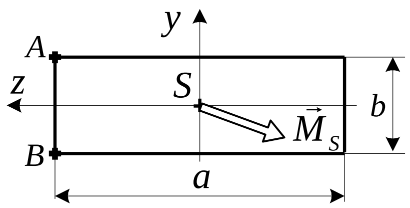
10. MECHANIKA-SZILÁRDSÁGTAN GYAKORLAT

(kidolgozta: dr. Nagy Zoltán egy. adjunktus; Bojtár Gergely egy. Ts.; Tarnai Gábor mérnöktanár.)

10.1. Ferde hajlítás

Adott:



$a = 60$ mm,

$b = 20$ mm,

$\vec{M}_S = (-40\vec{j} - 120\vec{k})$ kNm.

Feladat:

a) Határozza meg és számítsa ki a feszültségi tenzort az A és B pontokban!

b) Számítsa ki a zérusvonal egyenletét és ábrázolja a zérusvonalat!

c) Rajzolja meg a feszültségeloszlást a keresztmetszet y és z tengelye mentén! Határozza meg a keresztmetszet veszélyes pontjait!

d) Rajzolja meg a feszültségeloszlást a keresztmetszet S pontján átmenő, a zérusvonalra merőleges η tengely mentén!

e) Számítsa ki a keresztmetszeten fellépő maximális feszültséget!

Megoldás:

a) A feszültségi tenzor az A és B pontokban:

A keresztmetszet igénybevétele ferde hajlítás: $M_{hy} = -40$ Nm, $M_{hz} = 120$ Nm.

Keresztmetszeti jellemzők:

$$I_y = \frac{a^3 b}{12} = \frac{60^3 \cdot 20}{12} = 360\,000 \text{ mm}^4, \qquad I_z = \frac{b^3 a}{12} = \frac{20^3 \cdot 60}{12} = 40\,000 \text{ mm}^4 = 40 \cdot 10^3 \text{ mm}^4.$$

Feszültség állapot az A és B pontokban:

$$\sigma_x(A) = \frac{M_{hz}}{I_z} y_A + \frac{M_{hy}}{I_y} z_A = \frac{120 \cdot 10^3}{40\,000} 10 + \frac{(-40) \cdot 10^3}{360\,000} 30 = 30 - 3{,}33 = 26{,}67 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_x(B) = \frac{M_{hz}}{I_z} y_B + \frac{M_{hy}}{I_y} z_B = \frac{120 \cdot 10^3}{40\,000} (-10) + \frac{(-40) \cdot 10^3}{360\,000} 30 = -30 - 3{,}33 = -33{,}33 \text{ MPa}.$$

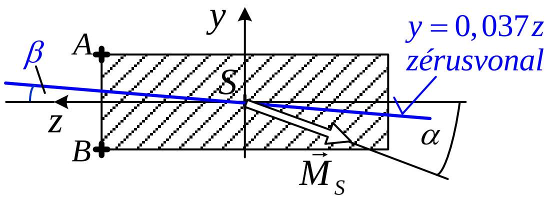
A feszültségi tenzorok:

$$\left[\underline{\underline{F}}_A\right] = \begin{bmatrix} 26{,}67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}, \quad \left[\underline{\underline{F}}_B\right] = \begin{bmatrix} -33{,}33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

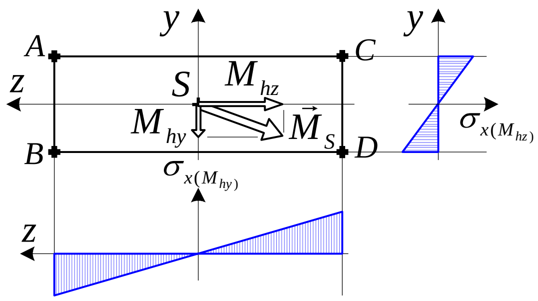
b) A zérusvonal: egyenlete:

$$\sigma_x(A)=\frac{M_{hz}}{I_z}y+\frac{M_{hy}}{I_y}z=0 \quad\Rightarrow\quad y(z)=-\underbrace{\frac{M_{hy}}{M_{hz}}}_{tg\alpha}\frac{I_z}{I_y}z=-\underbrace{tg\alpha\frac{I_z}{I_y}}_{tg\beta}z=-tg\beta\cdot z$$

$$y(z)=-\frac{-40\cdot10^3}{120\cdot10^3}\frac{40\cdot10^3}{360\cdot10^3}z=0{,}037z \quad\Rightarrow\quad y(z)=0{,}037z$$

