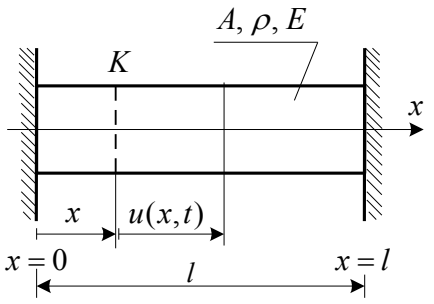
SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM **ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK**

REZGÉSTAN GYAKORLAT

Kidolgozta: Dr. Nagy Zoltán egyetemi adjunktus

14. feladat: Mindkét végén befalazott rúd longitudinális rezgései (kontinuum modell)



Adott: a mindkét végén befalazott l hosszúságú prizmatikus rúd anyaga és geometriája: $A = 212\,\text{mm}^2$, $l = 7\,\text{m}$, $\rho = 7800\ \text{kg/m}^3$, $E = 2 \cdot 10^{11}\ \text{N/m}^2$.
A rúd keresztmetszetének alakja tetszőleges.

Feladat: a) A longitudinális kontinuum-rezgések differenciálegyenletének megoldása.
b) A rúd első három sajátfrekvenciájának és a hozzájuk tartozó rezgésképeknek a meghatározása.

Kidolgozás:

a) A longitudinális kontinuum-rezgések differenciálegyenletének megoldása:

A longitudinális kontinuum-rezgés mozgásegyenlete: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{E}{\rho}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

A differenciálegyenletben $u = u(x,t)$ a rúd K keresztmetszetének rúdirányú (a rúd középvonalának irányába eső) elmozdulása.

A megoldást *Fourier* módszerrel egy, csak a helykoordinátától függő $\Phi(x)$ és egy, csak az időtől függő $T(t)$ függvény szorzatának alakjában keressük:

$$u(x,t) = \Phi(x)\,T(t) = \left[D_1 \cos\left(\frac{\alpha}{a}x\right) + D_2 \sin\left(\frac{\alpha}{a}x\right)\right]\left[\cos(\alpha t + \varepsilon)\right].$$

A megoldásban szereplő D_1, D_2 állandók a rúd két végére felírt peremfeltételekből határozhatók meg:

Az $x = 0$ helyen a keresztmetszet elmozdulása: $u(x=0,t) = \left[D_1 \cdot 1 + D_2 \cdot 0\right]\left[\cos(\alpha t + \varepsilon)\right] = 0.$

$$\Downarrow$$

$$D_1 = 0.$$

Az $x = l$ helyen a keresztmetszet elmozdulása: $u(x=l,t) = D_2 \sin\left(\dfrac{\alpha}{a}l\right)\left[\cos(\alpha t + \varepsilon)\right] = 0.$

$$\Downarrow$$

$$D_2 = 0, \text{ vagy } \sin\left(\frac{\alpha}{a}l\right) = 0.$$

A $D_2 = 0$ esetén az $u(x,t) \equiv 0$ megoldást kapnánk, ami számunkra érdektelen (mert azt jelenti, hogy nincs rezgés). Ezért a másik lehetőséget vizsgáljuk meg (ez esetben D_2 értéke tetszőleges):

A $\sin\left(\frac{\alpha}{a}l\right)=0$ abban az esetben teljesül, ha $\frac{\alpha}{a}l=i\pi$, ahol $(i=0,1,2,3, \quad .... \quad ,\infty)$.

Ebből a feltételből kapjuk a longitudinális kontinuum-rezgés saját körfrekvenciáit:

$$\alpha_i=\frac{a}{l}i\pi=\frac{1}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}i\pi, \quad (i=1,2,3, \quad .... \quad ,\infty).$$

