SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM — **ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK**

3. MECHANIKA-MOZGÁSTAN GYAKORLAT

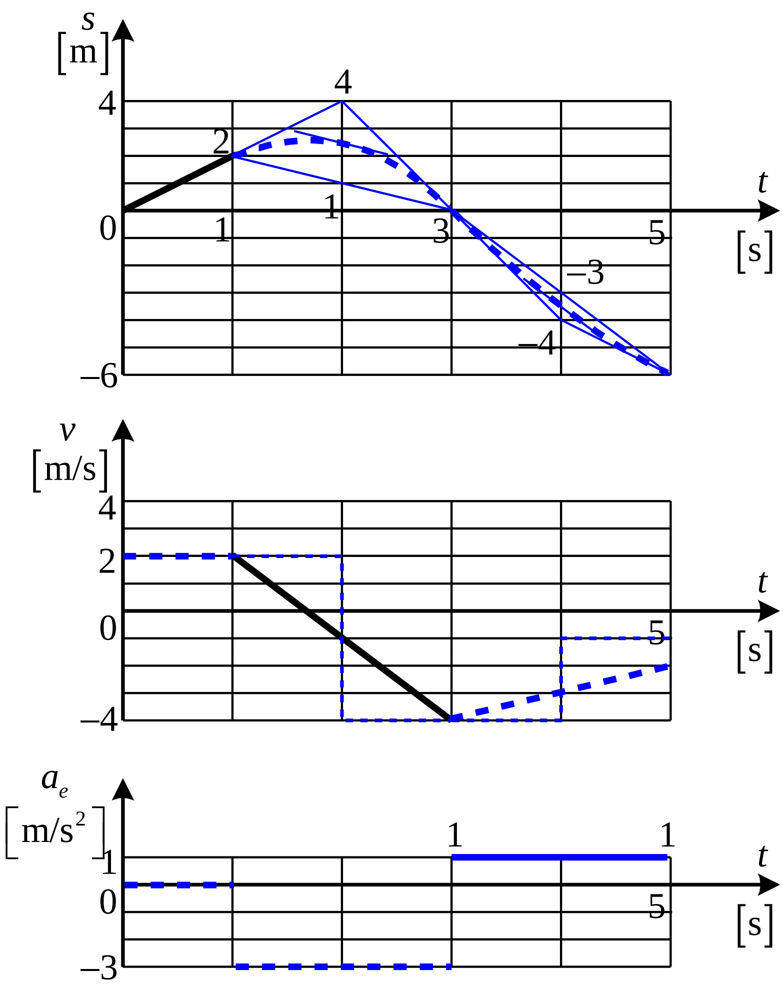
(kidolgozta: Németh Imre óraadó tanár, Bojtár Gergely egyetemi ts., Szüle Veronika, egy. ts.)

Foronómiai görbék, tömegpont ferde hajítása

3/1. feladat: Foronómiai görbék

Adott: a foronómiai görbék folytonos vonallal megadott szakaszai.

Kérdés: a foronómiai görbék hiányzó szakaszainak meghatározása (a megoldás szaggatott vonallal jelölve).



$$s = s_0 + \int_{t_0}^{t} v\,dt$$

$$s_2^{--} = s_1 + \int_{t_1}^{t_2} v\,dt = 2 + 1\cdot 2 = 4m$$

$$s_3 = s_2^{--} + \int_{t_2}^{t_3} v\,dt = 4 + 1\cdot(-4) = 0m$$

$$s_4^{--} = s_3 + \int_{t_3}^{t_4} v\,dt = 0 + 1\cdot(-4) = -4m$$

$$s_5 = s_4^{--} + \int_{t_4}^{t_5} v\,dt = -4 + 1\cdot(-2) = -6m$$

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a_e\,dt \quad \text{vagy} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

$$v_1 = \frac{2}{1} = 2\frac{m}{s}$$

$$v_5 = v_4 + \int_{t_4}^{t_5} a_e\,dt = -4 + 2\cdot 1 = -2\frac{m}{s}$$

$$a_e = \frac{dv}{dt}$$

$$a_{e2} = \frac{-6}{2} = -3\frac{m}{s^2}$$

$a_{e1}(t) = (0)\frac{m}{s^2}$, $t = 0...1s$; $\quad v_1(t) = (2)\frac{m}{s}$, $t = 0...1s$; $\quad s_1(t) = (2t)m$, $t = 0...1s$