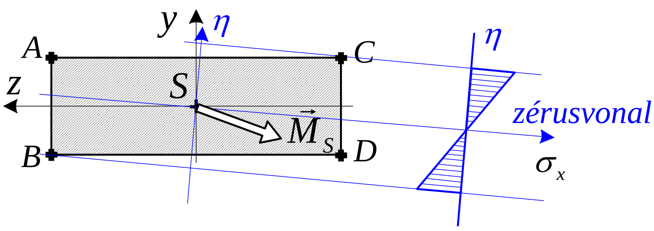


c) A feszültségeloszlás a keresztmetszet y és a z tengelyei mentén, a veszélyes pontok:



A keresztmetszet veszélyes pontjai: B és C pontjai.

d) A feszültségeloszlást a keresztmetszet S pontján átmenő, a zérusvonalra merőleges η tengely mentén:

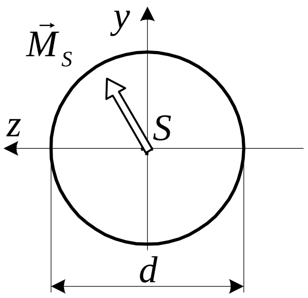


e) A keresztmetszeten fellépő maximális feszültséget!

$$\sigma_{x\max}=\left|\sigma_x(B)\right|=\left|\sigma_x(C)\right|=33{,}33\,\text{MPa}\,.$$

10.2. Kör keresztmetszetű prizmatikus rúd egyenes hajlítása

Adott:



$\sigma_{meg} = 150$ MPa ,

$\vec{M}_S = (40\vec{j} + 30\vec{k}\,)$ Nm.

Feladat:

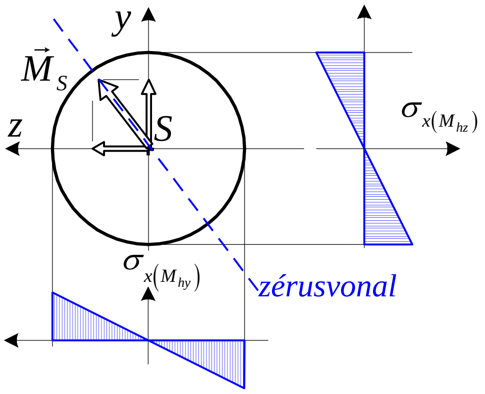
a) Rajzolja meg a feszültségeloszlást a keresztmetszet y és z tengelye mentén! Számítsa ki a zérusvonal egyenletét és ábrázolja a zérusvonalat!

b) Rajzolja meg a feszültségeloszlást a keresztmetszet S pontján átmenő, a zérusvonalra merőleges η tengely mentén! Határozza meg a keresztmetszet veszélyes pontjait!

c) Méretezze a keresztmetszetet feszültségcsúcsra!

Megoldás:

a) Feszültségeloszlás a keresztmetszet y és z tengelye mentén és a zérusvonal egyenlete:



Keresztmetszeti jellemzők:

$I_y = I_z = \dfrac{d^4\pi}{64} \quad \Rightarrow \quad tg\alpha = tg\beta$ egyenes hajlítás!

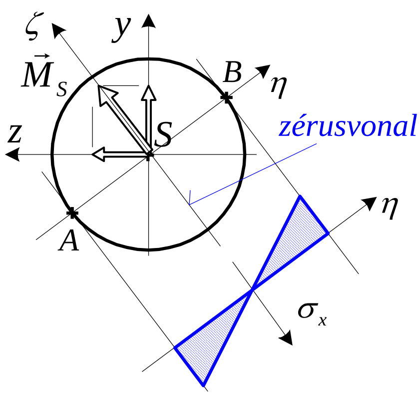
A keresztmetszet igénybevétele:

$M_{hy} = 40$ Nm, $M_{hz} = -30$ Nm.

