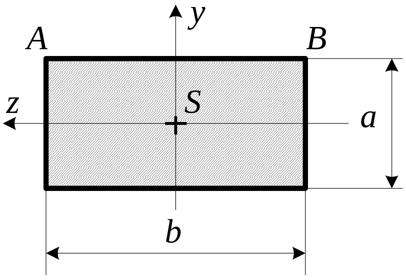
SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM

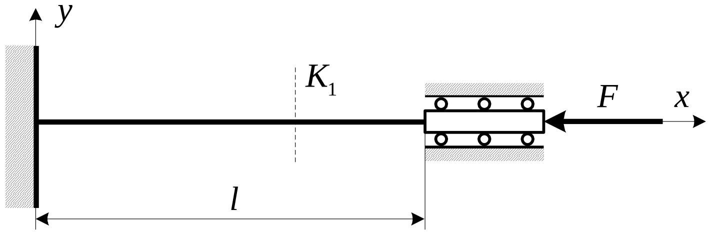
ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK

7. MECHANIKA-SZILÁRDSÁGTAN GYAKORLAT

(kidolgozta: dr. Nagy Zoltán egy. adjunktus; Bojtár Gergely egy. Ts.;Tarnai Gábor mérnöktanár.)

7.1. Karcsú nyomott rúd kihajlása:





Adott:

$a = 80$ mm , $b = 120$ mm , $l = 4,4$ m , $R_{p0,2} = 280$ MPa , $R_A = 240$ MPa ,

$E = 2\cdot 10^5$ MPa , $n_{krit} = 2$.

Feladat:

a) A rúd keresztmetszeti és kihajlási jellemzőinek meghatározása.
b) A kritikus erő meghatározása.
c) A kihajlási határgörbe megrajzolása.
d) A rúd ellenőrzése kihajlásra, ha $F = 1\,000$ kN .

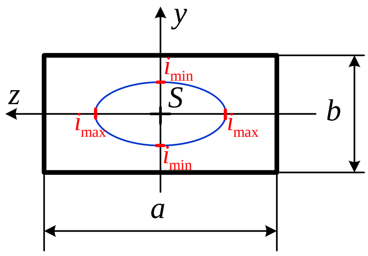
Megoldás:

a) A rúd keresztmetszeti és kihajlási jellemzői:

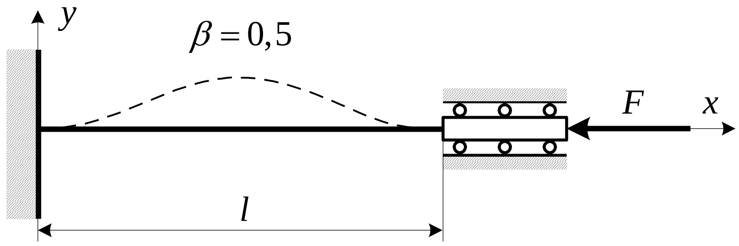
$$I_{\min} = I_2 = I_z = \frac{ba^3}{12} = \frac{120\cdot 80^3}{12} = 5.120.000 \text{ mm}^4$$

$$I_{\max} = I_1 = I_y = \frac{ab^3}{12} = \frac{80\cdot 120^3}{12} = 11.520.000 \text{ mm}^4$$

$$A = ab = 120\cdot 80 = 9600 \text{ mm}^2$$



A keresztmetszet minimális inercia sugara: $i_{\min} = \sqrt{\dfrac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\dfrac{5120000}{9600}} = 23,09$ mm .



A rúd kihajlási fél hullám hossza:

$$l_0 = \beta\cdot l = 0,5\cdot 4400 = 2200 \text{ mm}$$

A rúd karcsúsági tényezője: $\lambda = \dfrac{l_0}{i_{\min}} = \dfrac{\beta\cdot l}{i_{\min}} = \dfrac{0,5\cdot 4400}{23,09} = 95,28$.