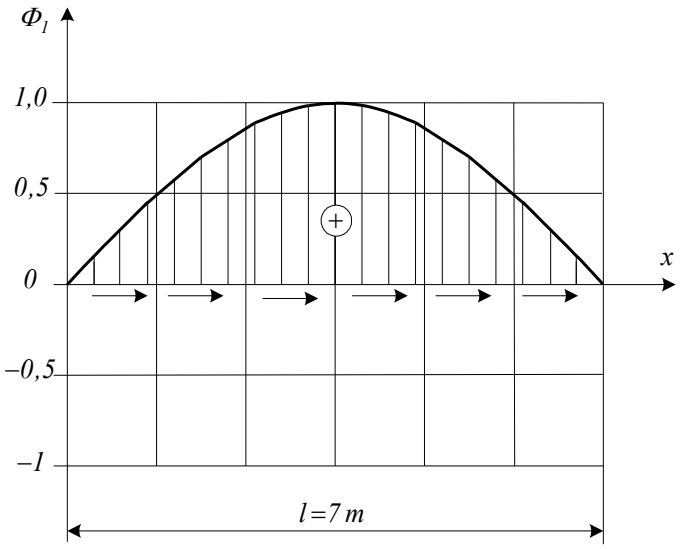
b) A rúd első három sajátfrekvenciájának és a hozzájuk tartozó rezgésképeknek a meghatározása és megrajzolása:

Az összefüggésben szereplő $a=\sqrt{\frac{E}{\rho}}=\sqrt{\frac{2\cdot 10^{11}}{7800}}=5063,7$ m/s, állandó fizikai jelentése: a longitudinális rezgés (rezgéshullám) terjedési sebessége a rúdban.

A rezgésképeket a $\Phi=\Phi(x)$ függvény ábrázolásával kapjuk: $\Phi_i=\Phi_i(x)=D_2\sin\left(\frac{\alpha_i}{a}x\right)$.

Legyen a továbbiakban $D_2=1$.

<u>*i=1 - első saját körfrekvencia, első rezgéskép*</u>:



Az első saját körfrekvencia:

$$\alpha_1=\frac{a}{l}(1\cdot\pi)=723,38\cdot 3,141$$

$$\alpha_1=2272\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Az első rezgéskép:

$$\Phi_1=\Phi_1(x)=\sin\left(1\cdot\pi\frac{x}{l}\right)$$

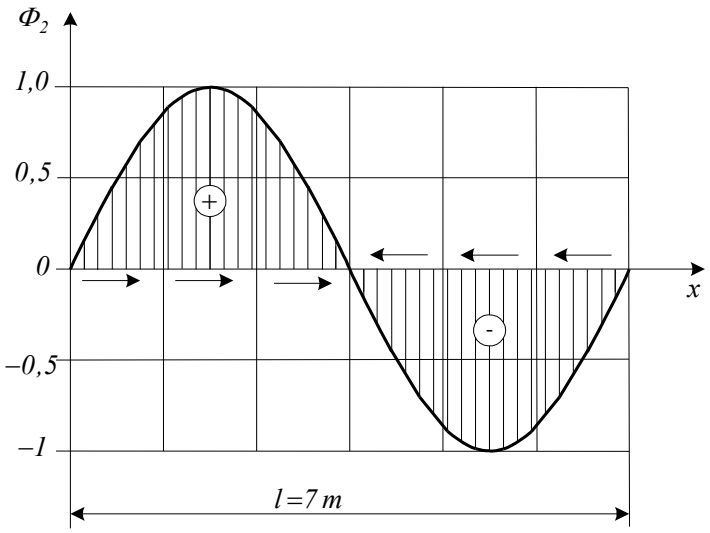
A peremfeltételek az $x=0$ és $x=l$ helyen:

$$\Phi_1=\Phi_1(0)=\sin\left(1\cdot\pi\frac{0}{l}\right)=0,$$

$$\Phi_1=\Phi_1(l)=\sin\left(1\cdot\pi\frac{l}{l}\right)=0.$$

A rezgésképen a függvényértékek az elmozdulások nagyságát, a nyilak pedig az x tengely irányú elmozdulások irányát szemléltetik.

i=2 - második saját körfrekvencia, második rezgésképe:



A második saját körfrekvencia:

$$\alpha_2 = \frac{v_l}{l}\left(2\cdot\pi\right) = 723{,}38\cdot 6{,}282$$

$$\alpha_2 = 4544\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

A második rezgésképe:

