

ALKALMAZOTT
MECHANIKA

Elméleti kérdések és válaszok
MSc képzésben résztvevő mérnök hallgatók számára

(1) *Mi a mechanika tárgya?*

Anyagi rendszerek (testek) helyzetváltoztatással járó mozgásainak és az ezeket létrehozó hatásoknak (erőknek) a vizsgálata.

A helyzetváltozást általánosan értelmezzük: magában foglalja testek nyugalmi állapotát és alakváltozását is.

(2) *Adja meg általánosan a mechanikai test modell definícióját!*

Olyan idealizált test, vagy testekből álló rendszer, amelynek a vizsgálat szempontjából lényeges tulajdonságait megtartjuk, a többi tulajdonságát pedig elhanyagoljuk.

(3) *Definiálja a merev test és a szilárd test fogalmát!*

Merev test: Olyan test modell, amelyben bármely két pont távolsága állandó.

A test pontjainak távolsága terhelés hatására sem változik meg.

Szilárd test: Olyan test-modell, amely alakváltozásra képes.

A test pontjainak távolsága terhelés hatására megváltozik.

(4) *Definiálja anyagi pont és anyagi pontrendszer fogalmát!*

Anyagi pont: 1. def.: Anyagi tulajdonságokkal rendelkező geometriai pont.

2. def.: Olyan test modell (merev test), amelynek helyzete egyetlen pontjának helyzetével egyértelműen megadható.

Anyagi pontrendszer: Anyagi pontok halmaza (összessége).

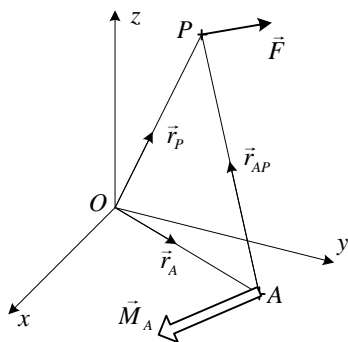
(5) *Mi az erő (koncentrált erő) és az erőrendszer?*

Az erő egy testnek egy másik testre gyakorolt hatása.

A koncentrált erő testek pontszerű érintkezése esetén jön létre.

Az erőrendszer valamely szempontból kapcsolatban álló – pl. ugyanarra a testre ható – erők halmaza (összessége).

(6) *Mi a pontra számított nyomaték? Definiálja koncentrált erő adott pontra számított nyomatékát! A definícióhoz készítsen magyarázó ábrát!*



A pontra számított nyomaték az erőnek az adott pont körüli forgató hatása. A pontra számított nyomaték vektor mennyiség.

Az \vec{F} erő A pontra számított nyomatéka:

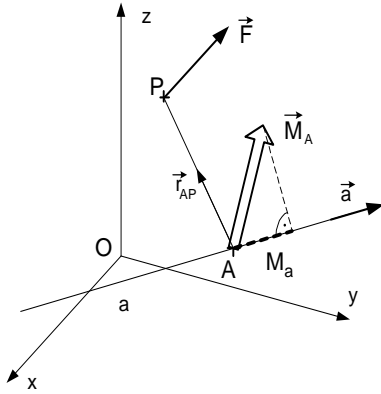
$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AP} \times \vec{F}, \text{ ahol}$$

– \vec{M}_A az \vec{F} erő A pontra számított nyomatéka,

– \vec{r}_{AP} az A pontból a P pontba mutató helyvektor és

– P a koncentrált erő támadáspontja.

- (7) *Mi a tengelyre számított nyomaték? Értelmezze koncentrált erő tengelyre számított nyomatékát! Az értelmezéshez készítsen magyarázó ábrát!*



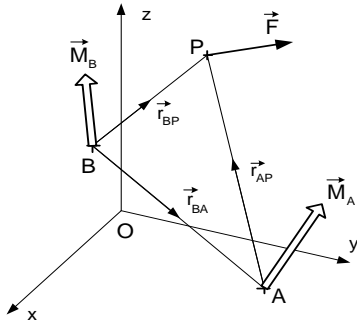
A tengelyre számított nyomaték az erőnek az adott tengely körüli forgató hatása. A tengelyre számított nyomaték skalár mennyiség.