A rugalmas és rugalmas-képlékenységi tartomány határa: $\lambda_A = \pi\sqrt{\dfrac{E}{R_A}} = \pi\sqrt{\dfrac{2\cdot 10^5}{240}} = 90,69$.

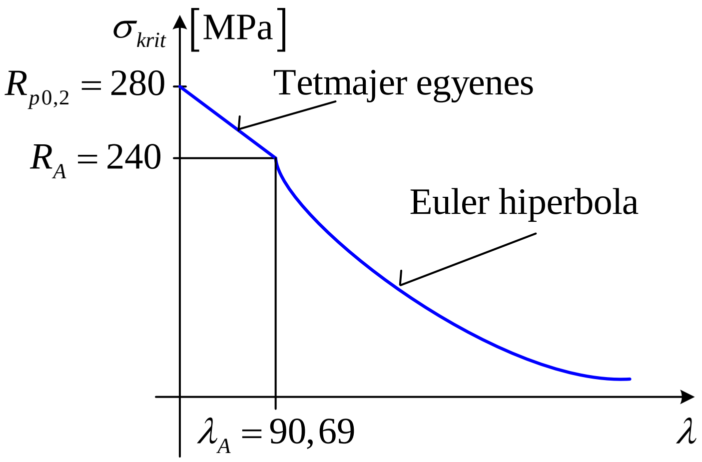
b) Az F_{krit} erő:

A kritikus feszültséget az Euler-féle hiperbola alapján kell meghatározni, mivel:

$$\lambda = 95{,}28 \geq \lambda_A = 90{,}69 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{krit} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} = 3{,}14^2 \frac{2 \cdot 10^5}{95{,}28^2} = 217{,}43 \text{ MPa},$$

$$F_{krit} = \sigma_{krit} A = 217{,}43 \cdot 9600 = 2087328 \text{ N}.$$

c) A kihajlási görbe:



$$\sigma_{krit}(\lambda) = \begin{cases} R_{p0,2} - \dfrac{R_{p0,2} - R_A}{\lambda_A}\lambda, & ha \quad \lambda \leq \lambda_A, \\ \pi^2 \dfrac{E}{\lambda^2}, & ha \quad \lambda \geq \lambda_A. \end{cases}$$

.

$\lambda \leq \lambda_A \Rightarrow$ rugalmas-képlékeny tartomány

$\lambda \geq \lambda_A \Rightarrow$ rugalmas tartomány

d) A rúd ellenőrzése kihajlásra, ha $F = 1000$ kN :

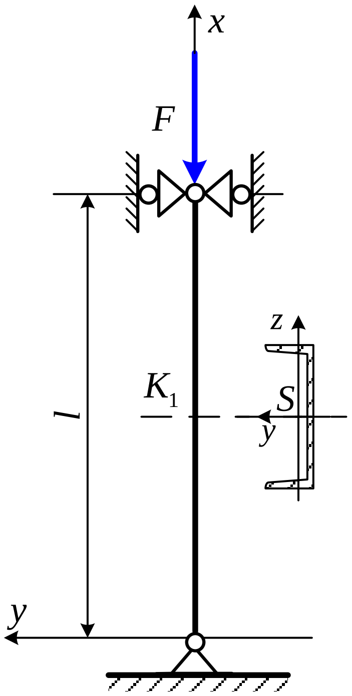
A tényleges feszültség: $\sigma_{x\max} = \dfrac{F}{A} = \dfrac{1 \cdot 10^6}{9600} = 104{,}17$ MPa

A kritikus feszültség: $\sigma_{krit} = \pi^2 \dfrac{E}{\lambda^2} = 3{,}14^2 \dfrac{2 \cdot 10^5}{95{,}28^2} = 217{,}43$ MPa

A megengedett feszültség: $\sigma_{kr\,meg} = \dfrac{\sigma_{krit}}{n_{krit}} = \dfrac{217{,}43}{2} = 108{,}715$ MPa

Ellenőrzés: $\sigma_{x\max} = 104{,}17 \text{ MPa} \leq \sigma_{kr\,meg} = 108{,}715 \text{ MPa} \quad \Rightarrow$ rúd kihajlásra megfelel.