A zérusvonal egyenlete:

$$\sigma_x = \frac{M_{hz}}{I_z} y + \frac{M_{hy}}{I_y} z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y(z) = -\underbrace{\frac{M_{hy}}{M_{hz}}}_{tg\alpha} \underbrace{\frac{I_z}{I_y}}_{1} z = -\underbrace{tg\alpha}_{tg\beta} \cdot z = -\frac{40 \cdot 10^3}{-30 \cdot 10^3} z = 1{,}33z\,.$$

b) A feszültségeloszlás a keresztmetszet S pontján átmenő, a zérusvonalra merőleges η tengely mentén és a keresztmetszet veszélyes pontjai:



A keresztmetszet veszélyes pontjai:

A és B pontjai.

c) A keresztmetszet méretezése feszültségcsúcsra!

$$M_S = M_{h\zeta} = -\sqrt{M_{hy}^2 + M_{hz}^2} = -\sqrt{40^2 + (-30)^2} = -50 \text{ Nm},$$

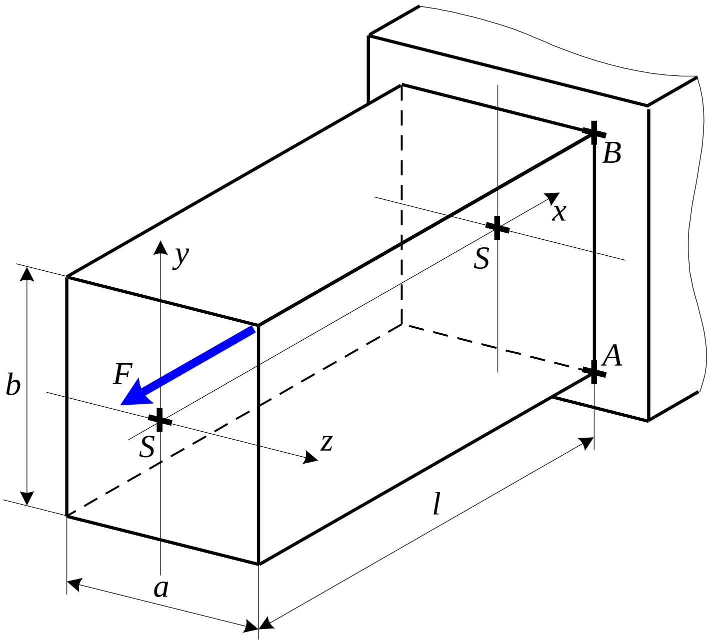
$$\sigma_x(B) = \frac{M_{h\zeta}}{I_\zeta}\eta_B = \frac{M_{h\zeta}}{\frac{d^4\pi}{64}}\frac{d}{2} = \frac{-50\cdot 10^3}{\frac{d^4\pi}{64}}\frac{d}{2} = -\frac{1600\cdot 10^3}{d^3\pi},$$

$$\left|\sigma_x(B)\right| = \sigma_{x\max} = \frac{1600\cdot 10^3}{d^3\pi},$$

$$\left|\sigma_x(B)\right| \le \sigma_{meg} \quad \Rightarrow \quad \frac{1600\cdot 10^3}{d^3\pi} \le 150 ,$$

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{1600\cdot 10^3}{150\cdot\pi}} = 15,03 \left[\frac{Nmm}{\frac{N}{mm^2}} = mm^3\right] \text{mm} \quad \Rightarrow \quad d = 16 \text{ mm}.$$

10.3. Excentrikus húzás-nyomás



Adott:

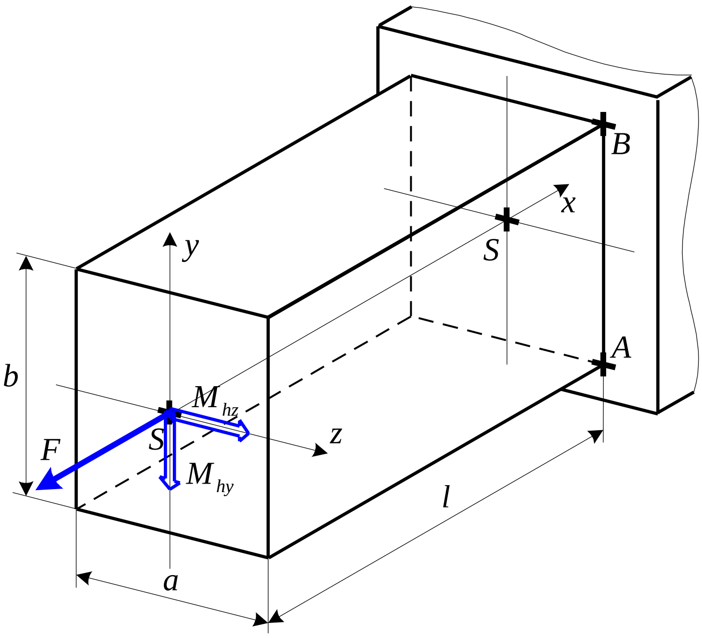
$F = 10\ \text{kN}$,
$l = 1\ \text{m},\ a = 20\ \text{mm},\ b = 30\ \text{mm}$.

Feladat:

a) Igénybevételek meghatározása a rúd befalazási keresztmetszetében.
b) A feszültségi tenzor fölírása és kiszámítása a befalazási keresztmetszet S, A és B pontjában.
c) Rajzolja meg a feszültségeloszlást a befalazási keresztmetszet S pontján átmenő y és z tengelyei mentén!
d) Írja fel a zérusvonal egyenletét, és rajzolja fel a keresztmetszetre.

Megoldás:

a) Igénybevételek meghatározása a rúd befalazási keresztmetszetében:
Helyezzük át az F erőt a keresztmetszet S súlypontjába.



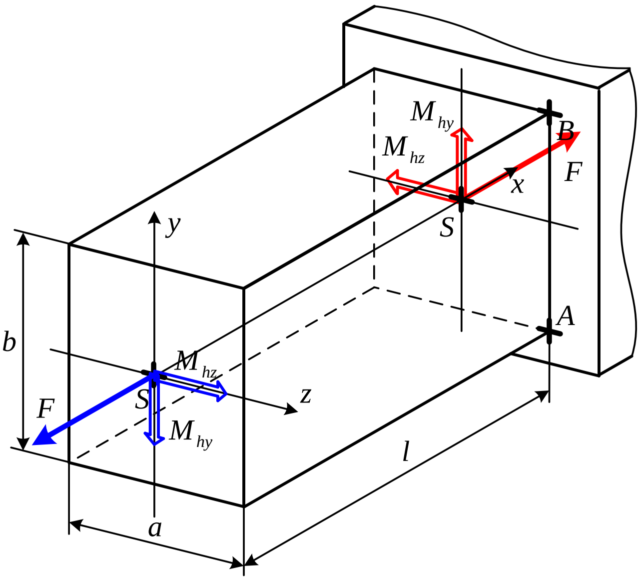
A redukálás után ébredő nyomatékok:

$$M_{hy} = F\frac{a}{2} = 10 \cdot 10^3 \cdot \frac{20}{2} = 10^5\ \text{Nmm}$$

$$M_{hz} = F\frac{b}{2} = 10 \cdot 10^3 \cdot \frac{30}{2} = 1{,}5 \cdot 10^5\ \text{Nmm}$$

A keresztmetszet igénybevétele:
húzás+ferde hajlítás.

b) A feszültségi tenzor a befalazási keresztmetszet S, A és B pontjaiban:



Keresztmetszeti jellemzők:

$$I_y = \frac{a^3 b}{12} = \frac{20^3 \cdot 30}{12} = 20\,000 \text{ mm}^4,$$

$$I_z = \frac{b^3 a}{12} = \frac{30^3 \cdot 20}{12} = 45\,000 \text{ mm}^4,$$

$$A = ab = 20 \cdot 30 = 600 \text{ mm}^2.$$

A keresztmetszet tetszőleges pontjában egytengelyű (σ_x) a feszültség:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_{hz}}{I_z} y + \frac{M_{hy}}{I_y} z$$

$$\sigma_x = \sigma_{x(N)} + \sigma_{x(M_{hz})} + \sigma_{x(M_{hy})}$$

A feszültségállapot az S pontban:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x(S) &= \sigma_{x(N)} = \frac{N}{A} = \frac{10 \cdot 10^3}{20 \cdot 30} = 16{,}67 \text{ MPa} \\ \sigma_x(S) &= \frac{M_{hz}}{I_z} y_S + \frac{M_{hy}}{I_y} z_S = 0, \text{ mert } y_S = z_S = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \left[\underline{\underline{F_S}}\right] = \begin{bmatrix} 16{,}67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

A feszültségállapot az A pontban:

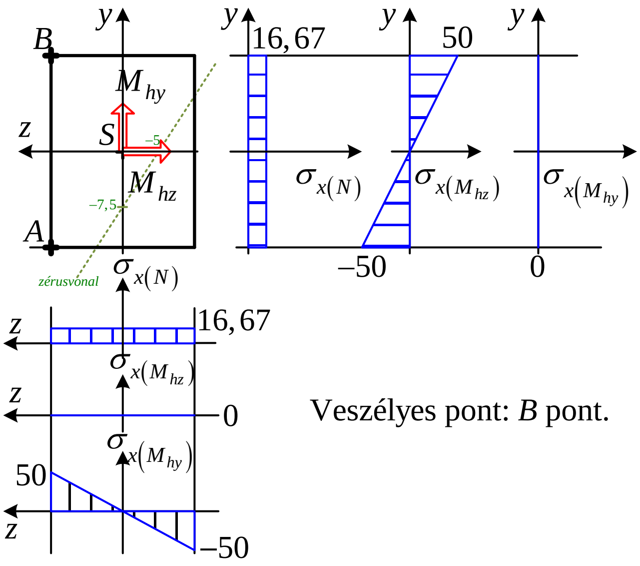
$$\left.\begin{aligned} \sigma_x(A) &= \sigma_{x(N)} = \frac{N}{A} = \frac{10 \cdot 10^3}{20 \cdot 30} = 16{,}67 \text{ MPa} \\ \sigma_x(A) &= \frac{M_{hz}}{I_z} y_A = \frac{M_{hz}}{I_z}\left(-\frac{b}{2}\right) = \frac{1{,}5 \cdot 10^5}{45\,000}\left(-\frac{30}{2}\right) = -50 \text{ MPA} \\ \sigma_x(A) &= \frac{M_{hy}}{I_y} z_A = \frac{M_{hy}}{I_y}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1 \cdot 10^5}{20\,000}\left(\frac{20}{2}\right) = 50 \text{ MPA} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\underline{\underline{F_A}}\right] = \begin{bmatrix} 16{,}67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

A feszültségállapot az B pontban:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x(B) &= \sigma_{x(N)} = \frac{N}{A} = \frac{10 \cdot 10^3}{20 \cdot 30} = 16{,}67 \text{ MPa} \\ \sigma_x(B) &= \frac{M_{hz}}{I_z} y_B = \frac{M_{hz}}{I_z}\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{1{,}5 \cdot 10^5}{45\,000}\left(\frac{30}{2}\right) = 50 \text{ MPA} \\ \sigma_x(B) &= \frac{M_{hy}}{I_y} z_B = \frac{M_{hy}}{I_y}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1 \cdot 10^5}{20\,000}\left(\frac{20}{2}\right) = 50 \text{ MPA} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\underline{\underline{F_B}}\right] = \begin{bmatrix} 116{,}67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

.

c) Feszültségeloszlást a befalazási keresztmetszet S pontján átmenő y és z tengelyei mentén!