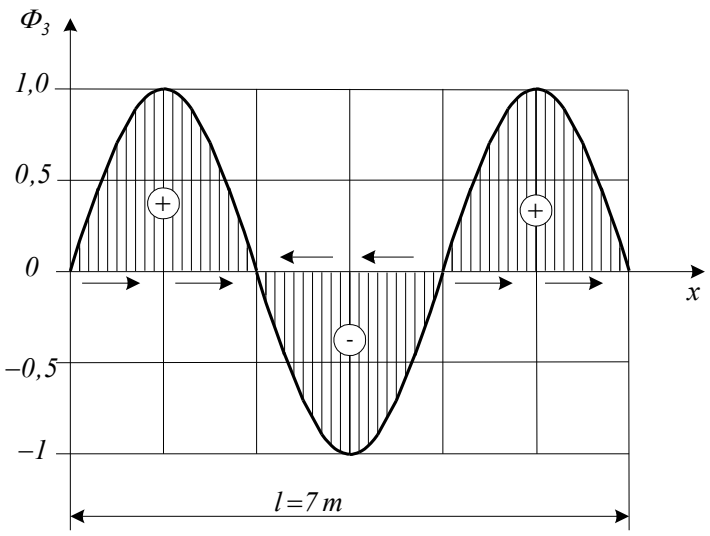
$$\Phi_2 = \Phi_2\left(x\right) = \sin\left(2\cdot\pi\frac{x}{l}\right)$$

Peremfeltételek az $x=0$ és $x=l$ helyen:

$$\Phi_2 = \Phi_2\left(0\right) = \sin\left(2\cdot\pi\frac{0}{l}\right) = 0\ ,$$

$$\Phi_2 = \Phi_2\left(l\right) = \sin\left(2\cdot\pi\frac{l}{l}\right) = 0\ .$$

i=3 - harmadik saját körfrekvencia, harmadik rezgésképe:



A harmadik saját körfrekvencia:

$$\alpha_3 = \frac{v_l}{l}\left(3\cdot\pi\right) = 723{,}38\cdot 9{,}423$$

$$\alpha_3 = 6816\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

A harmadik rezgésképe:

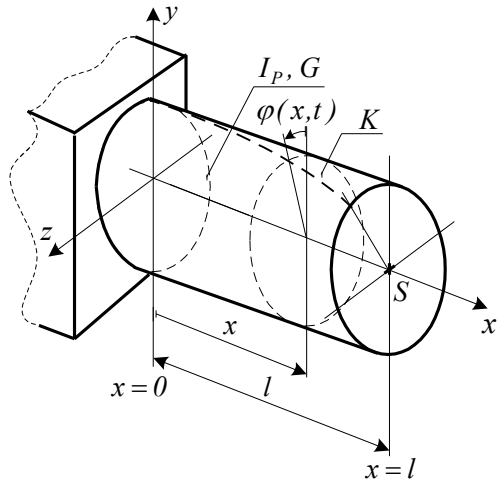
$$\Phi_3 = \Phi_3\left(x\right) = \sin\left(3\cdot\pi\frac{x}{l}\right)$$

Peremfeltételek az $x=0$ és $x=l$ helyen:

$$\Phi_3 = \Phi_3\left(0\right) = \sin\left(3\cdot\pi\frac{0}{l}\right) = 0\ ,$$

$$\Phi_3 = \Phi_3\left(l\right) = \sin\left(3\cdot\pi\frac{l}{l}\right) = 0\ .$$

15. feladat: Befalazott kör keresztmetszetű rúd torziós rezgései (kontinuum modell)



Adott: az egyik végén befalazott kör keresztmetszetű, l hosszúságú rúd anyaga és geometriája.
$l=10\,\mathrm{m}$, $\rho=8000\ \mathrm{kg/m^3}$, $G=80000\,\mathrm{MPa}$.

Feladat: a) A torziós (csavaró) kontinuum-rezgések differenciálegyenletének megoldása.
b) A rúd első három sajátfrekvenciájának és a hozzájuk tartozó rezgésképeknek a meghatározása.

Kidolgozás:

a) A torziós (csavaró) kontinuum-rezgések differenciálegyenletének megoldása:

A torziós kontiuum-rezgés mozgásegyenlete: $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\dfrac{G}{\rho}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=b^2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$.