Az \vec{F} erő a tengelyre számított nyomatéka:

$$M_a = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_a, \text{ ahol}$$

- M_a az \vec{F} erő a tengelyre számított nyomatéka,
- $\vec{e}_a = \vec{a}/|\vec{a}|$ az a tengely irány egységvektora és
- \vec{M}_A az erőnek az a tengely A pontjára számított nyomatéka: $\vec{M}_A = \vec{r}_{AP} \times \vec{F}$.

- (8) *Adja meg az összefüggést egy erő két pontra számított nyomatéka között! Az értelmezéshez készítsen magyarázó ábrát!*



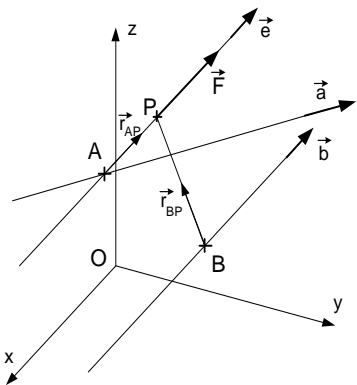
$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{r}_{BA} \times \vec{F},$$

vagy

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{F} \times \vec{r}_{AB},$$

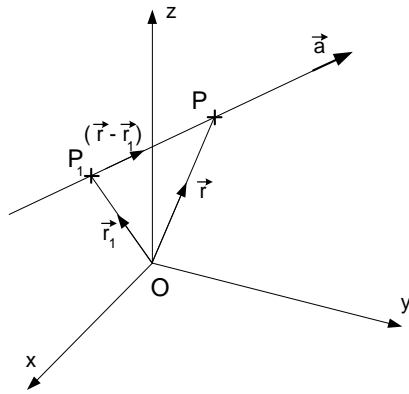
ahol A és B a tér két tetszőleges pontja.

- (9) *Mely geometriai alakzatokra nem ad az \vec{F} erő nyomatékot? Állításait igazolja! A bizonyításokhoz készítsen magyarázó ábrát!*



- Az erő hatásvonalán levő pontokra.
Bizonyítás: $\vec{M}_A = \vec{r}_{AP} \times \vec{F} = \vec{0}$, mert $\vec{r}_{AP} \parallel \vec{F}$.
- Az erő hatásvonalát metsző a tengelyre.
Bizonyítás: $M_a = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_a = 0$, mert $\vec{M}_A = \vec{0}$.
- Az erő hatásvonalával párhuzamos b tengelyre.
Bizonyítás: $M_b = \vec{M}_B \cdot \vec{e}_b = 0$, mert \vec{M}_B merőleges $\vec{e}_b = \vec{b}/|\vec{b}|$ -re, a b tengely irány egységvektorára és \vec{e}_b párhuzamos \vec{e} -vel, az \vec{F} erő irány egységvektorával.

- (10) *Magyarázó ábrával vezesse le a tengely egyenletének Plücker-vektoros alakját! Adja meg az egyenletben szereplő mennyiségek jelentését!*



$$\vec{a} \parallel (\vec{r} - \vec{r}_1), \text{ ezért}$$

$$\vec{a} \times (\vec{r} - \vec{r}_1) = \vec{0},$$

$$\vec{a} \times \vec{r} - \vec{a} \times \vec{r}_1 = \vec{0}.$$

$$\text{Jelölés: } \vec{b} = -\vec{a} \times \vec{r}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{a}.$$

$$\text{A tengely egyenlete: } \vec{a} \times \vec{r} + \vec{b} = \vec{0}, \quad \text{ahol}$$

- \vec{a} a tengely irányvektora és

- \vec{b} az \vec{a} irányvektor O pontra számított nyomatéka.