Veszélyes pont: B pont.

d) A zérusvonal egyenlete: $\sigma_x = 0$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_{hz}}{I_z} y + \frac{M_{hy}}{I_y} z = 0$$

$$y = -\frac{M_{hy}}{I_y}\frac{I_z}{M_{hz}} z - \frac{N}{A}\frac{I_z}{M_{hz}} = -\frac{10^5}{20\cdot 10^3}\frac{45\cdot 10^3}{1,5\cdot 10^5} z - \frac{10\cdot 10^3}{600}\frac{45\cdot 10^3}{10^5} \quad \Rightarrow$$

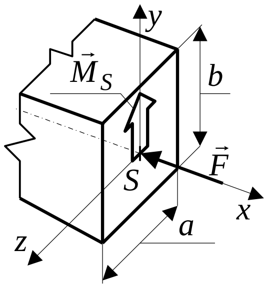
$$y = -1,5z - 7,5$$

Ha $z = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = -7,5$

Ha $y = 0 \quad \Rightarrow \quad z_0 = -5$

10.4. Nyomás és egyenes hajlítás

Adott:



$a = 40$ mm,
$b = 60$ mm,
$\vec{F} = (-120\,\vec{i}\,)$ kN,
$\vec{M}_S = (\;4\;\vec{j}\,)$ kNm,
M_{hy}
$R_{p\,0,2} = \sigma_F = 420$ MPa.

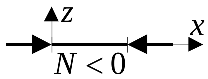
Feladat:

a) A rúd igénybevételeinek meghatározása.
b) A zérusvonal egyenletének felírása.
c) Feszültségeloszlás megrajzolása az y és a z tengelyek mentén, illetve a veszélyes pontok meghatározása.
d) A legnagyobb feszültség meghatározása.
e) A tényleges biztonsági tényező meghatározása.

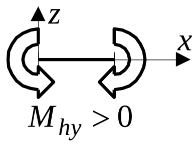
Megoldás:

a) A rúd igénybevételeinek meghatározása:

A rúd nyomott: $N = -120$ kN



A rúd y tengely körül hajlított: $M_{hy} = 4$ kNm



b) A zérusvonal egyenletének a felírása:

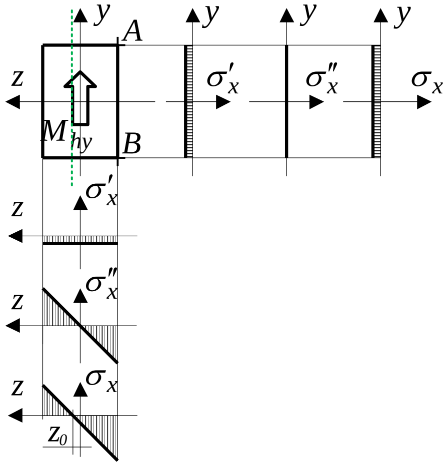
$$A = a\,b = 40 \cdot 60 = 2400 \text{ mm}^2, \quad I_y = \frac{b\,a^3}{12} = \frac{60 \cdot 40^3}{12} = 32 \cdot 10^4 \text{ mm}^4,$$

$$\sigma_x = \sigma_x' + \sigma_x'' = \frac{N}{A} + \frac{M_{hy}}{I_y} z = 0 \quad \Rightarrow$$

$$z_0 = -\frac{N}{A}\frac{I_y}{M_{hy}} = -\frac{-120 \cdot 10^3}{2400}\frac{32 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^6} \quad \Rightarrow \quad z_0 = 4 \text{ mm}.$$

c) Feszültségeloszlás az y és a z tengelyek mentén, illetve a veszélyes pontok meghatározása:

Veszélyes pontok:
a zérusvonaltól legtávolabbi pontok. (AB szakasz)
$(z = -\dfrac{a}{2})$



d) A legnagyobb feszültség meghatározása:

$$\sigma_x' = \frac{N}{A} = \frac{-120\cdot 10^3}{2400} = -50 \text{ MPa},$$

$$\sigma_x''(z=-a/2) = \frac{M_{hy}}{I_y}\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{4\cdot 10^6}{32\cdot 10^4}\left(-\frac{40}{2}\right) = -250 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{x\max} = \left|\sigma_x(z=-a/2)\right| = 50+250 = 300 \text{ MPa}.$$

e) A tényleges biztonsági tényező meghatározása:

$$\sigma_{x\max} \le \frac{\sigma_{jell}}{n} = \frac{R_{p\,0,2}}{n} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{R_{p\,0,2}}{\sigma_{x\max}} = \frac{420}{300} = 1{,}4.$$