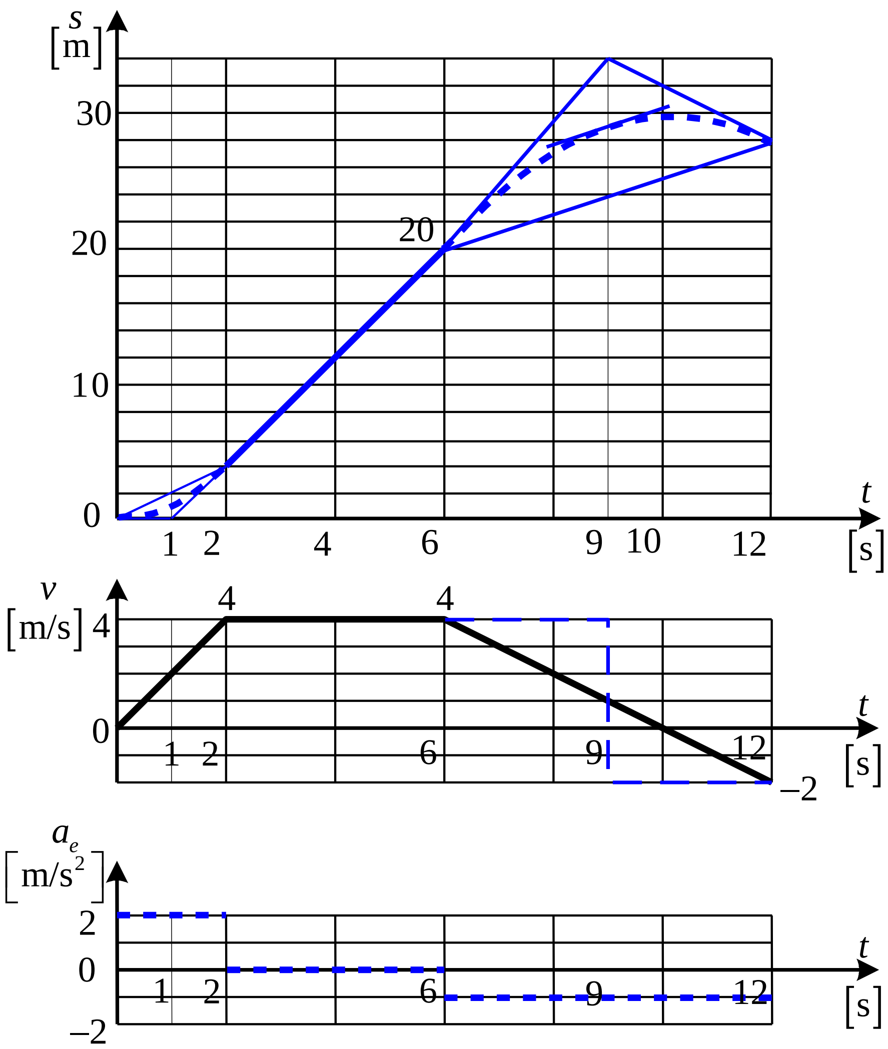
$a_{e2}(t) = (-3)\frac{m}{s^2}$, $t = 1...3s$; $\quad v_2(t) = (-3t+5)\frac{m}{s}$, $t = 1...3s$; $s_2(t) = \left(-3\frac{t^2}{2} + 5t - 1{,}5\right)m$, $t = 1...3s$

$a_{e3}(t) = (1)\frac{m}{s^2}$, $t = 3...5s$; $\quad v_3(t) = (1t-7)\frac{m}{s}$, $t = 3...5s$; $s_3(t) = \left(\frac{t^2}{2} - 7t + 16{,}5\right)m$, $t = 3...5s$

3/2. feladat: Foronómiai görbék

Adott: a $v = v(t)$ pályasebesség-idő függvény.

