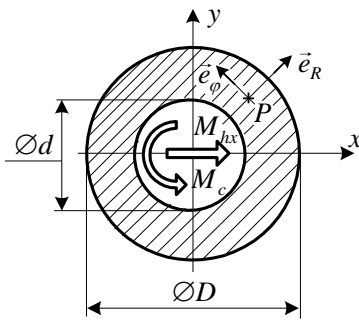


Mechanika című MSc tantárgy: TENGYELYMÉRETEZÉS

1. feladat: Csőtengely méretezése feszültségcsúcsra



Adott: egy körgyűrű keresztmetszetű tartó (csőtengely) veszélyes keresztmetszetének igénybevétele:

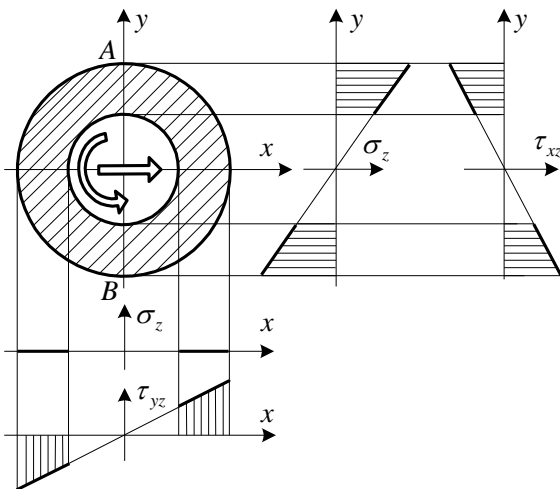
$$\vec{M}_s = (600\vec{e}_x + 800\vec{e}_z) \text{ Nm}, \quad \sigma_{\text{meg}} = 80 \text{ MPa}, \quad D = 2d.$$

Feladat:

- Feszültségeloszlás rajzolása a keresztmetszet x és y tengelye mentén, a veszélyes pont(ok) meghatározása.
- A redukált feszültség meghatározása *Coulomb*, *Mohr* és *Huber-Mises-Hencky* szerint.
- A keresztmetszet méretezése *Mohr*-elmélet szerint.

Kidolgozás:

- Feszültségeloszlás megrajzolása a keresztmetszet x és y tengelye mentén, a veszélyes pont(ok) meghatározása:



Veszélyes pontok:

- hajlításból az A és B pont,
- csavarásból a palást minden pontja,
- hajlításból és csavarásból együttesen az A és B pont.

A keresztmetszet méretezését az A , vagy B pontbeli redukált feszültség figyelembevételével kell elvégezni.

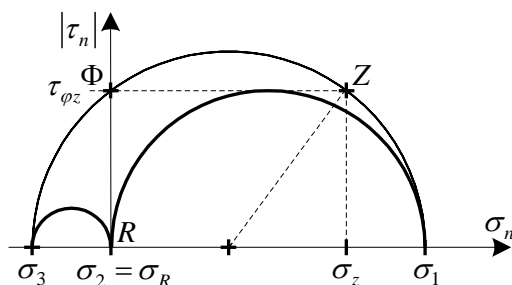
- A redukált feszültség meghatározása *Coulomb*, *Mohr* és *Huber-Mises-Hencky* szerint:

$$\underline{\underline{F}}_{R,\varphi,z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y, \quad \tau_{z\varphi} = \tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_p} \rho, \quad \text{ahol } I_p = 2I_x.$$

$$\sigma_{z\text{max}} = \frac{M_{hx}}{I_x} \frac{D}{2} = \frac{M_{hx}}{K_x}, \quad \tau_{\varphi z\text{max}} = \frac{M_c}{I_p} \frac{D}{2} = \frac{M_c}{K_p}, \quad K_p = 2K_x.$$

A redukált feszültség *Coulomb* szerint:



$$\sigma_{\text{red}}(\text{Coulomb}) = \sigma_1,$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\varphi z}^2},$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\varphi z}^2}.$$

$$\sigma_{1\max} = \frac{M_{hx}}{2K_x} + \sqrt{\left(\frac{M_{hx}}{2K_x}\right)^2 + \left(\frac{M_c}{K_p}\right)^2} = \frac{1}{2K_x} \left(M_{hx} + \sqrt{M_{hx}^2 + M_c^2} \right) = \frac{M_{red}}{K_p}.$$

A redukált feszültség *Mohr* és *Huber-Mises-Hencky* szerint:

$$\sigma_{red} (Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\varphi z}^2} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{\varphi z}^2}.$$

$$\sigma_{red} (HMH) = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_3^2]}$$

Behelyettesítés és átalakítás után: $\sigma_{red} (HMH) = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{\varphi z}^2}$

Összefoglalva: $\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta\tau_{\varphi z}^2}$, *Mohr*: $\beta=4$, *HMH*: $\beta=3$.

$$\sigma_{red\max} = \sigma_{red} (A) = \sigma_{red} (B) = \sqrt{\sigma_{z\max}^2 + \beta\tau_{\varphi z\max}^2},$$

$$\sigma_{red\max} = \sqrt{\left(\frac{M_{hx}}{K_x}\right)^2 + \beta\left(\frac{M_c}{K_p}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4}M_c^2}}{K_x} = \frac{M_{red}}{K_x}.$$

Mohr szerint: $\beta=4$: $M_{red} = \sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4}M_c^2} = \sqrt{\left(6^2 + \frac{4}{4}8^2\right)}10^4 = 1000 \text{ Nm}.$

Huber-Mises-Hencky szerint: $\beta=3$: $M_{red} = \sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4}M_c^2} = \sqrt{\left(6^2 + \frac{3}{4}8^2\right)}10^4 = 916,5 \text{ Nm}.$

c) A keresztmetszet méretezése *Mohr*-elmélet szerint:

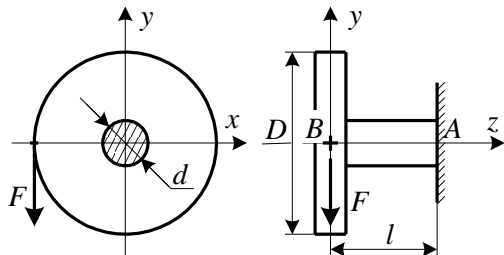
A tartó megfelel, ha $\sigma_{red\max} \leq \sigma_{meg}$, $\Rightarrow \frac{M_{red}}{K_x} \leq \sigma_{meg} \Rightarrow K_x \geq \frac{M_{red}}{\sigma_{meg}}.$

Mivel $D=2d$, ezért $K_x = \frac{(D^4 - d^4)\pi}{64} \frac{2}{D} = \frac{(16-1)d^4\pi}{64d} = \frac{15}{64}d^3\pi.$

A méretezési egyenlőtlenségből: $d \geq \sqrt[3]{\frac{64}{15\pi} \frac{M_{red}}{\sigma_{meg}}} = \sqrt[3]{\frac{64}{15\pi} \frac{10^6}{80}} = 25,7 \text{ mm},$

Szabványos külső átmérőt választva (MSz 4337-64): $D=60 \text{ mm}$ és $d=30 \text{ mm}.$

2. feladat: Tengely méretezése, ellenőrzése feszültségcsúcsra



Adott:

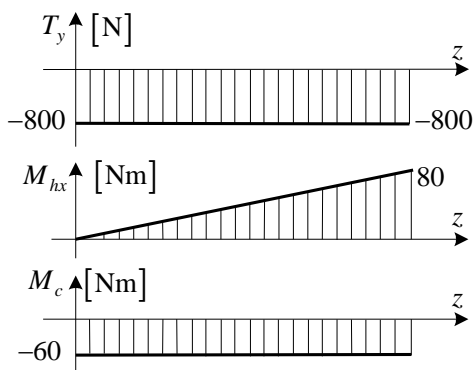
$$F=800 \text{ N}, l=100 \text{ mm}, D=150 \text{ mm}, \sigma_{meg}=125 \text{ MPa}.$$

Feladat:

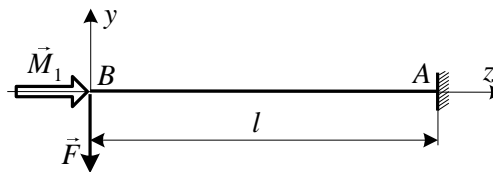
A tengely méretezése feszültségcsúcsra.