(11) *Értelmezze általános (szétszórt) erőrendszer redukált (eredő) vektorkettőssét!*

$$\text{Eredő erővektor: } \vec{F}(A) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

$$\text{Eredő nyomatékvektor: } \vec{M}_A = \sum_{i=1}^n (\vec{M}_i + \vec{r}_{AP_i} \times \vec{F}_i)$$

ahol: n – az erőrendszer alkotó koncentrált erők / koncentrált nyomatékok száma,

A – a tér adott pontja,

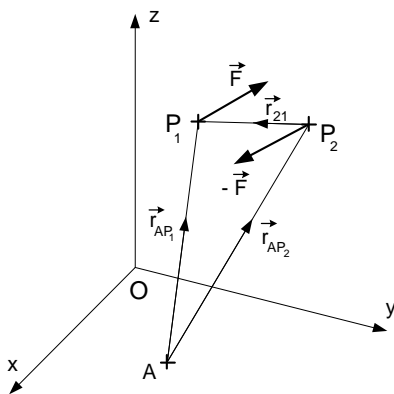
\vec{F}_i – az erőrendszer i jelű koncentrált erővektora,

\vec{M}_i – az erőrendszer i jelű koncentrált nyomatékvektora,

\vec{r}_{AP_i} – az A pontból az erő támadáspontjába mutató helyvektor.

A redukált vektorkettős nyomatéki tér vonatkozásában egyértelműen jellemzi az erőrendszert.

(12) *Adja meg erőpár (koncentrált nyomaték) értelmezését, kiszámítását és legfontosabb tulajdonságát! Készítsen magyarázó ábrát!*



Értelmezés: Olyan speciális erőrendszer, amely két, azonos nagyságú, ellentétes irányú és párhuzamos hatásvonalú erőből áll.

Kiszámítás:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AP_1} \times \vec{F} - \vec{r}_{AP_2} \times \vec{F} = (\vec{r}_{AP_1} - \vec{r}_{AP_2}) \times \vec{F},$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{21} \times \vec{F} = \vec{M}_B.$$

Tulajdonság: Erőpár nyomatéka a tér bármely pontjára ugyanannyi.

Erőpár homogén nyomatéki vektorteret hoz létre.

(13) *Értelmezze két erőrendszer egyenértékűségét!*

Két erőrendszer egymással egyenértékű, ha azonos nyomatéki vektorteret hoznak létre.

$$\text{Jelölés: } (E') \stackrel{M}{=} (E'')$$

Az $\stackrel{M}{=}$ jel arra utal, hogy az egyenlőség a nyomatéki tér vonatkozásában áll fenn.

(14) *Adja meg két erőrendszer egyenértékűségének kritériumait!*

1. kritérium:

$$\vec{F}' = \vec{F}'',$$

$$\vec{M}'_A = \vec{M}''_A,$$

ahol

A a tér tetszőleges, rögzített pontja.

2. kritérium:

$$\vec{M}'_A = \vec{M}''_A,$$

$$\vec{M}'_B = \vec{M}''_B,$$

$$\vec{M}'_C = \vec{M}''_C,$$

ahol

A, B, C három, nem egy egyenesre eső pont.

3. kritérium:

$$M'_i = M''_i,$$

ahol

$i = 1, 2, \dots, 6$ egymástól lineárisan független tengely.

(15) *Adja meg az egyensúlyi erőrendszer értelmezését!*

Egy erőrendszer akkor egyensúlyi, ha zérus nyomatóéki vektorteret hoz létre.

Jelölés: $(E) \stackrel{M}{=} (0)$

Az $\stackrel{M}{=}$ jel arra utal, hogy az egyenlőség a nyomatóéki tér vonatkozásában áll fenn.

(16) *Adja meg egy erőrendszer egyensúlyának kritériumait!*

1. kritérium:

$$\vec{F} = \vec{0},$$

$$\vec{M}_A = \vec{0},$$

ahol

A a tér tetszőleges, rögzített pontja.

2. kritérium:

$$\vec{M}_A = \vec{0},$$

$$\vec{M}_B = \vec{0},$$

$$\vec{M}_C = \vec{0},$$

ahol

A, B, C három, nem egy egyenesre eső pont.