7.2. Karcsú nyomott rúd kihajlása:



Adott:

$l = 1{,}2\ \text{m}$, $R_{p0,2} = 220\ \text{MPa}$, $R_A = 190\ \text{MPa}$,

$E = 2{,}1 \cdot 10^5\ \text{MPa}$, $n_{kr} = 1{,}5$.

A rúd profilja: $U80$, $MSz\ 326$,

$A = 11\ \text{cm}^2$, $I_y = 106\ \text{cm}^4$, $I_z = 19{,}4\ \text{cm}^4$.

Feladat:

a) A rúd keresztmetszeti és kihajlási jellemzőinek meghatározása.
b) A kritikus erő meghatározása.
c) A kihajlási határgörbe megrajzolása.
d) A rúd ellenőrzése kihajlásra, ha $F = 100\ \text{kN}$.

Megoldás:

a) A rúd keresztmetszeti és kihajlási jellemzői:
Az y és z tengelyek tehetetlenségi főtengelyek, így

$I_{\min} = I_2 = I_z = 19{,}4\ \text{cm}^4$, $I_{\max} = I_1 = I_y = 106\ \text{cm}^4$,

A keresztmetszet minimális inercia sugara: $i_{\min} = \sqrt{\dfrac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\dfrac{I_2}{A}} = \sqrt{\dfrac{19{,}4}{11}} = 1{,}328\ \text{cm}$.

A rúd kihajlási fél hullám hossza: $\beta = 1 \quad \Rightarrow \quad l_0 = \beta \cdot l = 1 \cdot 120 = 120\ \text{cm}$.

A rúd karcsúsági tényezője: $\lambda = \dfrac{l_0}{i_{\min}} = \dfrac{120}{1{,}328} = 90{,}36$.

A rugalmas és rugalmas-képlékenységi tartomány határa: $\lambda_A = \pi\sqrt{\dfrac{E}{R_A}} = \pi\sqrt{\dfrac{2{,}1 \cdot 10^5}{190}} = 104{,}44$.

b) Az F_{krit} erő:

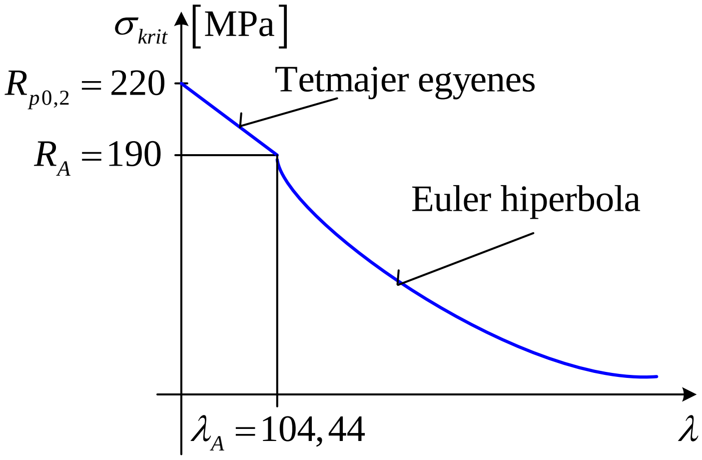
A kritikus feszültséget a Tetmajer egyenes alapján kell meghatározni, mivel:

$\lambda = 90{,}36 \le \lambda_A = 104{,}44$,

$$\sigma_{krit}(\lambda) = R_{p0,2} - \frac{R_{p0,2} - R_A}{\lambda_A}\lambda = 220 - \frac{220 - 190}{104{,}44} \cdot 90{,}36 = 194{,}07\ \text{MPa},$$

$$F_{krit} = \sigma_{krit} A = 194{,}07 \cdot 1100 = 213477\ \text{N}.$$

c) A kihajlási görbe:



$$\sigma_{krit}(\lambda) = \begin{cases} R_{p0,2} - \dfrac{R_{p0,2} - R_A}{\lambda_A}\lambda, & ha \quad \lambda \le \lambda_A, \\ \pi^2 \dfrac{E}{\lambda^2}, & ha \quad \lambda \ge \lambda_A. \end{cases}$$