Kidolgozás:

Az igénybevételi ábrák megrajzolása:



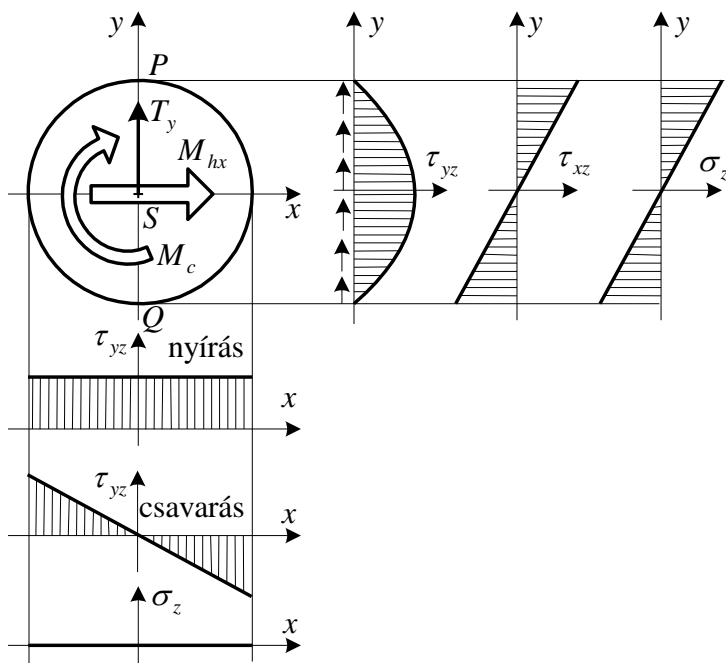
A terhelés redukciója a tengely középvonalába.



Csavaró nyomaték: $M_1 = F \frac{D}{2} = 800 \cdot 0,075 = 60 \text{ Nm}$.

Veszélyes keresztmetszet: A.

Feszültségeloszlás az A keresztmetszetben:



$$\tau_{yz} = -\frac{T_y S_x(y)}{I_x a(y)},$$

$$\tau_{yz \max} = \frac{4T_y}{3A},$$

$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y, \quad \sigma_{z \max} = \frac{M_{hx}}{K_x},$$

$$\tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_p} \rho, \quad \tau_{\varphi z \max} = \frac{M_c}{K_p},$$

$$I_p = 2I_x, \quad K_p = 2K_x.$$

A veszélyes keresztmetszet veszélyes pontjai a P és Q pontok.

Méretezés a P és Q pontokban Mohr szerint:

A redukált feszültség: $\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{xz}^2}$, Mohr: $\beta = 4$.

$$\sigma_{\text{red max}} = \sigma_{\text{red}}(P) = \sigma_{\text{red}}(Q) = \sqrt{\sigma_{z \max}^2 + \beta \tau_{xz \max}^2},$$

$$\sigma_{\text{red max}} = \sqrt{\left(\frac{M_{hx}}{K_x}\right)^2 + \beta \left(\frac{M_c}{K_p}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2}}{K_x} = \frac{M_{\text{red}}}{K_x}.$$

$$\text{Mohr szerint } \beta = 4: \quad M_{\text{red}} = \sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2} = \sqrt{80^2 + 60^2} = 100 \text{ Nm}.$$

$$\text{A tartó megfelel, ha } \sigma_{\text{red max}} \leq \sigma_{\text{meg}} \Rightarrow \frac{M_{\text{red}}}{K_x} \leq \sigma_{\text{meg}},$$

$$K_x \geq \frac{M_{\text{red}}}{\sigma_{\text{meg}}} = \frac{100 \cdot 10^3}{125} = 800 \text{ mm}^3.$$

$$\text{Mivel } K_x \geq \frac{d^3 \pi}{32} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{32 K_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 800}{3,14}} = \sqrt[3]{8150} = 20,124 \text{ mm}.$$

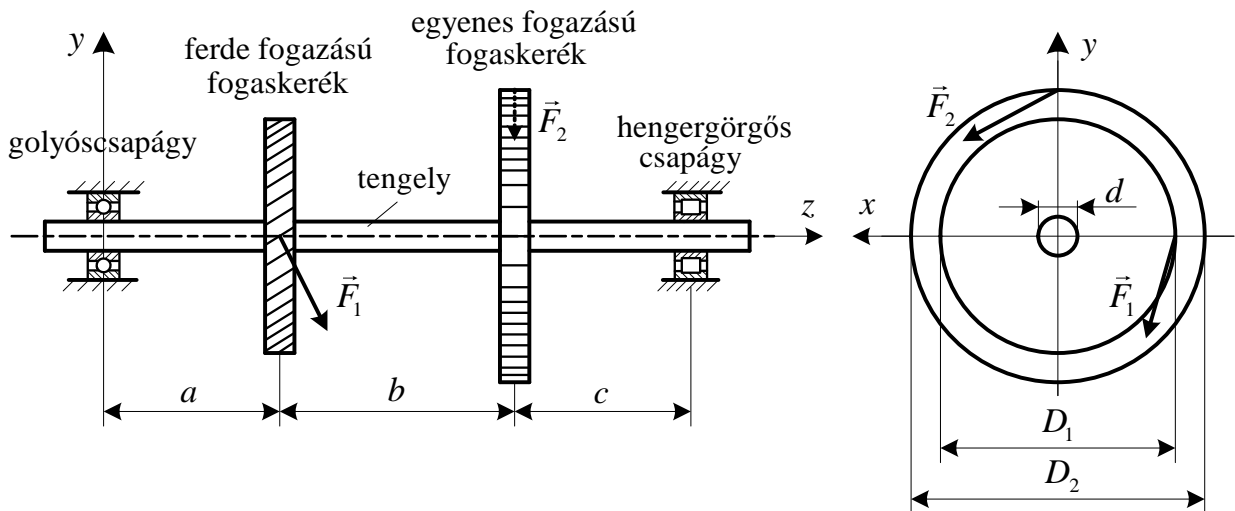
Ellenőrzés az S pontban *Mohr* szerint:

$$\sigma_{\text{red max}}(S) = \frac{4 T_y}{3 A} \sqrt{4} \leq \sigma_{\text{meg}}, \quad A = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{20,124^2 \pi}{4} = 318 \text{ mm}^2.$$

$$\sigma_{\text{red max}}(S) = \frac{4 T_y}{3 A} \sqrt{4} = \frac{4 \cdot 800}{3 \cdot 318} \cdot 2 = 6,71 \text{ MPa} \leq \sigma_{\text{meg}} = 125 \text{ MPa}.$$

A tengely szilárdságtani szempontból megfelel!

3. feladat: Hajtóműtengely méretezése, ellenőrzése feszültségcsúcsra



Adatok:

A tengely hosszmeretei és anyagának megengedett feszültsége:

$$a = 100 \text{ mm}, \quad b = 160 \text{ mm}, \quad c = 80 \text{ mm}, \quad \sigma_{\text{meg}} = 230 \text{ MPa}$$

A fogaskerek görbülőkör átmérői: $D_1 = 120 \text{ mm}$, $D_2 = 160 \text{ mm}$.

A fogaskerekre ható erők: $\vec{F}_1 = (10\vec{e}_x - 40\vec{e}_y + 8\vec{e}_z) \text{ kN}$, $\vec{F}_2 = (30\vec{e}_x - 6\vec{e}_y) \text{ kN}$.