A differenciálegyenletben $\varphi=\varphi(x,t)$ a rúd K keresztmetszetének x tengely körüli szögelfordulása.

A megoldást *Fourier* módszerrel egy, csak a helykoordinátától függő $\Phi(x)$ és egy, csak az időtől függő $T(t)$ függvény szorzatának alakjában keressük:

$$\varphi(x,t)=\left[D_1\cos\left(\frac{\alpha}{b}x\right)+D_2\sin\left(\frac{\alpha}{b}x\right)\right]\left[\cos(\alpha t+\varepsilon)\right]=\Phi(x)\,T(t).$$

A megoldásban szereplő D_1, D_2 állandók a rúd két végére felírt peremfeltételekből határozható meg:

Az $x=0$ helyen a keresztmetszet elmozdulása: $u(x=0,t)=\left[D_1\cdot 1+D_2\cdot 0\right]\left[\cos(\alpha t+\varepsilon)\right]=0.$

$$\Downarrow$$

$$D_1=0.$$

Az $x=0$ helyen (befalazott rúdvég) a keresztmetszet szögelfordulása:

$$\varphi(x=0,t)=\left[D_1\cdot 1+D_2\cdot 0\right]\cos(\alpha t+\varepsilon)=0.$$

$$\Downarrow$$

$$D_1=0.$$

Az $x=l$ helyen (szabad rúdvég) a csavaró nyomaték, illetve az ezzel arányos $\vartheta=M_c/I_pG$ fajlagos szögelfordulás:

$$\vartheta=\frac{1}{I_P G}\underbrace{M_c}_{=0}=\left.\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l}=D_2\frac{\alpha}{b}\cos\left(\frac{\alpha}{b}l\right)\cos(\alpha t+\varepsilon)=0.$$

$$\Downarrow$$

$$D_2=0,\ \text{vagy}\ \cos\left(\frac{\alpha}{b}l\right)=0.$$

A $D_2 = 0$ esetén az $\varphi(x,t) \equiv 0$ megoldást kapnánk, ami számunkra érdektelen (mert azt jelenti, hogy nincs rezgés). Ezért a másik lehetőséget vizsgáljuk meg (ez esetben D_2 értéke tetszőleges):

A $\cos\left(\frac{\alpha}{b} l\right) = 0$ abban az esetben teljesül, ha $\frac{\alpha}{b} l = \frac{\pi}{2} + (i-1)\pi$, ahol $(i = 0,1,2,3, \quad .... \quad , \infty)$.

Ebből a feltételből kapjuk a csavaró kontinuum-rezgés saját körfrekvenciáit:

$$\alpha_i = \frac{b}{l}\left[\frac{\pi}{2} + (i-1)\pi\right] = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{G}{\rho}}\left[\frac{\pi}{2} + (i-1)\pi\right], \qquad (i = 1,2,3, ..., \infty).$$

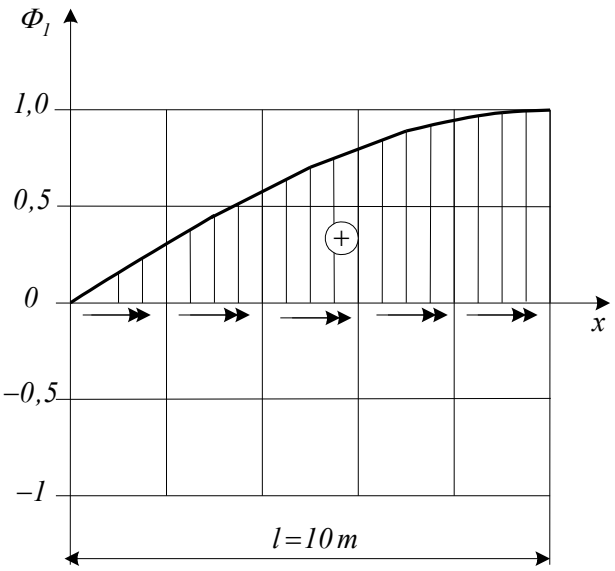
b) A rúd első három sajátfrekvenciájának és a hozzájuk tartozó rezgésképeknek a meghatározása és megrajzolása:

Az összefüggésben szereplő $b = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{10}}{8000}} = 3162,7$ m/s állandó fizikai jelentése: a csavaró rezgés (rezgéshullám) terjedési sebessége a rúdban.