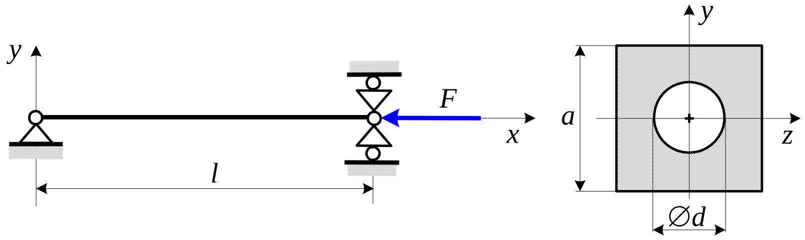
.

d) A rúd ellenőrzése kihajlásra, ha $F = 100\ \text{kN}$:

$F_{\max} = F = 100\ \text{kN}$, $F_{kr\,meg} = \dfrac{F_{krit}}{n_{kr}} = \dfrac{213,477}{1,5} = 142,3\ \text{kN}$,

$F_{\max} < F_{kr\,meg} \quad \Rightarrow$ A rúd kihajlásra megfelel!

7.3. Csuklós/görgős megtámasztású karcsú nyomott rúd kihajlása:



Adott:

$l = 1{,}13\ \mathrm{m}$, $F = 13\ \mathrm{kN}$,

$E = 2{,}1\ \mathrm{MPa}$, $d = 10\ \mathrm{mm}$,

$a = 20\ \mathrm{mm}$, $R_{p0,2} = 280\ \mathrm{MPa}$,

$R_A = 240\ \mathrm{MPa}$, $n_{kr} = 2$

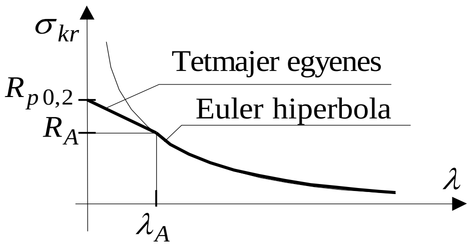
Feladat:

a) A kihajlási határgörbe megrajzolása a jellemző metszékek feltüntetésével.

b) A rúd ellenőrzése kihajlásra.

Megoldás:

a) A kihajlási határgörbe megrajzolása a jellemző metszékek feltüntetésével:



Ha $\lambda > \lambda_A$, akkor: $\sigma_{krit} = \pi^2 \dfrac{E}{\lambda^2}$.

Ha $\lambda < \lambda_A$, akkor:

$$\sigma_{krit} = -\frac{R_{p0,2} - R_A}{\lambda_A}\lambda + R_{p0,2}.$$

b) A rúd ellenőrzése kihajlásra:

$$R_A = \pi^2 \frac{E}{\lambda_A^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_A = \pi\sqrt{\frac{E}{R_A}} = \pi\sqrt{\frac{2{,}1\cdot 10^5}{240}} = 92{,}93.$$

$$A = \left(a^2 - \frac{d^2\,\pi}{4}\right) = \left(20^2 - \frac{10^2\,\pi}{4}\right) = 321{,}46\ \mathrm{mm}^2.$$

$$I_{min} = I_z = I_y = \left(\frac{a^4}{12} - \frac{d^4\,\pi}{64}\right) = \left(\frac{20^4}{12} - \frac{10^4\,\pi}{64}\right) = 12842\ \mathrm{mm}^4.$$

$$i_{min} = i_z = i_y = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{12842}{321{,}46}} = 6{,}32\ \mathrm{mm}.$$

$$\beta = 1, \quad l_0 = \beta\, l = 1\cdot 1100 = 1100\ \mathrm{mm}, \qquad \lambda = \frac{l_0}{i_{min}} = \frac{1100}{6{,}32} = 174.$$

$\lambda \geq \lambda_A$ $(174 > 92{,}93)$ $\Rightarrow$ A σ_{kr} meghatározására az *Euler* összefüggést kell alkalmazni.