3. kritérium:

$$M_i = 0,$$

ahol

$i = 1, 2, \dots, 6$ egymástól lineárisan független tengely.

(17) *Adja meg tengelyek lineáris függetlenségének feltételét!*

Az $\vec{a}_i \times \vec{r} + \vec{b}_i = \vec{0}$, $i = 1, 2, \dots, 6$ tengelyek lineárisan függetlenek, ha az \vec{a}_i és \vec{b}_i Plücker vektoraik koordinátáiból felírt determináns nem nulla:

$$\det \begin{vmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} & a_{4x} & a_{5x} & a_{6x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} & a_{4y} & a_{5y} & a_{6y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} & a_{4z} & a_{5z} & a_{6z} \\ b_{1x} & b_{2x} & b_{3x} & b_{4x} & b_{5x} & b_{6x} \\ b_{1y} & b_{2y} & b_{3y} & b_{4y} & b_{5y} & b_{6y} \\ b_{1z} & b_{2z} & b_{3z} & b_{4z} & b_{5z} & b_{6z} \end{vmatrix} \neq 0.$$

(18) *Ismertesse a statika főtételét (merev testekből álló rendszer tartós nyugalomban maradásának szükséges feltételét)!*

Egy merev testekből álló rendszer csak akkor lehet tartós nyugalomban, ha a rá ható külső erőrendszer egyensúlyi.

(19) *Ismertesse a merev testekből álló rendszer tartós nyugalomban maradásának elégséges feltételét!*

Egy merev testekből álló rendszer tartós nyugalomban maradásának az az elégséges feltétele, hogy a rendszer megtámasztása ne tegy lehetővé a rendszer merevtestszerű mozgását.

(20) *Mi a statika feladata?*

A statika feladata merev testekből álló rendszerek esetén a támasztóerők és a belső erők meghatározása statikai egyensúlyi egyenletek felhasználásával.

(21) *A mechanikában milyen testeket tekintünk rúdnak? Mi a rúd mechanikai modellje?*

A mechanikában rúdnak olyan testet tekintünk, amelynek egyik mérete lényegesen nagyobb, mint a másik kettő.

A rúd mechanikai modellje a rúd középvonala (súlyponti szála), amelyhez a rúd mechanikai viselkedésére jellemző mennyiségeket kötünk.

(22) *Adja meg a rúd keresztmetszetének és középvonalának definícióját! Milyen feltételek teljesülése esetén beszélünk prizmatikus rúdról?*

A keresztmetszet a rúd legnagyobb méretére merőleges metszet. A rúd középvonala a keresztmetszetek súlypontjai által meghatározott vonal. Egy rúd akkor prizmatikus, ha keresztmetszetei azonos alakúak és azonos térbeli elhelyezkedésűek.

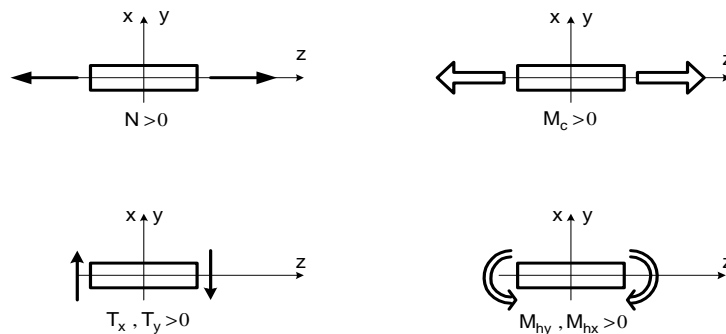
(23) *Értelmezze rúd igénybevételét! Adja meg a rúd + z normálisú keresztmetszetében az \vec{F}_S és \vec{M}_S eredő vektorkettőst!*

Az igénybevételek a rúd keresztmetszetén megoszló belső erőrendszer súlypontba redukált eredő vektorkettősének skaláris koordinátái.