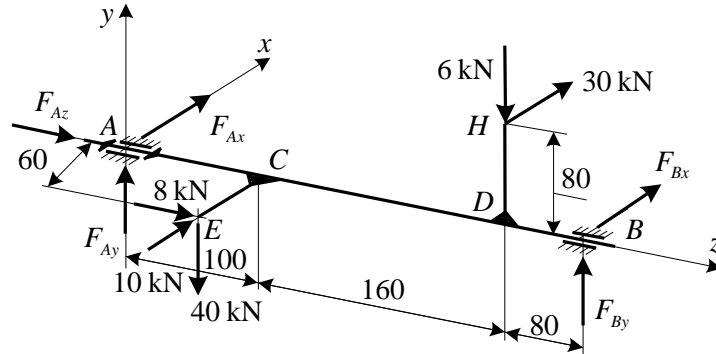
Feladat: A tengely méretezése, ellenőrzése feszültségcsúcsra.

Kidolgozás:

- A megoldás gondolatmenete:
- a mechanikai modell megrajzolása,
 - a támasztóerők meghatározása,
 - a terhelések redukálása a tengely középvonalába,
 - a középvonalba redukált erőrendszer felbontása xz és yz síkbeli részre,
 - az $N(z)$ és $M_c(z)$ megrajzolása (ezek függetlenek a felbontástól),
 - az yz síkbeli terheléshez tartozó igénybevételi ábrák: $T_y(z)$, $M_{hx}(z)$,
 - az xz síkbeli terheléshez tartozó igénybevételi ábrák: $T_x(z)$, $M_{hy}(z)$,
 - a tengely veszélyes keresztmetszeteinek meghatározása,
 - a veszélyes keresztmetszetek jellemző feszültségeloszlásainak megrajzolása,
 - a szilárdságtani méretezés, ellenőrzés elvégzése a *Mohr* elmélet szerint, a tengely d átmérőjének meghatározása.

Megoldás:

- a) Mechanikai modellezés: - tengely – egyenes rúd,
 - fogaskerék – merev tárcsa, vagy rúdelágazás,
 - golyóscsapágy – csuklós megtámasztás,
 - hengergörgős csapágy – görgős megtámasztás,
 - csapágyerők – támasztóerők.



b) A támasztóerők meghatározása:

Az A pontra felírt nyomatéki egyenlet: $\vec{M}_A = \vec{r}_{A1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{A2} \times \vec{F}_2 + \vec{r}_{AB} \times \vec{F}_B = \vec{0}$ / $\cdot \vec{e}_x / \cdot \vec{e}_y$

$\vec{r}_{A1} = (-0,06\vec{e}_x + 0,1\vec{e}_z)$ m, $\vec{r}_{A2} = (0,08\vec{e}_y + 0,26\vec{e}_z)$ m, $\vec{r}_{AB} = (0,34\vec{e}_z)$ m.

$$\vec{r}_{A1} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -0,06 & 0 & 0,1 \\ 10 & -40 & 8 \end{vmatrix} = \vec{e}_x (0,1 \cdot 40) - \vec{e}_y (-0,48 - 1) + \vec{e}_z (0,06 \cdot 40) = (4\vec{e}_x + 1,48\vec{e}_y + 2,4\vec{e}_z),$$

$$\vec{r}_{A2} \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0,08 & 0,26 \\ 30 & -6 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_x (6 \cdot 0,26) - \vec{e}_y (-30 \cdot 0,26) + \vec{e}_z (-0,08 \cdot 30) = (1,56\vec{e}_x + 7,8\vec{e}_y - 2,4\vec{e}_z),$$

$$\vec{r}_{AB} \times \vec{F}_B = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 0,34 \\ F_{Bx} & F_{By} & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_x (-0,34F_{By}) - \vec{e}_y (-0,34F_{Bx}) = (-0,34F_{By}\vec{e}_x + 0,34F_{Bx}\vec{e}_y).$$

Skaláris egyenletek: $4 + 1,56 - 0,34F_{By} = 0 \Rightarrow F_{By} = 16,35$ kN,

$1,48 + 7,8 + 0,34F_{Bx} = 0 \Rightarrow F_{Bx} = -27,29$ kN.

A B pontra felírt nyomatéki egyenlet: $\vec{M}_B = \vec{r}_{B1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{B2} \times \vec{F}_2 + \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_A = \vec{0}$ / $\cdot \vec{e}_x / \cdot \vec{e}_y$

$\vec{r}_{B1} = (-0,06\vec{e}_x - 0,24\vec{e}_z)$ m, $\vec{r}_{B2} = (0,08\vec{e}_y - 0,08\vec{e}_z)$ m, $\vec{r}_{BA} = (-0,34\vec{e}_z)$ m

$$\vec{r}_{B1} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -0,06 & 0 & -0,24 \\ 10 & -40 & 8 \end{vmatrix} = \vec{e}_x (-0,24 \cdot 40) - \vec{e}_y (-0,48 + 2,4) + \vec{e}_z (0,06 \cdot 40) = (-9,6\vec{e}_x - 1,92\vec{e}_y + 2,4\vec{e}_z),$$

$$\vec{r}_{B2} \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0,08 & -0,08 \\ 30 & -6 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_x (-6 \cdot 0,08) - \vec{e}_y (30 \cdot 0,08) + \vec{e}_z (-0,08 \cdot 30) = (-0,48\vec{e}_x - 2,4\vec{e}_y - 2,4\vec{e}_z),$$

$$\vec{r}_{BA} \times \vec{F}_A = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & -0,34 \\ F_{Ax} & F_{Ay} & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_x (0,34F_{Ay}) - \vec{e}_y (0,34F_{Ax}) = (0,34F_{Ay}\vec{e}_x - 0,34F_{Ax}\vec{e}_y).$$

Skaláris egyenletek: $-9,6 - 0,48 - 0,34F_{Ay} = 0 \Rightarrow F_{Ay} = 29,65 \text{ kN},$
 $-1,92 - 2,4 - 0,34F_{Ax} = 0 \Rightarrow F_{Ax} = -12,71 \text{ kN}.$

A z tengely irányú vetületi egyenlet: $F_z = 0 = F_{Az} + 8 \Rightarrow F_{Az} = -8 \text{ kN}.$

Ellenőrzés: $F_x = 0 = -12,71 + 10 + 30 - 27,29,$
 $F_y = 0 = 29,65 - 40 - 6 + 16,35.$

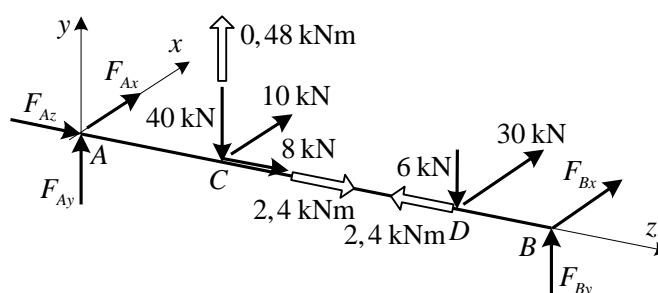
c) A terhelések redukálása a tengelyközépvonalába:

- Az \vec{F}_1 redukciója: $\vec{F}_1 = (10\vec{e}_x - 40\vec{e}_y + 8\vec{e}_z) \text{ kN},$

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_{CE} \times \vec{F}_1 = (-0,06\vec{e}_x) \times (10\vec{e}_x - 40\vec{e}_y + 8\vec{e}_z) = (0,48\vec{e}_y + 2,4\vec{e}_z) \text{ kNm}.$$

- Az \vec{F}_2 redukciója: $\vec{F}_2 = (30\vec{e}_x - 6\vec{e}_y) \text{ kN},$

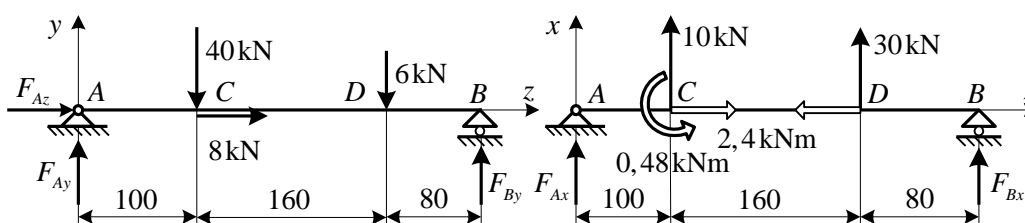
$$\vec{M}_2 = \vec{r}_{DH} \times \vec{F}_2 = (0,08\vec{e}_y) \times (30\vec{e}_x - 6\vec{e}_y) = (-2,4\vec{e}_z) \text{ kNm}.$$