Kérdés: az $s = s(t)$ és $a_e = a_e(t)$ függvények meghatározása, ha az indítás pillanatában $s(t_0 = 0) = 0$ (a megoldás szaggatott vonallal jelölve).



$$s = s_0 + \int_{t_0}^{t} v \, dt$$

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a_e \, dt$$

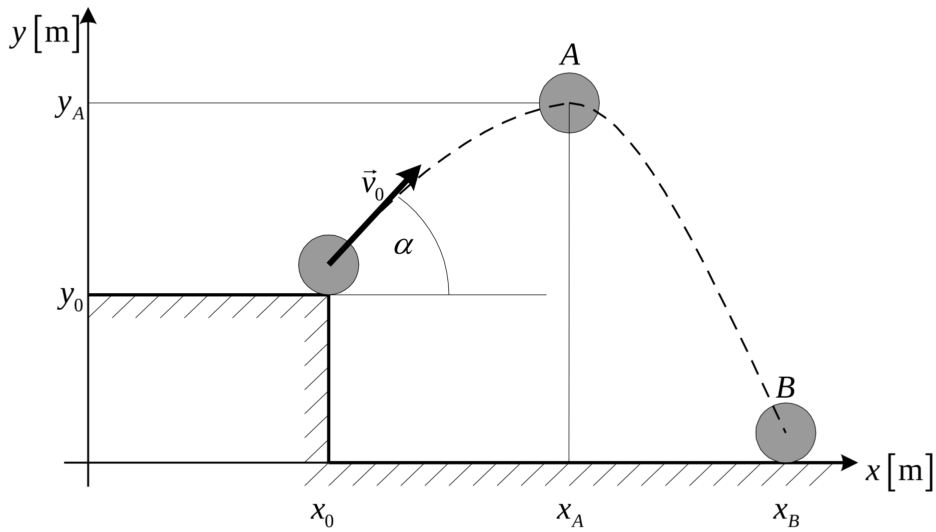
vagy

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$a_e = \frac{dv}{dt}$$

3/3. feladat: ***Tömegpont ferde hajítása***

Adott: a kezdeti helyzet és a kezdősebesség:



$\vec{r}_0 = \left(50\vec{i} + 10\vec{j}\right) m,$

$\alpha = 30^\circ,$

$v_0 = 10\,\dfrac{m}{s},$

$g = 10\,\dfrac{m}{s^2}.$

Kérdés:

a) $\vec{a}_0 = ?, \vec{v}_0 = ?$

b) $\vec{r}_A = ?, \vec{v}_A = ?$

c) $t_B = ?, x_B = ?$

d) $\rho_B = ?,\ \rho_A = ?,\ \rho_0 = ?$

a) Indítási pillanat, kezdeti helyzet: $t_0 = 0$

$$\vec{a}_0 = \vec{a} = \vec{g} = \text{állandó!}$$

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha \vec{i} + v_0 \sin\alpha \vec{j} = 10\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + 10\frac{1}{2}\vec{j} = \left(8,66\vec{i} + 5\vec{j}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} = \left(50\vec{i} + 10\vec{j}\right) m$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

b) A pálya legmagasabb pontja: A pont.

A sebességfüggvény: $\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{g}\cdot t_A$

A mozgásfüggvény: $\vec{r}_A = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t_A + \vec{g}\,\dfrac{t_A^{\,2}}{2}$

A sebesség vízszintes irányú: $\vec{v}_A = v_A\vec{i}$

$$v_A = v_0 \cos\alpha = 5\sqrt{3} = 8,66\frac{m}{s} \Rightarrow \vec{v}_A = \left(8,66\vec{i}\right)\frac{m}{s}$$

A sebesség függőleges irányú komponense zérus:

$$v_{Ay} = 0 = v_0 \sin\alpha - g\, t_A \Rightarrow t_A = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = 0,5\, s$$

Az A pont helyzete: $\vec{r}_A$

$$x_A = x_0 + v_0 \cos\alpha\, t_A = 50 + 8,66\cdot 0,5 = 54,33\, m$$

$$y_A = y_0 + v_0 \sin\alpha\, t_A - g\frac{t_A^2}{2} = 10 + 5\cdot 0,5 - 5\cdot 0,25 = 11,25\, m$$

$$\vec{r}_A = \left(54,33\vec{i} + 11,25\vec{j}\right) m$$

c) A becsapódási hely: B pont.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t_B$$

$$\vec{r}_B = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t_B + \vec{g}\,\frac{t_B{}^2}{2}$$

A becsapódási hely függőleges koordinátája ismert: $y_B = 0$.