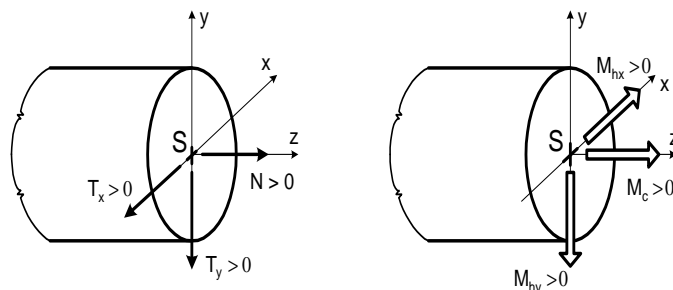
$$\vec{F}_S = -T_x \vec{e}_x - T_y \vec{e}_y + N \vec{e}_z,$$

$$\vec{M}_S = M_{hx} \vec{e}_x - M_{hy} \vec{e}_y + M_c \vec{e}_z.$$

(24) *Szemléltesse síkbeli ábrákon az igénybevételek előjelének értelmezését!*



(25) *Szemléltesse térbeli ábrákon az igénybevételek előjelének értelmezését!*



(26) Írja fel az yz síkban terhelt egyenes rúd egyensúlyi egyenleteit differenciális alakban!

$$\frac{dT_y}{dz} = f_y(z), \quad \frac{dM_{hx}}{dz} = -T_y(z),$$

ahol $f_y(z)$ a megoszló terhelés sűrűsége,
 $T_y(z)$ a nyíróerő és
 $M_{hx}(z)$ a hajlítónyomaték.

(27) Írja fel az yz síkban terhelt egyenes rúd egyensúlyi egyenleteit integrál alakban!

$$T_y(z) - T_{y0} = \int_{z_0}^z f_y(\zeta) d\zeta, \quad M_{hx}(z) - M_{hx0} = - \int_{z_0}^z T_y(\zeta) d\zeta,$$

ahol $f_y(z)$ a megoszló terhelés sűrűsége,
 $T_y(z)$ és T_{y0} a nyíróerő a z , illetve a z_0 pontban,
 $M_{hx}(z)$ és M_{hx0} a hajlítónyomaték a z , illetve a z_0 pontban.

(28) Adja meg a tenzor értelmezését és tulajdonságait!

Értelmezés: A tenzor homogén, lineáris, vektor-vektor függvény által megvalósított leképezés (hozzárendelés): $\vec{w} = f(\vec{v}) = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{v}$.

Tulajdonságok: a) $f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$, ahol λ tetszőleges skaláris együttható,
 b) $f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$.

A fentiekkel ekvivalens: $\vec{w} = f(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2) = \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \lambda_2 f(\vec{v}_2) = \lambda_1\vec{w}_1 + \lambda_2\vec{w}_2$,
 ahol λ_1 és λ_2 tetszőleges skaláris együtthatók.

Következmény: $\vec{0} = f(\vec{0})$, azaz, ha $\vec{v} = \vec{0}$, akkor $\vec{w} = \vec{0}$.

(29) Adja meg a $\underline{\underline{T}}$ tenzor és a $\underline{\underline{T}}^T$ transzponált tenzor diadikus értelmezését derékszögű descartesi koordináta-rendszerben!

Tenzor: $\underline{\underline{T}} = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y + \vec{c} \circ \vec{e}_z)$,

Transzponált tenzor: $\underline{\underline{T}}^T = (\vec{e}_x \circ \vec{a} + \vec{e}_y \circ \vec{b} + \vec{e}_z \circ \vec{c})$,

ahol \vec{a} az \vec{e}_x , \vec{b} az \vec{e}_y és \vec{c} az \vec{e}_z vektorok képvektorai.

(30) Adja meg a szimmetrikus és a ferdeszimmetrikus tenzor értelmezését!

Szimmetrikus a tenzor, ha egyenlő a transzponáltjával: $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T$.

Ferdeszimmetrikus a tenzor, ha egyenlő a transzponáltja mínusz egyszeresével
 $\underline{\underline{T}} = -\underline{\underline{T}}^T$.

(31) Ismertesse a tenzorok felbontásának tételét!