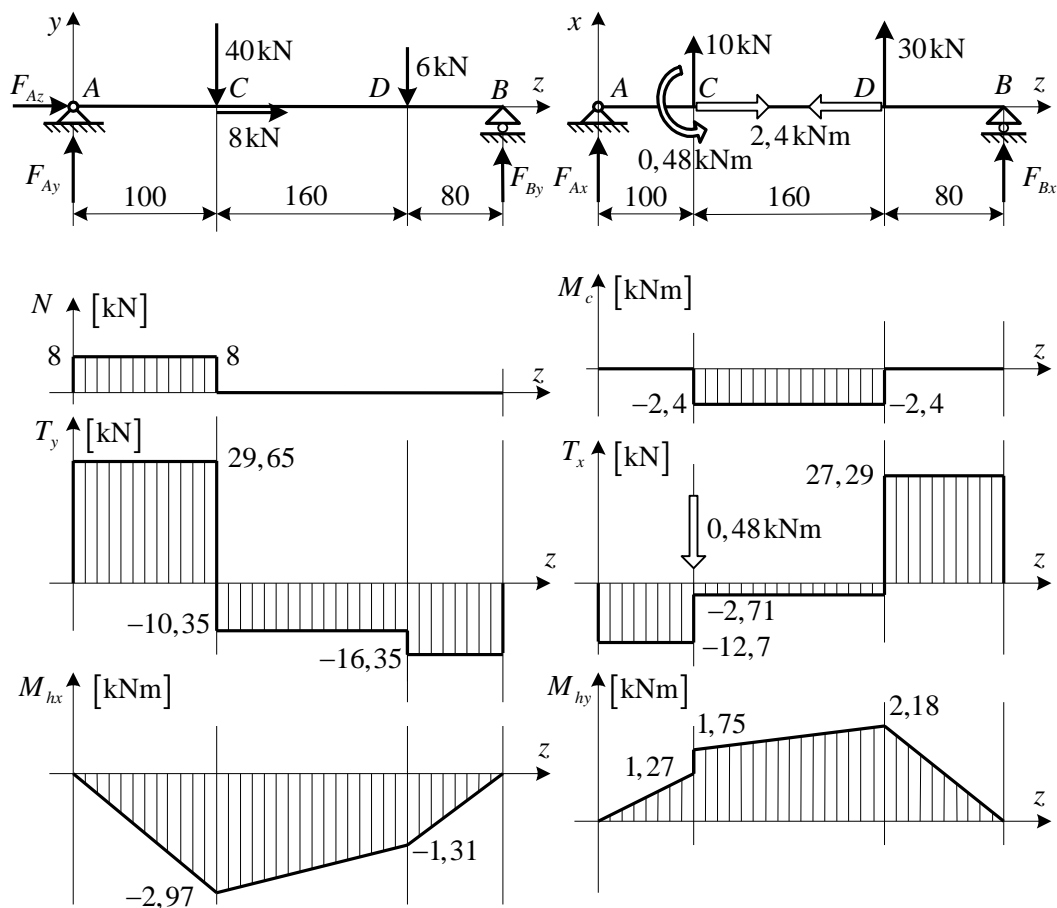
A redukált nyomatékok koordinátái:

$$\begin{aligned} M_{1x} &= 0, & M_{2x} &= 0, \\ M_{1y} &= 0,06 \cdot 8 = 0,48 \text{ kNm}, & M_{2y} &= 0, \\ M_{1z} &= 0,06 \cdot 40 = 2,4 \text{ kNm}, & M_{2z} &= 0,08 \cdot 30 = 2,4 \text{ kNm}. \end{aligned}$$

d) A középvonalba redukált erőrendszer felbontása xz és yz síkbeli részre:



e) - g) Az igénybevételi ábrák megrajzolása:



h) A tengely veszélyes keresztmetszeteinek meghatározása:

Az igénybevételi ábrák alapján veszélyes keresztmetszetek: C^- , C^+ , D^- , D^+

A C^- keresztmetszet igénybevételei:

$$N(C^-) = 8 \text{ kN}, \quad M_c(C^-) = 0,$$

$$T(C^-) = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} \Big|_{C^-} = \sqrt{12,7^2 + 29,65^2} = \sqrt{1040,4} = 32,26 \text{ kN}$$

$$M_h(C^-) = \sqrt{M_{hx}^2 + M_{hy}^2} \Big|_{C^-} = \sqrt{2,97^2 + 1,27^2} = 3,23 \text{ kNm}.$$

A C^+ keresztmetszet igénybevételei

$$N(C^+) = 0, \quad M_c(C^+) = -2,4 \text{ kNm},$$

$$T(C^+) = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} \Big|_{C^+} = \sqrt{2,71^2 + 10,35^2} = \sqrt{114,46} = 10,7 \text{ kN},$$

$$M_h(C^+) = \sqrt{M_{hx}^2 + M_{hy}^2} \Big|_{C^+} = \sqrt{2,97^2 + 1,75^2} = 3,45 \text{ kNm}.$$

A D^- keresztmetszet igénybevételei:

$$N(D^-) = 0, \quad M_c(D^-) = -2,4 \text{ kNm},$$

$$T(D^-) = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} \Big|_{D^-} = \sqrt{10,35^2 + 2,71^2} = \sqrt{111,87} = 10,6 \text{ kN},$$

$$M_h(D^-) = \sqrt{M_{hx}^2 + M_{hy}^2} \Big|_{D^-} = \sqrt{1,31^2 + 2,18^2} = 2,54 \text{ kNm}.$$

A D^+ keresztmetszet igénybevételei:

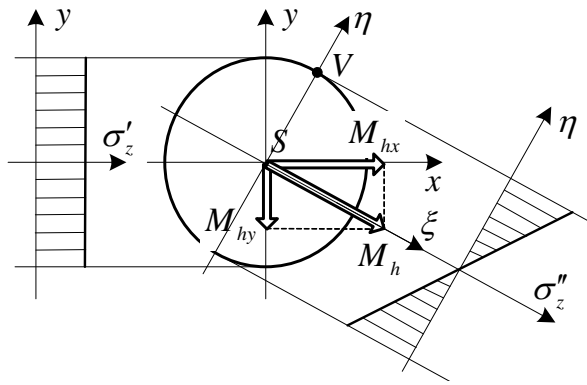
$$N(D^+) = 0, \quad M_c(D^+) = 0,$$

$$T(D^+) = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} \Big|_{D^+} = \sqrt{16,35^2 + 27,29^2} = 31,81 \text{ kN},$$

$$M_h(D^+) = \sqrt{M_{hx}^2 + M_{hy}^2} \Big|_{D^+} = \sqrt{1,31^2 + 2,18^2} = 2,54 \text{ kNm}$$

i) A veszélyes keresztmetszetek jellemző feszültségeloszlásainak megrajzolása:

- A feszültségeloszlás jellege, ha $N > 0$, $M_{hx} > 0$, $M_{hy} > 0$:

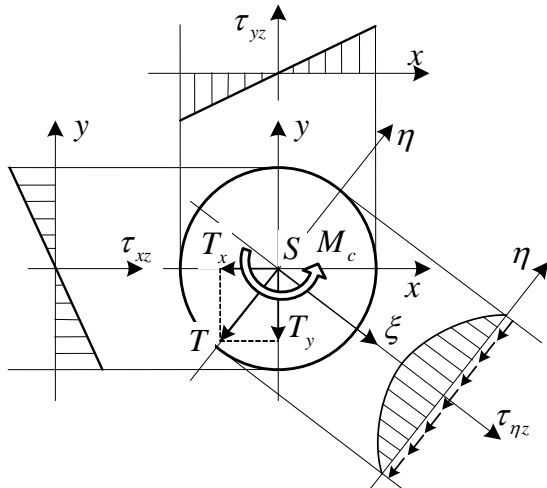


$$\sigma'_z = \frac{N}{A} = \text{állandó}, \quad A = \frac{d^2 \pi}{4},$$

$$\sigma''_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x = \frac{M_h}{I_\xi} \eta, \quad I_x = I_y = I_\xi = \frac{d^4 \pi}{64},$$

$$\sigma''_{z \max} = \sigma''_z(V) = \frac{M_h}{I_\xi} \frac{d}{2} = \frac{M_h}{K_\xi}, \quad K_x = K_y = K_\xi = \frac{d^3 \pi}{32}$$

- A feszültségeloszlás jellege, ha $M_c > 0$, $T_x > 0$, $T_y > 0$:



$$\tau_{xz} = -\frac{M_c}{I_p} y, \quad \tau_{yz} = \frac{M_c}{I_p} x, \quad \tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_p} R,$$

$$\tau_{\varphi z \max} = \frac{M_c}{I_p} \frac{d}{2} = \frac{M_c}{K_p}, \quad I_p = \frac{d^4 \pi}{32}, \quad K_p = \frac{d^3 \pi}{16}$$

$$\tau_{\eta z \max} = \tau_{\eta z}(S) = \frac{4T}{3A}, \quad A = \frac{d^2 \pi}{4}$$

j) A szilárdságtani méretezés, ellenőrzés elvégzése a Mohr elmélet szerint, a tengely d átmérőjének meghatározása:

Gondolatmenet:

- A tengelyt minden veszélyes keresztmetszetben hajlításra és csavarásra méretezzük.
- A kapott legnagyobb átmérőt kismértékben megnöveljük és ezzel a tengelyt minden veszélyes keresztmetszetben hajlításra, csavarásra, húzás-nyomásra és nyírásra ellenőrizzük.

Méretezés hajlításra és csavarásra:

$$\sigma_{red \max} (Mohr) = \sqrt{(\sigma''_{z \max})^2 + \beta(\tau_{\varphi z})^2} = \sqrt{\left(\frac{M_h}{K_x}\right)^2 + 4\left(\frac{M_c}{K_p}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_h^2 + M_c^2}}{K_x} = \frac{M_{red}}{K_x}, \quad K_x = \frac{d^3 \pi}{32},$$

$$\sigma_{red \max} (Mohr) \leq \sigma_{meg} \Rightarrow \frac{M_{red}}{K_x} = \frac{32M_{red}}{d^3 \pi} \leq \sigma_{meg} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{red}}{\sigma_{meg} \pi}}.$$

$$C^- \text{ keresztmetszet: } M_{red}(C^-) = \sqrt{M_h^2 + M_c^2} = M_h(C^-) = 3,23 \cdot 10^6 \text{ Nmm},$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{red}}{\sigma_{meg} \pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3,23 \cdot 10^6}{230 \cdot 3,14}} = 52,3 \text{ mm}.$$

$$C^+ \text{ keresztmetszet: } M_{red}(C^+) = \sqrt{M_h^2 + M_c^2} = \sqrt{(3,45^2 + 2,4^2)} \cdot 10^6 = 4,2 \cdot 10^6 \text{ Nmm},$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{red}}{\sigma_{meg} \pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 4,2 \cdot 10^6}{230 \cdot 3,14}} = 57,1 \text{ mm}$$

$$D^- \text{ keresztmetszet: } M_{red}(D^-) = \sqrt{M_h^2 + M_c^2} = \sqrt{(2,54^2 + 2,4^2)} \cdot 10^6 = 3,5 \cdot 10^6 \text{ Nmm},$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{red}}{\sigma_{meg}\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3,5 \cdot 10^6}{230 \cdot 3,14}} = 53,7 \text{ mm}$$

D^+ keresztmetszet: $M_{red}(D^+) = \sqrt{M_h^2 + M_c^2} = M_h(D^+) = 2,54 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$,

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{red}}{\sigma_{meg}\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2,54 \cdot 10^6}{230 \cdot 3,14}} = 48,3 \text{ mm}.$$

Az ellenőrzést $d = 60 \text{ mm}$ -es átmérővel végezzük el a C^- keresztmetszetben!

Azért itt, mert itt lép fel rúderő és itt a legnagyobb a nyírőerő!

A keresztmetszet jellemzői: $A = \frac{d^2\pi}{4} = \frac{60^2 \cdot 3,14}{4} = 2826 \text{ mm}^2$, $K_x = \frac{d^3\pi}{32} = \frac{60^3 \cdot 3,14}{32} = 21330 \text{ mm}^3$,
 $K_p = 2K_x = 42660 \text{ mm}^3$,

Ellenőrzés a V pontban:

$$\sigma_{z\max} = \sigma'_z + \sigma''_{z\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_h}{K_x} = \frac{8 \cdot 10^3}{2826} + \frac{3,23 \cdot 10^6}{21330} = 2,83 + 151,43 = 154,26 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{red\max}(\text{Mohr}) = \sigma_{z\max} \leq \sigma_{meg}, \quad 154,26 \text{ MPa} \leq 230 \text{ MPa}.$$

Ellenőrzés az S pontban:

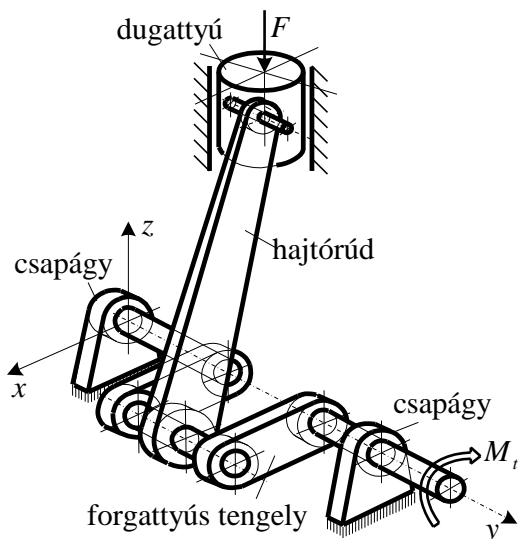
$$\tau_{\eta z\max} = \tau_{\eta z}(S) = \frac{4T}{3A} = \frac{4 \cdot 32,26 \cdot 10^3}{3 \cdot 2826} = 15,22 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{red\max}(\text{Mohr}) = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta\tau_{\eta z\max}^2} = \sqrt{2,83^2 + 4 \cdot 15,22^2} = \sqrt{8,01 + 926,59} = 30,57 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_{red\max}(\text{Mohr}) \leq \sigma_{meg}, \quad 30,57 \text{ MPa} < 230 \text{ MPa}$$

A $d = 60 \text{ mm}$ -es átmérővel a hajtóműtengely szilárdságtani szempontból megfelel.

4. feladat: Dugattyús motor (kompresszor) forgattyús tengelyének méretezése, ellenőrzése feszültségcsúcsra



Adott:

- a szerkezet geometriája és meghatározó, nem keresztmetszeti méretei,
- a dugattyúra ható felületi terhelés F eredője,
- feltételezzük, hogy a szerkezet az adott helyzetben egyensúlyban van,
- a forgattyús tengely csapágyazott részei azonos átmérőjű kör, a forgattyúkarok pedig azonos téglalap keresztmetszetűek,
- a forgattyúkar téglalap keresztmetszeténél: $b = 2a$, és konstrukciós megfontolásból: $b \geq 2d$.
- az anyag megengedett feszültsége:
 $\sigma_{meg} = 160 \text{ MPa}$.

Feladat:

a) A szerkezet mechanikai modelljének megrajzolása.

b) A forgattyús tengely terhelésének meghatározása.

c) Az M_t terhelő nyomaték és a csapágyerők (támasztó erők) meghatározása.

d) A forgattyús tengely igénybevételi ábráinak megrajzolása.