A rezgésképeket a $\Phi = \Phi(x)$ függvény ábrázolásával kapjuk: $\Phi_i = \Phi_i(x) = D_2 \sin\left(\frac{\alpha_i}{b} x\right)$.

Legyen a továbbiakban $D_2 = 1$.

<u>*i=1 - első saját körfrekvencia, első rezgéskép:*</u>



Az első saját körfrekvencia:

$$\alpha_1 = \frac{b}{l}\left[\frac{\pi}{2} + (1-1)\pi\right] = \frac{b}{l}\frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_1 = \frac{3162}{10}\frac{3,141}{2} = 496,5 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Az első rezgéskép:

$$\Phi_1 = \sin\left(\left[\frac{\pi}{2} + (1-1)\pi\right]\frac{x}{l}\right)$$

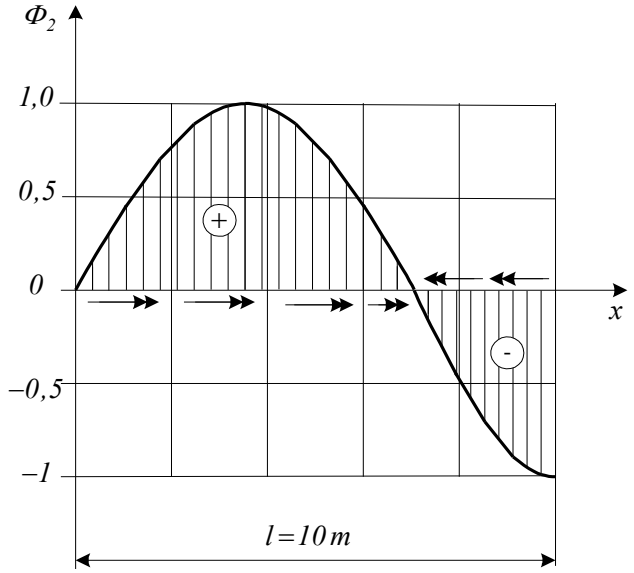
Jellemző értékek az $x = 0$ és $x = l$ helyen:

$$\Phi_1 = \Phi_1(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) = 0,$$

$$\Phi_1 = \Phi_1(l) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{l}{l}\right) = 1.$$

A rezgésképen a függvényértékek a szögelfordulás nagyságát, a nyilak pedig azt szemléltetik, hogy az *x* tengely körüli szögelfordulásról van szó. A nyilak iránya a szögelfordulás irányát adja meg.

i=2 - második saját körfrekvencia, második rezgéskép:



A második saját körfrekvencia:

$$\alpha_2 = \frac{b}{l}\left[\frac{\pi}{2} + (2-1)\pi\right] = \frac{b}{l}\frac{3\pi}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{3162}{10}\frac{3\cdot 3{,}141}{2} = 1490\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

A második rezgéskép:

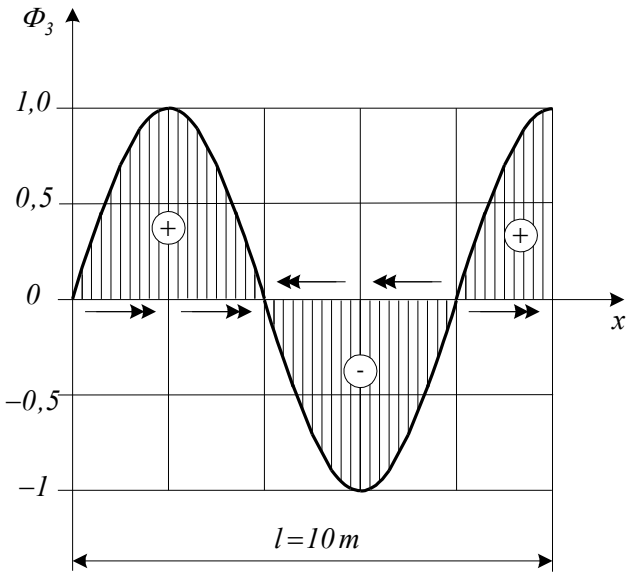
$$\Phi_2 = \sin\left(\left[\frac{\pi}{2} + (2-1)\pi\right]\frac{x}{l}\right)$$