Minden tenzor felbontható egy szimmetrikus és egy ferdeszimmetrikus rész összegére:

$$\underline{T} = \underline{T}_{sz} + \underline{T}_{fesz} = \frac{1}{2}(\underline{T} + \underline{T}^T) + \frac{1}{2}(\underline{T} - \underline{T}^T).$$

(32) *Adja meg a mechanikai test modell értelmezését!*

Olyan, idealizált tulajdonságokkal rendelkező test, amely a valóságos testnek a vizsgálat szempontjából leglényegesebb tulajdonságait tükrözi.

A test lényegesnek tartott tulajdonságait megtartjuk, a lényegtelennek ítélt tulajdonságokat pedig elhanyagoljuk.

(33) *Mi a szilárdságtan?*

A terhelés előtt és terhelés után is tartós nyugalomban levő, alakváltozásra képes testek kinematikája, dinamikája és anyagszerkezeti viselkedése.

(34) *Definiálja az alakváltozás fogalmát!*

Alakváltozásról beszélünk, ha terhelés hatására a test pontjai egymáshoz képest elmozdulnak és anyagi geometriai alakzatai (pl. hossz, szög, felület, térfogat) megváltoznak.

(35) *Milyen esetben beszélünk rugalmas, illetve képlékeny alakváltozásról?*

Rugalmas az alakváltozás, ha a terhelés hatására alakváltozott test a terhelés megszüntetése (a tehermentesítés) után visszanyeri eredeti alakját.

Képlékeny az alakváltozás, ha a terhelés hatására alakváltozott test a tehermentesítés után nem nyeri vissza eredeti alakját.

(36) *Adja meg a kis elmozdulások és a kis alakváltozások értelmezését!*

Kis elmozdulás esetén a test pontjainak elmozdulása nagyságrendekkel kisebb a test jellemző geometriai méreteinél.

Kis alakváltozások esetén a test alakváltozását jellemző mennyiségek lényegesen kisebbek, mint egy: $\varepsilon \ll 1$, $\gamma \ll 1$.

(37) *Adja meg az alakváltozási jellemzők értelmezését!*

a) ε_x , ε_y , ε_z - fajlagos nyúlások.

Pl. az ε_x az egységnyi, x irányú hosszak a terhelés hatására bekövetkező megváltozása.

Az ε_x akkor pozitív, ha az egységnyi hossz a terhelés hatására megnövekszik.

b) $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$, $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$ - fajlagos szögtorzulások.

Pl. az γ_{xy} az egymással 90° -os szöget bezáró x és y irányok szögének a terhelés hatására bekövetkező megváltozása.

Az γ_{xy} akkor pozitív, ha a 90° -os szög a terhelés hatására csökken.

(38) Adja meg az alakváltozási tenzor definícióját diadikus alakban és írja fel az alakváltozási tenzor mátrixát derékszögű descartesi koordináta-rendszerben!

a) Az alakváltozási tenzor diadikus alakban: $\underline{\underline{A}} = (\vec{\alpha}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\alpha}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\alpha}_z \circ \vec{e}_z)$,

ahol az alakváltozási vektorok az alábbi alakúak:

$$\vec{\alpha}_x = \varepsilon_x \vec{e}_x + \frac{1}{2} \gamma_{yx} \vec{e}_y + \frac{1}{2} \gamma_{zx} \vec{e}_z,$$

$$\vec{\alpha}_y = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \vec{e}_x + \varepsilon_y \vec{e}_y + \frac{1}{2} \gamma_{zy} \vec{e}_z,$$

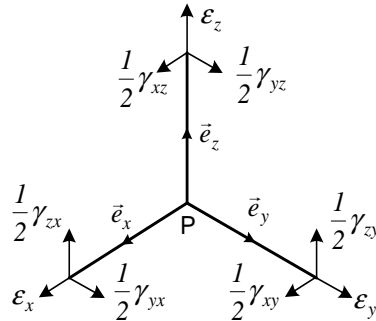
$$\vec{\alpha}_z = \frac{1}{2} \gamma_{xz} \vec{e}_x + \frac{1}{2} \gamma_{yz} \vec{e}_y + \varepsilon_z \vec{e}_z$$

és \circ a diadikus szorzás jele.

b) Az alakváltozási tenzor mátrixa:

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

(39) Szemléltesse az alakváltozási tenzort az elemi triéderen!