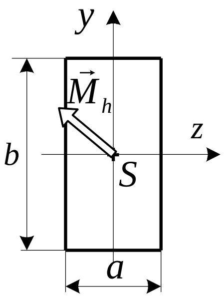
10.5. Ferde hajlítás

Feladat:
a) A feszültségeloszlás megrajzolása és a veszélyes pontok megkeresése.
b) A feszültségállapot meghatározása az A és B pontokban.
c) A zérusvonal egyenletének meghatározása.
d) A feszültségi állapot fölírása a B pontban.

Adott: A rúd K keresztmetszetének méretei és igénybevétele:

$$\vec{M}_h = \left(120\vec{j} - 150\vec{k}\right)\text{Nm},$$

$a = 20$ mm, $b = 50$ mm



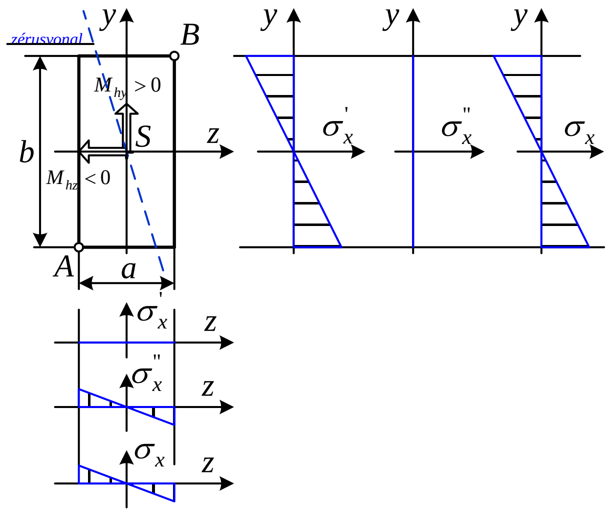
Megoldás:
a) Feszültség eloszlása a koordináta tengelyek mentén:

$$\sigma_x = \sigma_x^{'} + \sigma_x^{''} = \frac{M_{hz}}{I_z} y + \frac{M_{hy}}{I_y} z,$$

$$M_{hy} = -120 \text{ Nm}, M_{hz} = -150 \text{ Nm},$$

$$I_z = \frac{ab^3}{12} = \frac{2 \cdot 125}{12} 10^4 = \frac{125}{6} \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{ba^3}{12} = \frac{5 \cdot 8}{12} 10^4 = \frac{10}{3} \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$



b) A feszültségállapot meghatározása az A és B pontokban.

$$\sigma_{x\max} = \sigma_x(A) = \left|\sigma_x(B)\right| = \frac{M_z}{I_z} y_A + \frac{M_y}{I_y} z_A = \frac{M_z}{I_z}\left(-\frac{b}{2}\right) + \frac{M_y}{I_y}\left(-\frac{a}{2}\right),$$

$$\sigma_{x\max} = \frac{-150 \cdot 10^3}{\frac{125}{6} \cdot 10^4}(-25) + \frac{-120 \cdot 10^3}{\frac{10}{3} \cdot 10^4}(-10) = \frac{900}{50} + \frac{360}{10} = 18 + 36 = 54 \text{ MPa}.$$

c) A zérusvonal egyenlete: Veszélyes pontok az A és B.

$$\sigma_x(A) = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = 0 \quad \Rightarrow \quad y(z) = -\frac{M_y}{M_z}\frac{I_z}{I_y} z = -\frac{-120}{-150}\frac{125}{6}\frac{3}{10} z = -5z.$$

d) A feszültségi állapot a B pontban: $\left[\underline{\underline{F}}_B\right] = \begin{bmatrix} -54 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ MPa.