Jellemző értékek az $x = 0$ és $x = l$ helyen:

$$\Phi_2 = \Phi_2(0) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\cdot 0\right) = 0,$$

$$\Phi_2 = \Phi_2(l) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\cdot 1\right) = -1.$$

i=3 - harmadik saját körfrekvencia, harmadik rezgéskép:



A harmadik saját körfrekvencia:

$$\alpha_3 = \frac{b}{l}\left[\frac{\pi}{2} + (3-1)\pi\right] = \frac{b}{l}\frac{5\pi}{2}$$

$$\alpha_3 = \frac{3162}{10}\frac{5\cdot 3{,}141}{2} = 2483\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

A harmadik rezgéskép:

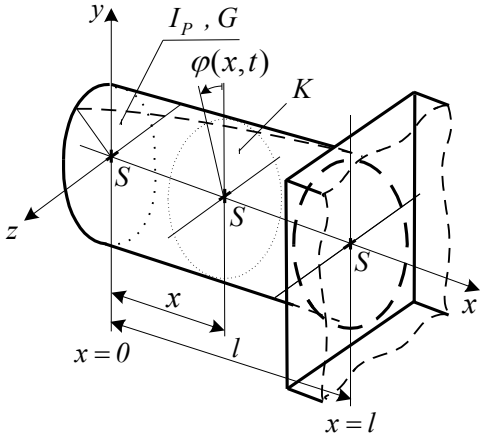
$$\Phi_3 = \sin\left(\left[\frac{\pi}{2} + (3-1)\pi\right]\frac{x}{l}\right)$$

Jellemző értékek az $x = 0$ és $x = l$ helyen:

$$\Phi_3 = \Phi_3(0) = \sin\left(\frac{5\pi}{2}\cdot 0\right) = 0\ ,$$

$$\Phi_3 = \Phi_3(l) = \sin\left(\frac{5\pi}{2}\cdot 1\right) = 1.$$

16. feladat: Befalazott kör keresztmetszetű rúd torziós rezgései (kontinuum modell)



Adott: az egyik végén befalazott kör keresztmetszetű, l hosszúságú rúd anyaga és geometriája.

$l = 10\,\text{m}$, $\rho = 8000\ \text{kg/m}^3$, $G = 80000\,\text{MPa}$.

Feladat: a) A torziós (csavaró) kontinuum-rezgések differenciálegyenletének megoldása.

b) A rúd első három sajátfrekvenciájának és a hozzájuk tartozó rezgésképeknek a meghatározása.

Kidolgozás:

a) A torziós (csavaró) kontinuum-rezgések differenciálegyenletének megoldása:

A torziós kontiuum-rezgés mozgásegyenlete: $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \dfrac{G}{\rho}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = b^2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$.

A differenciálegyenletben $\varphi = \varphi(x,t)$ a rúd K keresztmetszetének x tengely körüli szögelfordulása.

A megoldást *Fourier* módszerrel egy, csak a helykoordinátától függő $\Phi(x)$ és egy, csak az időtől függő $T(t)$ függvény szorzatának alakjában keressük:

$$\varphi(x,t) = \left[D_1\cos\left(\frac{\alpha}{b}x\right) + D_2\sin\left(\frac{\alpha}{b}x\right)\right]\left[\cos(\alpha t + \varepsilon)\right] = \Phi(x)\,T(t).$$

A megoldásban szereplő D_1, D_2 állandók a rúd két végére felírt peremfeltételekből határozható meg:

Az $x = 0$ helyen (szabad rúdvég) a csavaró nyomaték, illetve az ezzel arányos $\vartheta = M_c / I_p G$ fajlagos szögelfordulás:

$$\vartheta = \frac{1}{I_P G}\underbrace{M_c}_{=0} = \left.\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = D_2\frac{\alpha}{b}\cos\left(\frac{\alpha}{b}\cdot 0\right)\cos(\alpha t + \varepsilon) = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$D_2 = 0.$$