$$y_B = 0 = y_0 + v_0 \sin\alpha\; t_B - g\,\frac{t_B{}^2}{2}$$

$$0 = 10 + 5t_B - 5t_B{}^2$$

$$t_B = \frac{-5 \pm \sqrt{25+200}}{-10} = \frac{-5 \pm 15}{-10} = \left.\begin{array}{l} \rightarrow t_{B1} = -1\,s \\ \rightarrow t_{B2} = 2\,s \end{array}\right\} t_B = 2\,s$$

A $t_{B1} = -1\,s$ megoldás fizikailag nem értelmezhető!

$$x_B = x_0 + v_0 \cos\alpha\; t_B = 50 + 8,66 \cdot 2 = 67,32\ \mathrm{m}$$

$$y_B = 0$$

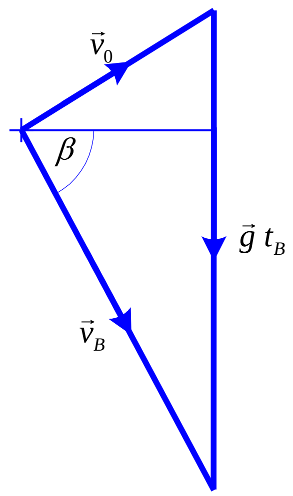
$$\vec{r}_B = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} = \left(67,32\vec{i} + 0\vec{j}\right) m$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t_B = \left(8,88\,\vec{i} + 5\vec{j}\right) + \left(-10\vec{j}\right)2 = \left(8,66\,\vec{i} - 15\vec{j}\right)\frac{m}{s}$$

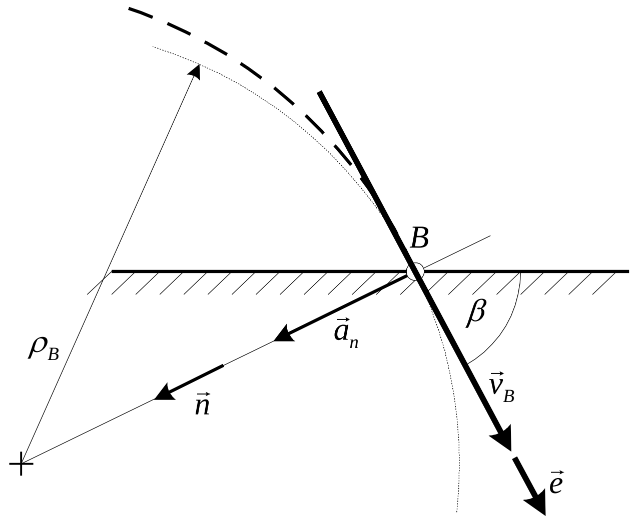
$$v_B = \left|\vec{v}_B\right| = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = \sqrt{8,66^2 + 15^2} = 17,32\,\frac{m}{s}$$

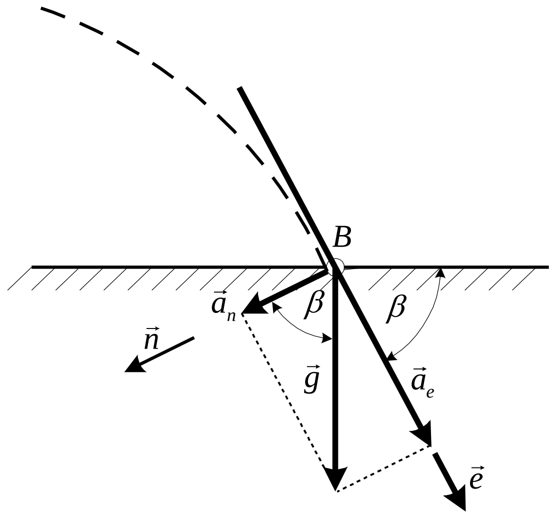
A becsapódás szöge: β

$$\cos\beta = \frac{v_{Bx}}{v_B} = \frac{8,66}{17,32} = 0,5 \Rightarrow \beta = 60^\circ$$



d) A pálya görbületi sugara a becsapódási pontban: ρ_B





$$\vec{g} = \vec{a}_e + \vec{a}_n = a_e\vec{e} + a_n\vec{n}$$

$$a_n = \frac{v_B^2}{\rho_B} \qquad \Rightarrow \qquad a_n = g\cos\beta$$

$$a_n = \frac{v_B^2}{\rho_B} = g\cos\beta \qquad \Rightarrow \qquad \rho_B = \frac{v_B^2}{g\cos\beta} = \frac{17{,}32^2}{10\cdot 0{,}5} \cong 60 \text{ m}$$