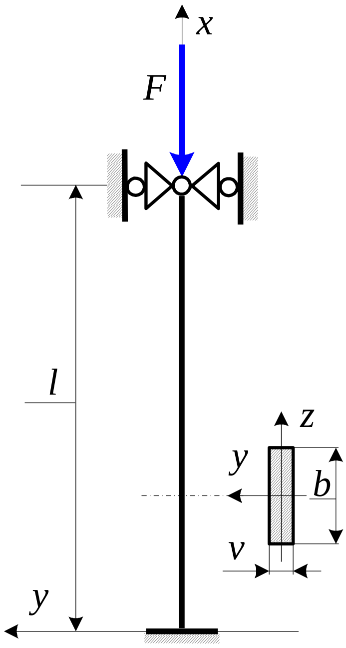
A tényleges feszültség: $\sigma_x = \dfrac{F}{A} = \dfrac{13000}{321{,}46} = 40{,}44$ MPa.

A kritikus feszültség: $\sigma_{kr} = \pi^2 \dfrac{E}{\lambda^2} = \pi^2 \dfrac{2{,}1\cdot 10^5}{174^2} = 68{,}46$ MPa.

A rúd megfelel, ha $\sigma_x = 40{,}44\ \mathrm{MPa} \leq \sigma_{kr\ meg} = \dfrac{\sigma_{kr}}{n_{kr}} = \dfrac{68{,}46}{2} = 34{,}23$ MPa.

Itt $\sigma_x < \dfrac{\sigma_{kr}}{n_{kr}}$ nem teljesül, tehát a rúd kihajlásra nem felel meg!

7.4. Befalazott/görgős megtámasztású karcsú nyomott rúd kihajlása:



Adott:

$l = 300$ mm, $E = 200$ GPa, $v = 1{,}5$ mm, $b = 30$ mm,
$R_{p\,0,2} = 400$ MPa, $R_A = 300$ MPa.

Feladat:

a) A keresztmetszeti jellemzők meghatározása mindkét keresztmetszetre.

b) Ellenőrzés kihajlásra mindkét keresztmetszetre.

Megoldás:

a) A rúd keresztmetszeti jellemzőinek meghatározása:

$A = b\,v = 30 \cdot 1{,}5 = 45$ mm^2,

$$I_z = \frac{b\,v^3}{12} = \frac{30 \cdot 1{,}5^3}{12} = 8{,}44\ \text{mm}^4, \quad I_y = \frac{v\,b^3}{12} = \frac{1{,}5 \cdot 30^3}{12} = 3375\ \text{mm}^4.$$

Az *y* és *z* tengelyek tehetetlenségi főtengelyek $I_y = I_1$,

$I_z = I_2$, azaz $I_{min} = min(I_z; I_y) = 8{,}44$ mm^4,

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{8{,}44}{45}} = 0{,}433$$ mm legkisebb inerciasugár.

b) A kritikus erő meghatározása:

$$R_A = \pi^2 \frac{E}{\lambda_A^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_A = \pi\sqrt{\frac{E}{R_A}} = \pi\sqrt{\frac{2{,}0 \cdot 10^5}{300}} = 81{,}1.$$

$$\beta = 0{,}7; \quad l_0 = \beta\, l = 0{,}7 \cdot 300 = 210\ \text{mm}, \lambda = \frac{l_0}{i_{min}} = \frac{210}{0{,}433} = 485.$$