Az $x = l$ helyen (befalazott rúdvég) a keresztmetszet szögelfordulása:

$$\varphi(x=0,t) = \left[D_1\cos\left(\frac{\alpha}{b}l\right)\right]\cos(\alpha t + \varepsilon) = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$D_1 = 0\text{, vagy } \cos\left(\frac{\alpha}{b}l\right) = 0.$$

A $D_1 = 0$ esetén az $\varphi(x,t) \equiv 0$ megoldást kapnánk, ami számunkra érdektelen (mert azt jelenti, hogy nincs rezgés). Ezért a másik lehetőséget vizsgáljuk meg (ez esetben D_1 értéke tetszőleges):

A $\cos\left(\frac{\alpha}{b}l\right)=0$ abban az esetben teljesül, ha $\frac{\alpha}{b}l=\frac{\pi}{2}+(i-1)\pi$, ahol $(i=0,1,2,3,\ \ldots\ ,\infty)$.

Ebből a feltételből kapjuk a csavaró kontinuum-rezgés saját körfrekvenciáit:

$$\alpha_i=\frac{b}{l}\left[\frac{\pi}{2}+(i-1)\pi\right]=\frac{1}{l}\sqrt{\frac{G}{\rho}}\left[\frac{\pi}{2}+(i-1)\pi\right],\qquad (i=1,2,3,\ldots,\infty).$$

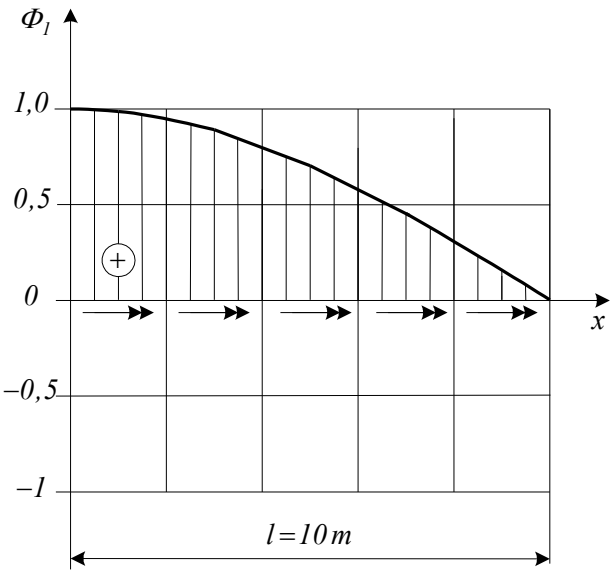
b) A rúd első három sajátfrekvenciájának és a hozzájuk tartozó rezgésképeknek a meghatározása és megrajzolása:

Az összefüggésben szereplő $b=\sqrt{\frac{G}{\rho}}=\sqrt{\frac{8\cdot10^{10}}{8000}}=3162,7$ m/s állandó fizikai jelentése: a csavaró rezgés (rezgéshullám) terjedési sebessége a rúdban.

A rezgésképeket a $\Phi=\Phi(x)$ függvény ábrázolásával kapjuk: $\Phi_i=\Phi_i(x)=D_1\cos\left(\frac{\alpha_i}{b}x\right)$.

Legyen a továbbiakban $D_1=1$.

<u>*i=1 - első saját körfrekvencia, első rezgéskép:*</u>



Az első saját körfrekvencia

$$\alpha_1=\frac{b}{l}\left[\frac{\pi}{2}+(1-1)\pi\right]=\frac{b}{l}\frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_1=\frac{3162}{10}\frac{3,141}{2}=496,5\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Az első rezgéskép:

$$\Phi_1=\cos\left(\left[\frac{\pi}{2}+(1-1)\pi\right]\frac{x}{l}\right).$$

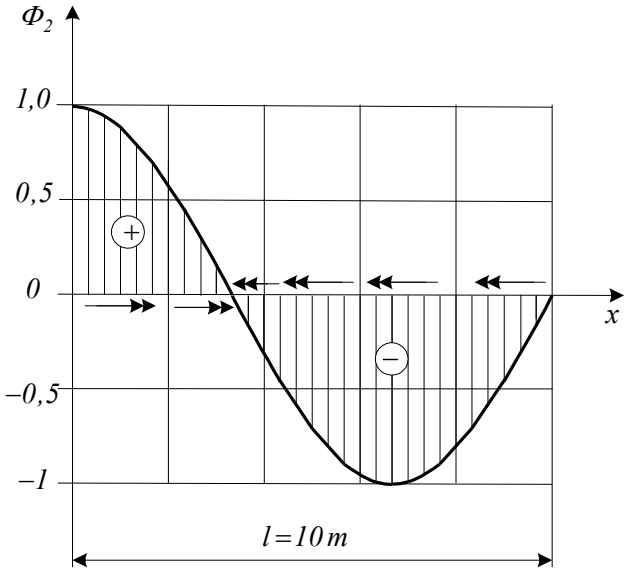
Jellemző értékek az $x=0$ és $x=l$ helyen:

$$\Phi_1=\Phi_1(0)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot0\right)=1,$$

$$\Phi_1=\Phi_1(l)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot1\right)=0.$$

A rezgésképen a függvényértékek a szögelfordulás nagyságát, a nyilak pedig azt szemléltetik, hogy az *x* tengely körüli szögelfordulásról van szó. A nyilak iránya a szögelfordulás irányát adja meg.

i=2 - második saját körfrekvencia, második rezgéskép:



A második saját körfrekvencia:

$$\alpha_2 = \frac{b}{l}\left[\frac{\pi}{2} + (2-1)\pi\right] = \frac{b}{l}\frac{3\pi}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{3162}{10}\frac{3\cdot 3{,}141}{2} = 1490\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

A második rezgéskép:

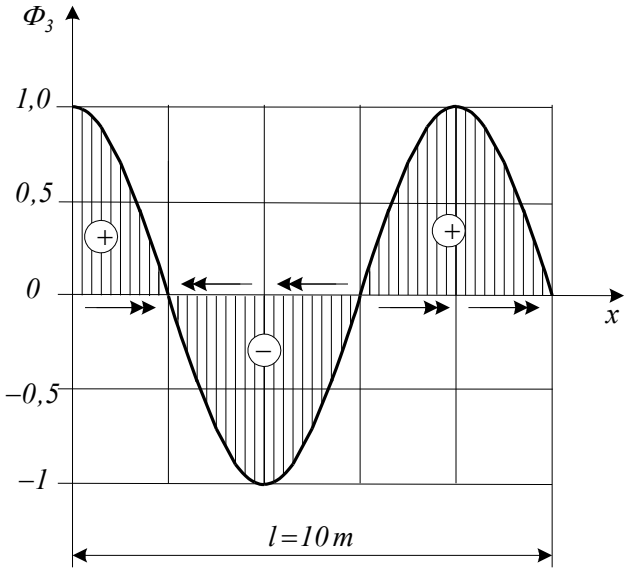
$$\Phi_2 = \cos\left(\left[\frac{\pi}{2} + (2-1)\pi\right]\frac{x}{l}\right).$$

Jellemző értékek az $x = 0$ és $x = l$ helyen:

$$\Phi_2 = \Phi_2(0) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\cdot 0\right) = 1\ ,$$

$$\Phi_2 = \Phi_2(l) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\cdot 1\right) = 0.$$

i=3 - harmadik saját körfrekvencia, harmadik rezgéskép:



A harmadik saját körfrekvencia:

$$\alpha_3 = \frac{b}{l}\left[\frac{\pi}{2} + (3-1)\pi\right] = \frac{b}{l}\frac{5\pi}{2}$$

$$\alpha_3 = \frac{3162}{10}\frac{5\cdot 3{,}141}{2} = 2483\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

A harmadik rezgéskép:

$$\Phi_3 = \cos\left(\left[\frac{\pi}{2} + (3-1)\pi\right]\frac{x}{l}\right).$$

Jellemző értékek az $x = 0$ és $x = l$ helyen:

$$\Phi_3 = \Phi_3(0) = \cos\left(\frac{5\pi}{2}\cdot 0\right) = 1\ ,$$

$$\Phi_3 = \Phi_3(l) = \cos\left(\frac{5\pi}{2}\cdot 1\right) = 0.$$