A pálya görbületi sugara a kiindulási pontban: ρ_0

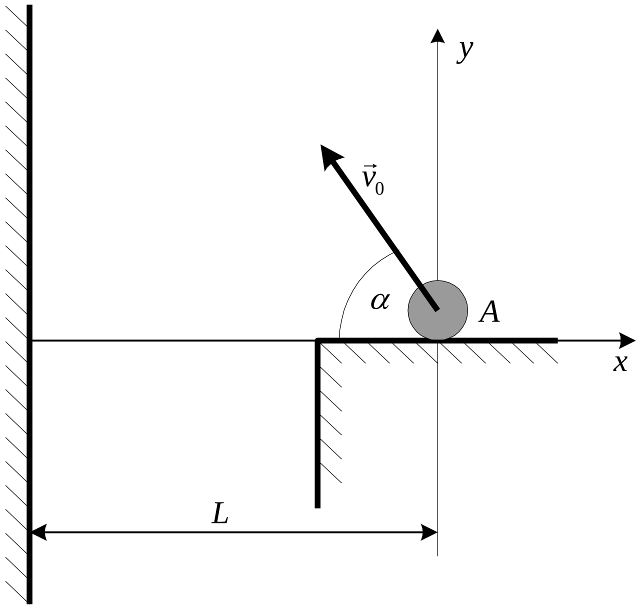
$$a_{n0} = \frac{v_0^2}{\rho_0} \qquad \rho_0 = \frac{v_0^2}{a_{n0}} = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha} = \frac{10^2}{10\cdot\cos 30^\circ} \cong 11{,}55 \text{ m}$$

A pálya görbületi sugara a tetőpontban: ρ_A

$$a_{nA} = \frac{v_A^2}{\rho_A} \qquad \rho_A = \frac{v_A^2}{a_{nA}} = \frac{v_A^2}{g} = \frac{8{,}66^2}{10} \cong 7{,}5 \text{ m}$$

3/4. feladat: ***Tömegpont ferde hajítása***

Adott:



$\alpha = 60^\circ$,

$v_0 = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$,

$L = 5\ \mathrm{m}$,

$g = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$,

$t_0 = 0\ \mathrm{s}$.

Kérdés: a) Határozza meg a tömegpont pályájának legmagasabb B pontjához tartozó $\vec{r}_B$ helyvektort, az $L = 5\,m$ távolságra levő függőleges fal C pontjába történő becsapódás x tengelytől mért H_C távolságát, a becsapódás t_C időpontját, és a pálya ρ_C görbületi sugarát a C pontban!

b) Rajzolja meg a mozgás hodográfját!

a) $\vec{a} = \vec{g}$

$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t$

$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{g}\frac{t^2}{2}$, ahol $\vec{\mathrm{v}}_0 = \left(-\mathrm{v}_0 \cos\alpha\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{v}_0 \sin\alpha\,\vec{\mathrm{j}}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$v_{Bx}\vec{i} + v_{By}\vec{j} = \left(v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}\right) + \left(-g\vec{j}\right)t_B \qquad / \cdot \vec{i}$

$v_{Bx} = v_{0x} = -v_0 \cos\alpha = -5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$v_{0y} = v_0 \sin\alpha = 8{,}66\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$v_{Bx}\vec{i} + v_{By}\vec{j} = \left(v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}\right) + \left(-g\vec{j}\right)t_B \qquad / \cdot \vec{j}$

$v_{By} = 0 = v_{0y} + -gt_B \Rightarrow t_B = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{10\sqrt{3}}{10 \cdot 2} = 0{,}866\ s$

$\vec{r}_B = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t_B + \vec{g}\frac{t_B^{\,2}}{2} = \vec{0} + \left(-v_0 \cos\alpha\,\vec{i} + v_0 \sin\alpha\,\vec{j}\right)t_B + \left(-g\vec{j}\right)\frac{t_B^{\,2}}{2} =$