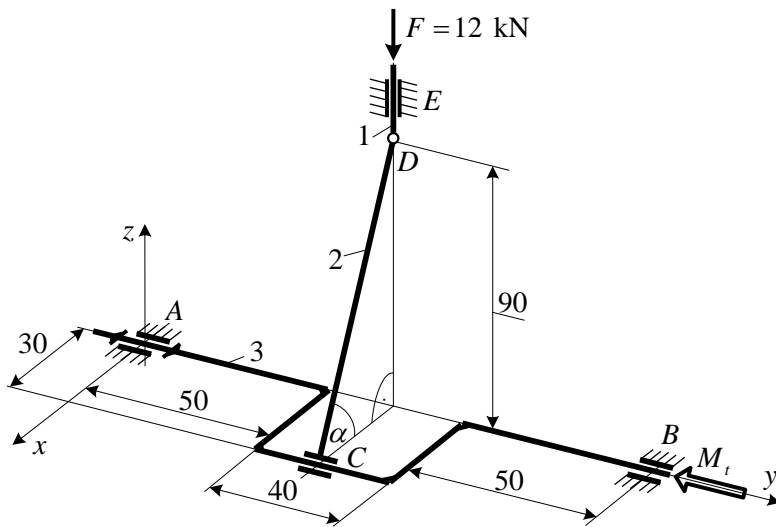
e) A forgattyús tengely veszélye keresztmetszeteinek meghatározása.

f) A veszélyes keresztmetszetek jellemző feszültségeloszlásainak megrajzolása:

g) A forgattyús tengely feszültségcsúcsra történő méretezésének elvégzése a *Huber-Mises-Hencky* elmélet szerint.

Kidolgozás:

a) Mechanikai modellezés - vonalas vázlat:



A szerkezet valamennyi elemét rúdnak tekintjük – így a szerkezet vonalas vázlatát kapjuk meg.

Szerkezeti elemek:

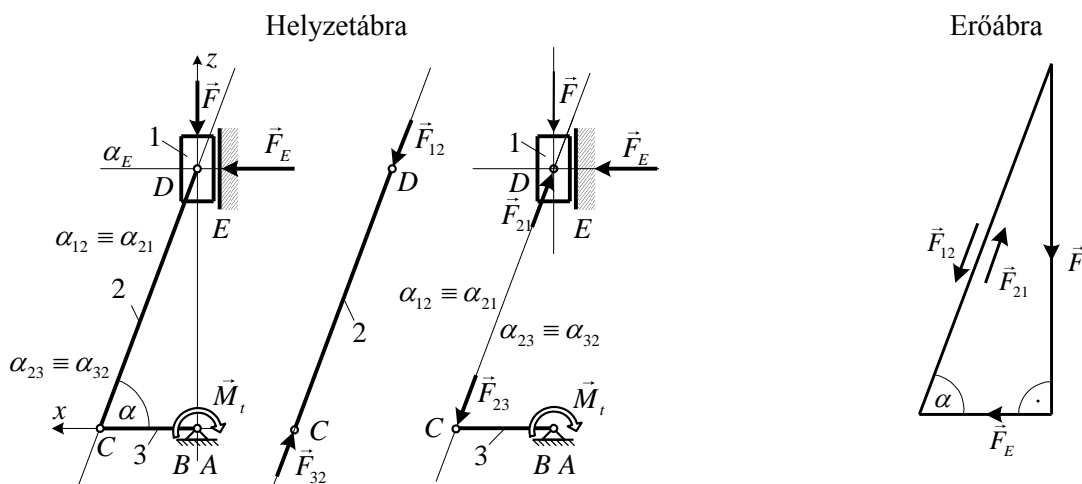
- 1 – dugattyú,
- 2 – hajtórúd,
- 3 – forgattyús tengely.

A 3 jelű forgattyús tengely mechanikai szempontból egy törtvonalú, térbeli terhelésű, kéttámaszú tartó.

b) A forgattyús tengely terhelésének meghatározása:

Az egész szerkezet és az egyes szerkezeti elemek is egyensúlyban vannak.

Külön-külön megvizsgáljuk az egyes szerkezeti elemek egyensúlyát.

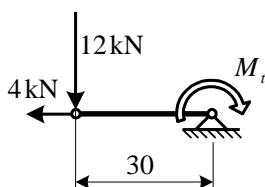


$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{90}{30} = 3 = \frac{F}{F_E} \Rightarrow F_E = \frac{12}{3} = 4 \text{ kN}, \quad \vec{F}_E = (4\vec{e}_x) \text{ kN}, \quad \vec{F}_{21} = (-4\vec{e}_x + 12\vec{e}_z) \text{ kN}.$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad \vec{F}_{32} = -\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21}, \quad \vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32} = -\vec{F}_{21}$$

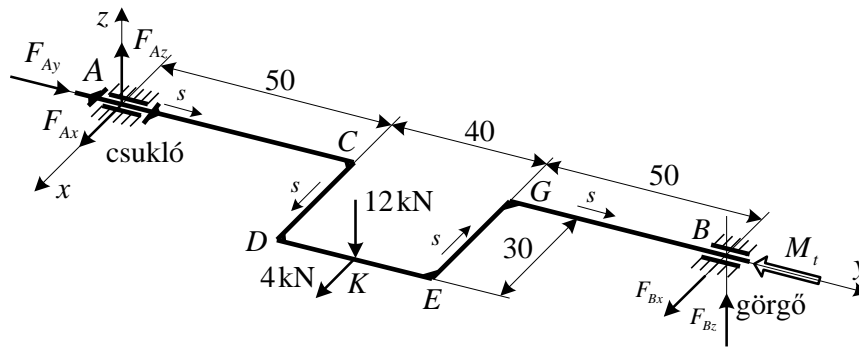
A forgattyús tengelyre ható erő: $\vec{F}_{23} = (4\vec{e}_x - 12\vec{e}_z) \text{ kN}$.

c) Az M_t terhelő nyomaték és a támasztóerők meghatározása:



$$M_t = 0,03 \cdot 12 \cdot 10^3 = 360 \text{ Nm} = 0,36 \text{ kNm}.$$

A támasztóerők meghatározása:



$$M_{Ax} = 0 = -0,07 \cdot 12 + 0,14 \cdot F_{Bz}, \Rightarrow F_{Bz} = 6 \text{ kN},$$

$$M_{Bx} = 0 = 0,07 \cdot 12 - 0,14 \cdot F_{Az}, \Rightarrow F_{Az} = 6 \text{ kN},$$

$$F_y = 0 = F_{Ay},$$

$$M_{Az} = 0 = -0,07 \cdot 4 - 0,14 \cdot F_{Bx}, \Rightarrow F_{Bx} = -2 \text{ kN},$$

$$M_{Bz} = 0 = 0,07 \cdot 4 + 0,14 \cdot F_{Ax}, \Rightarrow F_{Ax} = -2 \text{ kN},$$

