítása



Adott:

$\vec{r}_0 = \left(50\vec{i} + 10\vec{j}\right)$ m,

$\alpha = 30^\circ$,

$v_0 = 10\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$,

$g = 10\,\dfrac{m}{s^2}$.

Feladat: a) Határozza meg az $\vec{a}(t)$ gyorsulásfüggvényt, a $\vec{v}(t)$ sebességfüggvényt és az $\vec{r}(t)$ mozgásfüggvényt!

b) Határozza meg a pálya legmagasabb A pontjának eléréséhez szükséges hajítási időt!

c) Határozza meg a hajítás idejét és hosszát!

a) Impulzus tétel: $m\,\vec{a} = \vec{G} = m\,\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} = \text{állandó}$

A sebességfüggvény: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int \vec{g}\,dt = \vec{v}_0 + \vec{g}\cdot t$, ahol

$$\vec{v}_0 = v_0\cos\alpha\vec{i} + v_0\sin\alpha\vec{j} = 10\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + 10\frac{1}{2}\vec{j} = \left(8,66\vec{i} + 5\vec{j}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A mozgásfüggvény: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{g}\,\dfrac{t^2}{2}$

b) Az impulzus tétel integrál alakja: $\vec{I}(A) - \vec{I}(0) = \int_{t_0}^{t_A} \vec{F}\,dt$

$$m\,\vec{v}_A - m\,\vec{v}_0 = m\,\vec{g}\,t_A$$

$$m\,v_{Ax}\vec{i} - m\left(v_0\cos\alpha\vec{i} + v_0\sin\alpha\vec{j}\right) = \left(-m\,g\vec{j}\right)t_A \qquad /\cdot\vec{i},\ \vec{j}$$

$$v_{Ax} - v_0\cos\alpha = 0 \Rightarrow v_{Ax} = v_0\cos\alpha = \left(8,66\,\vec{i}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_0\sin\alpha = -g\,t_A \Rightarrow t_A = \frac{v_0\sin\alpha}{g} = 0,5\,s$$

c) A hajítás idejének és hosszának meghatározása:

$$\vec{I}(B)-\vec{I}(0)=\int_{t_0}^{t_B}\vec{F}\,dt$$

$$m\,\vec{v}_B - m\,\vec{v}_0 = m\,\vec{g}\,t_B$$

$$m\left(v_{Bx}\vec{i}+v_{By}\vec{j}\right)-m\left(v_0\cos\alpha\vec{i}+v_0\sin\alpha\,\vec{j}\right)=\left(-m\,g\vec{j}\right)t_B \qquad /\cdot\vec{i},\,\vec{j}$$

$$v_{Bx}=v_0\cos\alpha=\left(8,66\,\vec{i}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v_{By}=-g\,t_B+v_0\sin\alpha$$

A hajítás idejének meghatározása a mozgásfüggvényből:

$$\vec{r}_B=\vec{r}_0+\vec{v}_0t_B+\vec{g}\,\frac{t_B{}^2}{2}$$

A becsapódási hely függőleges koordinátája ismert: $y_B=0$.

$$y_B=0=y_0+v_0\sin\alpha\,t_B-g\,\frac{t_B{}^2}{2}$$

$$0=10+5t_B-5t_B{}^2$$

$$t_B=\frac{-5\pm\sqrt{25+200}}{-10}=\frac{-5\pm15}{-10}=\left.\begin{matrix}\to t_{B1}=-1\,s\\ \to t_{B2}=2\,s\end{matrix}\right\}t_B=2\,s$$

Így a sebesség a B pontban: $v_{By}=-g\,t_B+v_0\sin\alpha$

$$v_{By}=-10\cdot2+5=-15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\vec{v}_B=\left(8,66\vec{i}-15\vec{j}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Sebesség a B pontban és a hajítás idejének meghatározása (másik módszer):

Munkatétel integrál alakja: $\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\int_0^{\vec{r}_B}\vec{G}d\vec{r}=\int_0^{\vec{r}_B}m\,\vec{g}\,d\vec{r}=m\,\vec{g}\cdot\left(\vec{r}_B-\vec{r}_0\right)$

$$\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_0^2=m\left(-g\vec{j}\right)\cdot\left(\left(x_B-x_0\right)\vec{i}+\left(\underbrace{y_B}_{=0}-y_0\right)\vec{j}\right)=mgy_0$$

$$v_B^2-v_0^2=2gy_0$$

$$v_B=\sqrt{v_0^2+2gy_0}=\sqrt{10^2+2\cdot10\cdot10}=\sqrt{300}\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$$

$$v_{By}=\sqrt{v_B{}^2-v_{Bx}{}^2}=\sqrt{v_B{}^2-\left(v_0\ \cos\alpha\right)^2}=\sqrt{300-\left(10\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{300-75}=15\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$$

$$\vec{v}_B=\left(8,66\vec{i}-15\vec{j}\right){}^{m}\!/\!{}_{s}$$

Visszahelyettesítve a korábban kijött kifejezésbe, a hajítás ideje:

$$v_{By}=-g\,t_B+v_0\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad t_B=\frac{-v_{By}+v_0\sin\alpha}{g}=\frac{-(-15)+10\cdot\sin30^\circ}{10}=\frac{20}{10}=2\,s$$