$\vec{r}_B = \left(-4{,}33\,\vec{i} + 3{,}75\,\vec{j}\right)m$

$\vec{r}_C = \left(-L_C\,\vec{i} + H_C\,\vec{j}\right) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t_C + \vec{g}\frac{t_C^{\,2}}{2}$

$$-L_C\,\vec{i}+H_C\,\vec{j}=0+\left(-v_0\cos\alpha\vec{i}+v_0\sin\alpha\,\vec{j}\right)t_C+\left(-g\vec{j}\right)\frac{t_C^{\,2}}{2}\qquad /\cdot\vec{i}$$

$$-L_C=-v_0\cos\alpha\,t_C\Rightarrow t_C=\frac{L_C}{v_0\cos\alpha}=\frac{5}{10\cdot 0,5}=1\,s$$

$$-L_C\,\vec{i}+H_C\,\vec{j}=0+\left(-v_0\cos\alpha\vec{i}+v_0\sin\alpha\,\vec{j}\right)t_C+\left(-g\vec{j}\right)\frac{t_C^{\,2}}{2}\qquad /\cdot\vec{j}$$

$$H_C=v_0\sin\alpha\,t_C-g\frac{t_C^{\,2}}{2}=10\frac{\sqrt{3}}{2}1-10\frac{1^2}{2}=3,66\,m$$

$$H_C=3,66\,m$$

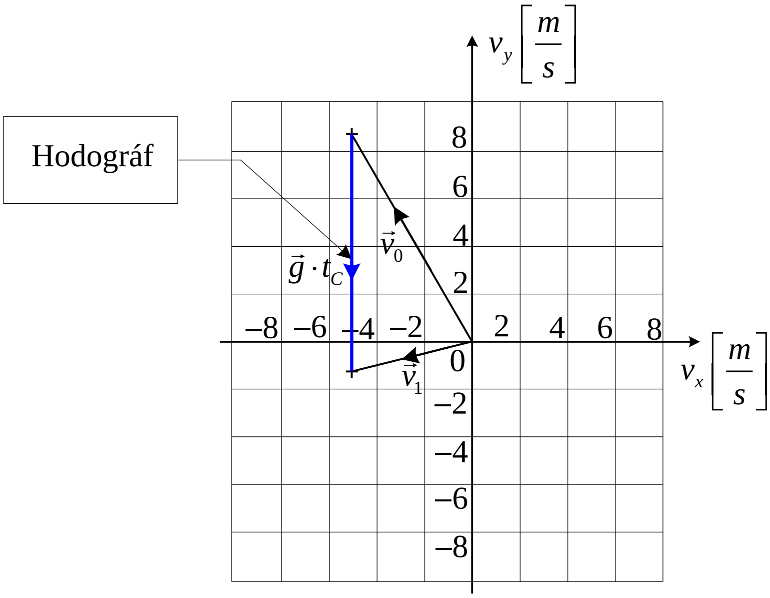
$$\vec{v}_C=\left(-v_0\cos\alpha\,\vec{i}+v_0\sin\alpha\,\vec{j}\right)+\left(-g\vec{j}\right)t_C=\left(10\cdot 0,5\vec{i}+\left(10\frac{\sqrt{3}}{2}-10\cdot 1\right)\vec{j}\right)=$$

$$\vec{v}_C=\left(-5\vec{i}-1,34\vec{j}\right)\frac{m}{s}$$

$$tg\;\beta=\frac{1,34}{5}\Rightarrow\beta=15^\circ$$

$$a_{nC}=\frac{v_C^2}{\rho_C}=g\cos\beta\Rightarrow\rho_C=\frac{v_C^2}{g\cos\beta}=\frac{5^2+1,34^2}{10\cdot 0,966}=2,77\text{ m}$$

b) Hodográf: $\vec{v}=\vec{v}\left(t\right)$ függvény ábrázolása v_x, v_y koordináta rendszerben.



3/5. feladat: Foronómiai görbék

Adott: egy tömegpont egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgásának adatai:ismert a $< t_0, t_1 >$ időintervallumon egy anyagi pont