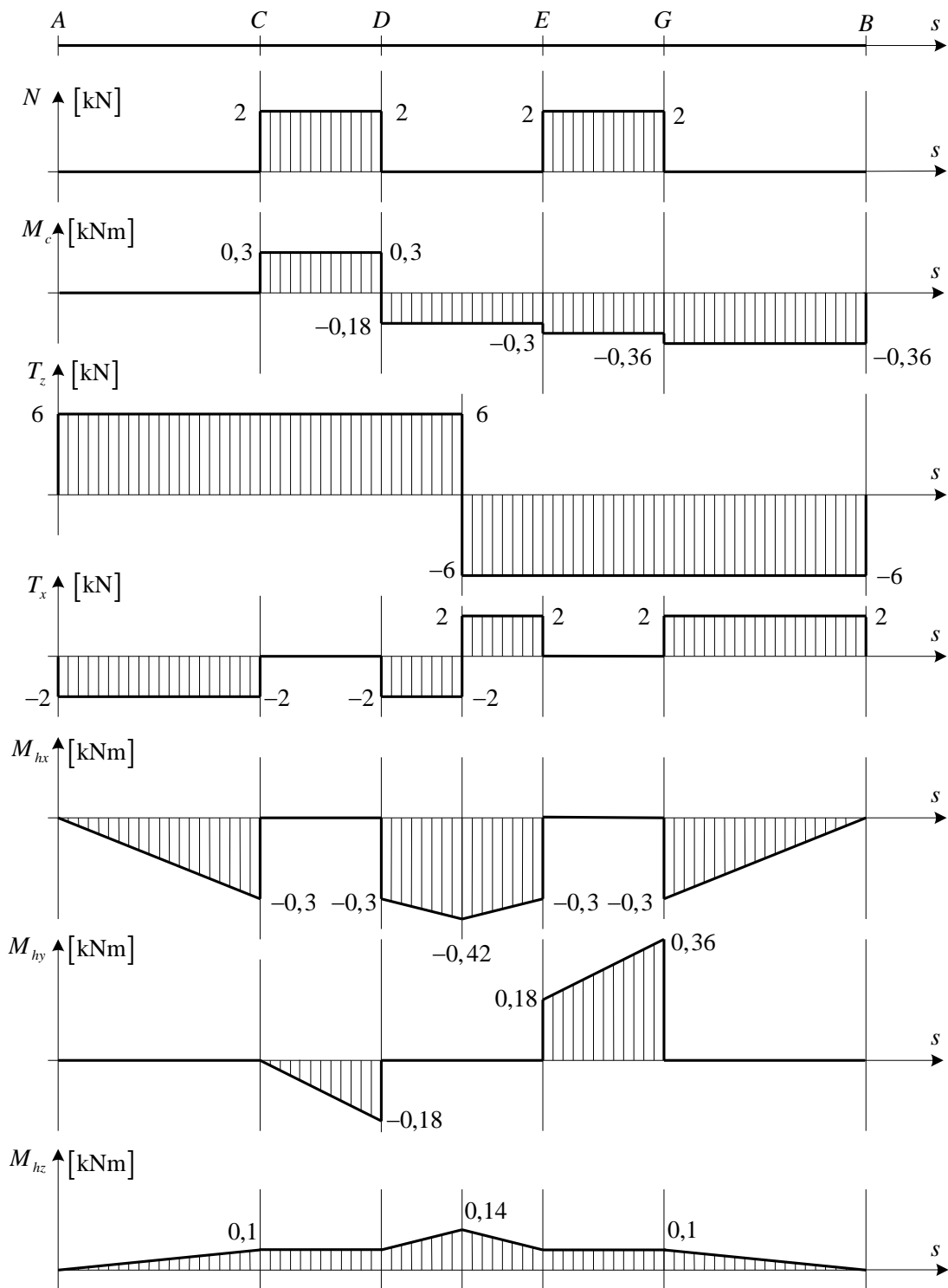
d) A forgattyús tengely igénybevételi ábrái:

A törtvonalú tartót (forgattyús tengely középvonalát) egyenesbe terítjük. Az igénybevételi ábrákat az igénybevételek értelmezése alapján rajzoljuk meg.

Az igénybevételi ábrák jellemző metszékeinek kiszámítása:

- Csavaró nyomatéki ábra $M_c(CD) = 0,05 \cdot 6 = 0,3 \text{ kNm}, M_c(DE) = 0,03 \cdot 6 = -0,18 \text{ kNm},$
 $M_c(EG) = -0,05 \cdot 6 = -0,3 \text{ kNm},$

- Hajlító nyomatéki ábrák: $M_{hx}(C) = 0,05 \cdot 6 = 3 \text{ kNm}, M_{hx}(K) = 0,07 \cdot 6 = 0,42 \text{ kNm},$
 $M_{hy}(D) = 0,03 \cdot 6 = 0,18 \text{ kNm},$
 $M_{hz}(C) = 0,05 \cdot 2 = 0,1 \text{ kNm}, M_{hz}(K) = 0,07 \cdot 2 = 0,14 \text{ kNm}.$



e) A forgattyús tengely veszélyes keresztmetszeteinek meghatározása:

Az igénybevételi ábrák alapján veszélyes keresztmetszetek: G^+ és a DE szakasz középső keresztmetszete, valamint a G^- .

A G^+ keresztmetszet igénybevételei:

$$N(G^+) = 0, \quad M_c(G^+) = -0,36 \text{ kNm},$$

$$T(G^+) = \sqrt{T_x^2 + T_z^2} \Big|_{G^+} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 6,32 \text{ kN}$$

$$M_h(G^+) = \sqrt{M_{hx}^2 + M_{hz}^2} \Big|_{G^+} = \sqrt{0,3^2 + 0,1^2} = 0,32 \text{ kNm}.$$

A DE szakasz középső keresztmetszetének igénybevétele:

$$N(DE) = 0, \quad M_c(DE) = -0,3 \text{ kNm},$$

$$T(DE) = \sqrt{T_x^2 + T_z^2} \Big|_{DE} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 6,32 \text{ kN},$$

$$M_h(DE) = \sqrt{M_{hx}^2 + M_{hz}^2} \Big|_{DE} = \sqrt{0,42^2 + 0,14^2} = 0,44 \text{ kNm}.$$

A G^- keresztmetszet igénybevételei:

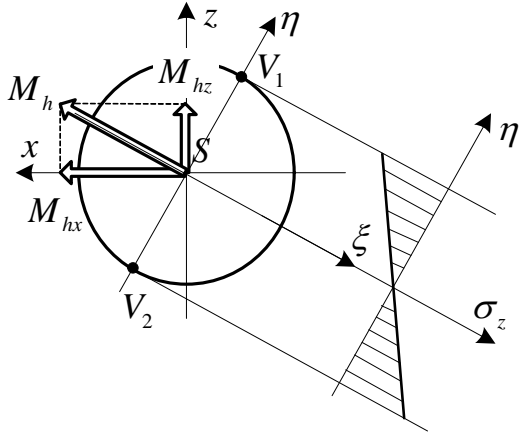
$$N(G^-) = 2 \text{ kN}, \quad M_c(G^-) = -0,3 \text{ kNm},$$

$$T(G^-) = T_z(G^-) = -6 \text{ kN},$$

$$M_{hz}(G^-) = 0,1 \text{ kNm}, \quad M_{hy}(G^-) = 0,36 \text{ kNm}.$$

f) A veszélyes keresztmetszetek jellemző feszültségeloszlásainak megrajzolása:

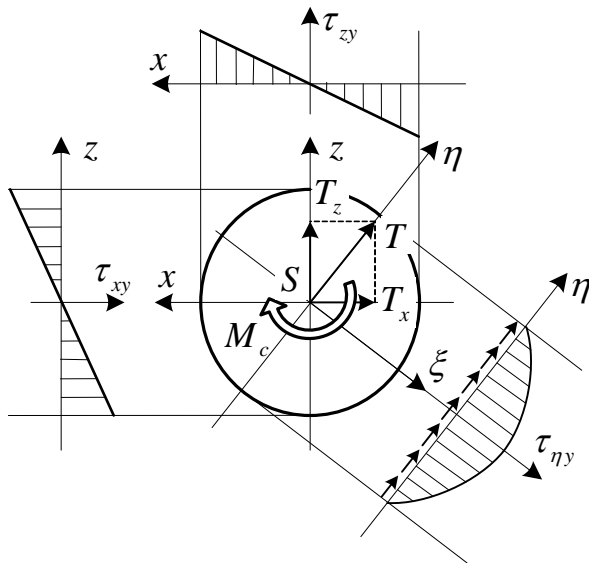
- A feszültségeloszlás jellege a kör keresztmetszetű részeken, ha $N = 0$, $M_{hx} < 0$, $M_{hz} > 0$:



$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hz}}{I_z} x = \frac{M_h}{I_\xi} \eta, \quad I_x = I_z = I_\xi = \frac{d^4 \pi}{64},$$

$$\sigma_{z \max} = \sigma_z(V) = \frac{M_h}{I_\xi} \frac{d}{2} = \frac{M_h}{K_\xi}, \quad K_x = K_z = K_\xi = \frac{d^3 \pi}{32}$$

- A feszültségeloszlás jellege kör keresztmetszetű részeken, ha $M_c < 0$, $T_x > 0$, $T_z < 0$:

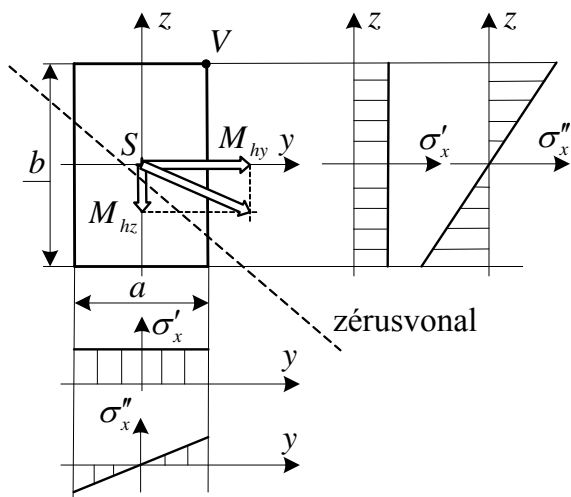


$$\tau_{xy} = \frac{M_c}{I_p} z, \quad \tau_{zy} = -\frac{M_c}{I_p} x, \quad \tau_{\phi z} = \frac{M_c}{I_p} R,$$

$$\tau_{\phi z \max} = \frac{M_c}{I_p} \frac{d}{2} = \frac{M_c}{K_p}, \quad I_p = \frac{d^4 \pi}{32}, \quad K_p = \frac{d^3 \pi}{16}$$

$$\tau_{\eta z \max} = \tau_{\eta z}(S) = \frac{4T}{3A}, \quad A = \frac{d^2 \pi}{4}$$

- A feszültségeloszlás jellege a téglalap keresztmetszetű részeken, ha $N > 0$, $M_{hy} > 0$, $M_{hz} > 0$:



$$\sigma'_x = \frac{N}{A} = \text{állandó}, \quad A = ab,$$

$$\sigma''_x = \frac{M_{hy}}{I_y} z + \frac{M_{hz}}{I_z} y, \quad I_y = \frac{ab^3}{12}, \quad I_z = \frac{a^3b}{12}$$

A zérus vonal egyenlete:

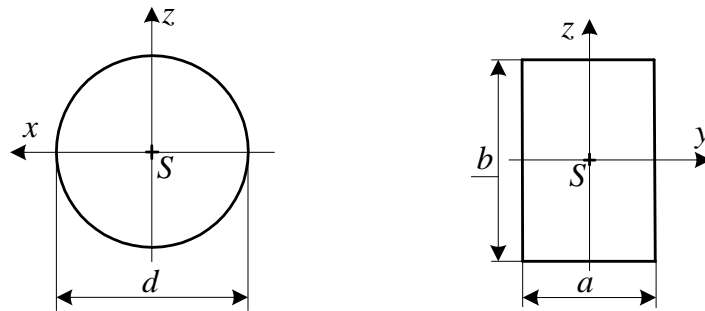
$$\sigma_x = 0 = \frac{N}{A} + \frac{M_{hy}}{I_y} z + \frac{M_{hz}}{I_z} y, \quad z = -\frac{I_y}{I_z} \frac{M_{hz}}{M_{hy}} y - \frac{N}{A} \frac{I_y}{M_{hy}}$$

$$\sigma_{x \max} = \sigma'_x + \sigma''_{x \max} = \frac{N}{A} + \frac{|M_{hy}|}{K_y} + \frac{|M_{hz}|}{K_z},$$

$$K_y = \frac{2I_y}{b} = \frac{ab^2}{6}, \quad K_z = \frac{2I_z}{a} = \frac{a^2b}{6}$$

g) A forgattyús tengely feszültségcsúcsra történő méretezése a *Huber-Mises-Hencky* elmélet szerint:

A forgattyús tengely kör keresztmetszetei a xz , a téglalap keresztmetszetei (a forgattyúkarok keresztmetszetei) pedig az yz síkkal párhuzamosak.



A téglalap keresztmetszetenél: $b = 2a$. Konstruktív megfontolásból: $b \geq 2d$.

Gondolatmenet:

- A forgattyús tengely kör keresztmetszetű részeit a G^+ és a DE szakasz középső veszélyes keresztmetszetében hajlításra és csavarásra méretezzük.
- A kapott legnagyobb átmérőt kismértékben megnöveljük és ezzel – a fenti konstrukciós megfontolást is figyelembe véve – a forgattyús tengely téglalap keresztmetszetű részeit a G^- veszélyes keresztmetszetben húzásra és ferde hajlításra ellenőrizzük.

A kör keresztmetszetű részek méretezés hajlításra:

$$\sigma_{red \max} (HMH) = \sqrt{(\sigma_{y \max})^2 + \beta(\tau_{\phi z})^2} = \sqrt{\left(\frac{M_h}{K_x}\right)^2 + 3\left(\frac{M_c}{2K_x}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_h^2 + \frac{3}{4}M_c^2}}{K_x} = \frac{M_{red}}{K_x}, \quad K_x = \frac{d^3\pi}{32},$$

$$\sigma_{red \max} (HMH) \leq \sigma_{meg} \Rightarrow \frac{M_{red}}{K_x} = \frac{32M_{red}}{d^3\pi} \leq \sigma_{meg} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{red}}{\sigma_{meg}\pi}}$$

$$G^+ \text{ keresztmetszet: } M_{red}(G^+) = \sqrt{M_h^2 + \frac{3}{4}M_c^2} = \sqrt{0,32^2 + 0,75 \cdot 0,36^2} \cdot 10^6 = 0,45 \cdot 10^6 \text{ Nmm},$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{red}}{\sigma_{meg}\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0,45 \cdot 10^6}{160 \cdot 3,14}} = 30,6 \text{ mm}.$$

A DE szakasz középső keresztmetszete:

$$M_{red}(DE) = \sqrt{M_h^2 + \frac{3}{4}M_c^2} = \sqrt{0,44^2 + 0,75 \cdot 0,3^2} \cdot 10^6 = 0,51 \cdot 10^6 \text{ Nmm},$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{red}}{\sigma_{meg}\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0,51 \cdot 10^6}{160 \cdot 3,14}} = 31,9 \text{ mm}$$

Az ellenőrzést $d = 35$ mm-es átmérővel végezzük el a G^- keresztmetszetben!

Konstruktív megfontolásból: $b = 2d = 70$ mm, $a = \frac{b}{2} = d = 35$ mm.

Keresztmetszeti jellemzők: $A = ab = 70 \cdot 35 = 2450$ mm², $K_y = \frac{ab^2}{6} = \frac{35 \cdot 70^2}{6} = 28583,3$ mm³

$$K_z = \frac{a^2b}{6} = \frac{35^2 \cdot 70}{6} = 14291,6$$
 mm³.

Az ellenőrzést húzásra és ferde hajlításra végezzük el. A G^- keresztmetszetben fellépő csavarással azért nem foglalkozunk, mert téglalap keresztmetszetű rudak csavarásáról nincsenek ismereteink.

$$\sigma_{x\max} = \sigma'_x + \sigma''_{x\max} = \frac{N}{A} + \frac{|M_{hy}|}{K_y} + \frac{|M_{hz}|}{K_z} = \frac{2 \cdot 10^3}{2450} + \frac{0,36 \cdot 10^6}{28583,33} + \frac{0,1 \cdot 10^6}{14291,66} = 0,82 + 12,59 + 7,00 = 20,41 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_{x\max} \leq \sigma_{meg}, \quad 20,41 \text{ MPa} < 160 \text{ MPa}$$

A forgattyús tengely a fenti keresztmetszeti méretek választása esetén szilárdságtani szempontból megfelel!