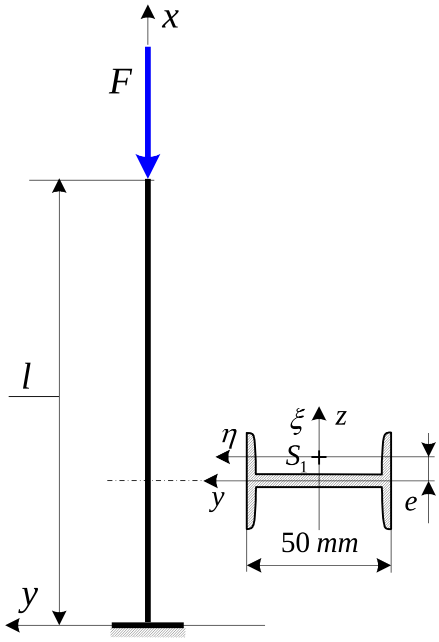
$$\lambda > \lambda_A \quad (485 > 81{,}1) \quad \Rightarrow$$

A σ_{kr} meghatározására az *Euler* összefüggést kell alkalmazni.

$$\sigma_{kr} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} = \pi^2 \frac{2{,}0 \cdot 10^5}{484{,}99^2} = 8{,}39\ \text{MPa},$$

$$F_{kr} = A\,\sigma_{kr} = 45 \cdot 8{,}39 = 377{,}55\ \text{N}.$$

7.5. Befalazott karcsú nyomott rúd kihajlása:



Adott:

A rúd keresztmetszete két darab összehegesztett U50-es szelvényből áll. Egy U50-es szelvény adatai (lásd az ábrát is):

$A' = 710\,\text{mm}^2$, $e = 13{,}7\,\text{mm}$,

$I'_\varsigma = 26 \cdot 10^4\,\text{mm}^4$,

$I'_\eta = 9{,}1 \cdot 10^4\,\text{mm}^4$.

További adatok:

$F = 40\,\text{kN}$, $R_{p\,0,2} = 300\,\text{MPa}$,

$R_A = 200\,\text{MPa}$,

$n_{kr} = 2$, $l = 2\,\text{m}$, $E = 2 \cdot 10^5\,\text{MPa}$.

Feladat: a) A rúd keresztmetszeti jellemzőinek a meghatározása.
b) Ellenőrzés kihajlásra.

Megoldás:

Euler: $\sigma_{krit} = \pi^2 \dfrac{E}{\lambda^2}$; Tetmajer: $\sigma_{krit} = -\dfrac{R_{p0,2} - R_A}{\lambda_A}\lambda + R_{p0,2}$.

a) A teljes keresztmetszet jellemzői:

$A = 2A' = 1420\ \text{mm}^2$, $I_z = 2I'_\varsigma = 52 \cdot 10^4\ \text{mm}^4$,

$$I_y = 2\left(I_\eta + e^2 A'\right) = 2\left(9{,}1\cdot 10^4 + 13{,}7^2 \cdot 710\right) = 44{,}85 \cdot 10^4\ \text{mm}^4,$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{44{,}85\cdot 10^4}{1420}} = 17{,}77\ \text{mm}, \qquad \Rightarrow I_{min} = 44{,}85\cdot 10^4\ \text{mm}^4,\ i_{min} = 17{,}77\,\text{mm}.$$

b) Ellenőrzés kihajlásra:

$$l_0 = \beta \cdot l = 2 \cdot 2000 = 4000\,\text{mm}, \quad \lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = 225.$$

$$R_A = \pi^2 \frac{E}{\lambda_A^2} \quad \Rightarrow \lambda_A = \pi\sqrt{\frac{E}{R_A}} = 3{,}14\sqrt{\frac{2\cdot 10^5}{200}} = 99{,}34,$$

$\lambda > \lambda_A$ $(225{,}23 > 99{,}35)$ $\Rightarrow$ Az *Euler* összefüggést kell alkalmazni.

$$\sigma_{kr} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} = 3{,}14^2 \frac{2\cdot 1^5}{225^2} = 38{,}99\,\text{MPa}, \qquad \sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{40\cdot 10^3}{1420} = 28{,}17\,\text{MPa}.$$

A rúd kihajlásra nem felel meg, hiszen $\sigma_x \le \sigma_{krmeg} = \dfrac{\sigma_{kr}}{n_{kr}}$ nem teljesül $\left(28{,}17 > \dfrac{38{,}99}{2} = 19{,}5\right)$.