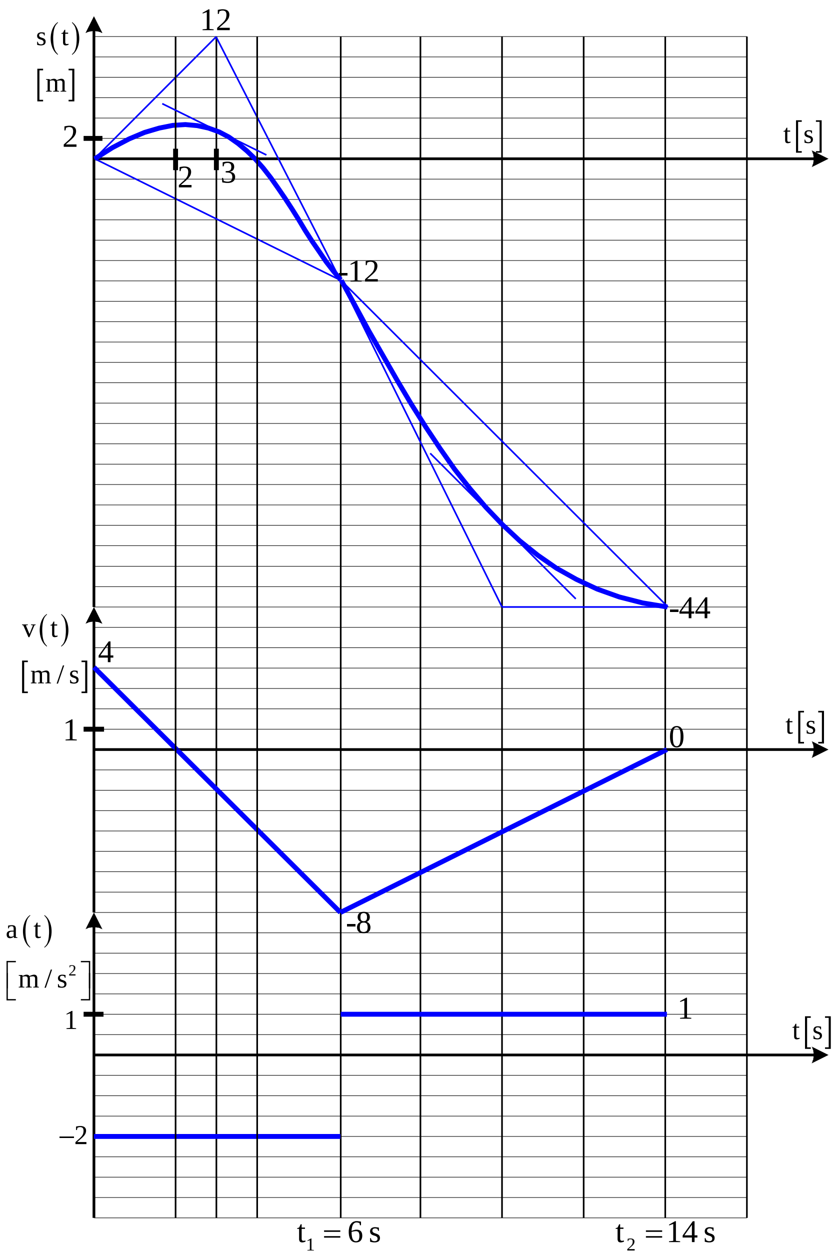
$a_1 = -2\frac{m}{s^2}$, $a_2 = 1\frac{m}{s^2}$ gyorsulása,

$v_0 = 4\frac{m}{s}$, $v_2 = 0$ kezdeti- és végsebessége,

$s_0 = 0$, $t_0 = 0$,

valamint $t_1 = 6\,s$.

Kérdés: Határozza meg az egyes időpontokban az ismeretlen mozgásjellemzőket, majd szerkessze meg a foronómiai görbéket!



$[t_0, t_1]$:

$$a_1 = -2\frac{m}{s^2}$$

$$v_1 = v_0 + a_1 t_1 = 4 + (-2)6 =$$

$$v_1 = -8\frac{m}{s}$$

$$s_1 = s_0 + v_0 t_1 + a_1\frac{t_1^2}{2} =$$

$$s_1 = 0 + 4\cdot 6 + (-2)18 =$$

$$s_1 = -12\,m$$

$[t_0, t_1]$:

$$a_2 = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$v_2 = v_1 + a_2 t_2 =$$

$$0 = -8 + 1\cdot t_2 \Rightarrow t_2 = 8\,s$$

$$s_2 = s_1 + v_1 t_2 + a_2\frac{t_2^2}{2} =$$

$$s_2 = -12 + (-8)\cdot 8 + 1\cdot 32 =$$

$$s_2 = -44\ \mathrm{m}$$