(40) Hogyan számíthatók az alakváltozási tenzorból az adott \vec{n} és \vec{m} ($\vec{n} \cdot \vec{m} = 0$) egységvektorokkal megadott irányokhoz tartozó fajlagos nyúlások és szögtorzulások?

A fajlagos nyúlások számítása: $\varepsilon_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{n}$, $\varepsilon_m = \vec{m} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{m}$.

A fajlagos szögtorzulások számítása: $\frac{1}{2} \gamma_{nm} = \frac{1}{2} \gamma_{mn} = \vec{n} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{m} = \vec{m} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{n}$.

Az összefüggésekben \cdot a skaláris szorzás jele.

(41) Adja meg az alakváltozási főtengelek és főnyúlások értelmezését!

Ha $\vec{\alpha}_e = \varepsilon_e \vec{e}$ és minden $\vec{m} \perp \vec{e}$ -re fennáll, hogy $\gamma_{me} = 2 \vec{m} \cdot \vec{\alpha}_e = 0$, akkor \vec{e} alakváltozási főtengelek (alakváltozási főirány) és ε_e főnyúlás.

Megjegyzések:

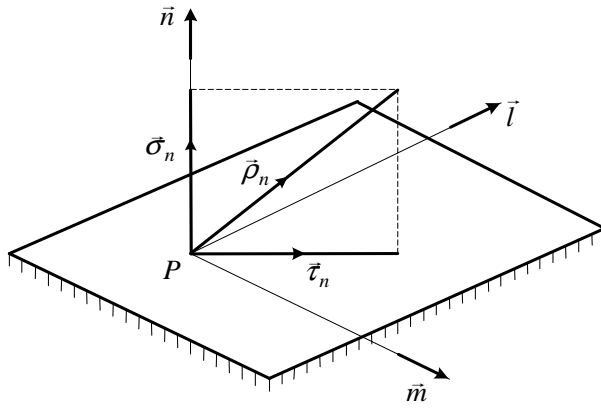
- Az ε_e is lehet zérus ($\vec{\alpha}_e = \vec{0}$),

- Minden P pontban létezik legalább három főirány, amelyek kölcsönösen merőlegesek egymásra.

(42) Mi a feszültség?

A feszültségvektor a testben terhelés hatására fellépő, felület mentén megoszló belső erőrendszer sűrűségvektora.

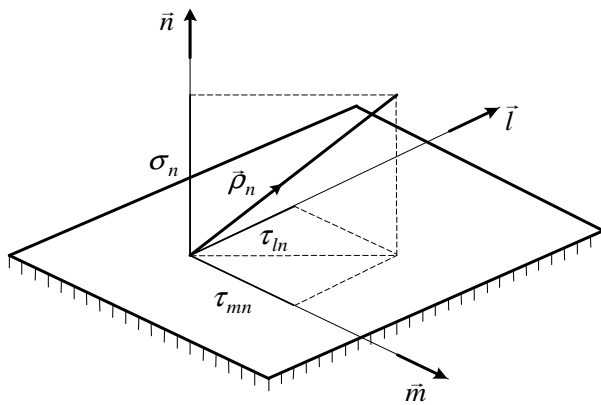
(43) Hogyan számíthatók ki a feszültségvektor összetevői? Az összetevőkre bontást ábrán is szemléltesse!



A normál feszültségi összetevő:
 $\vec{\sigma}_n = \sigma_n \vec{n} = (\vec{n} \cdot \vec{\varrho}_n) \cdot \vec{n}$.

A csúsztató feszültségi összetevő:
 $\vec{\tau}_n = \vec{\varrho}_n - \sigma_n \vec{n} = (\vec{n} \times \vec{\varrho}_n) \times \vec{n}$.

- (44) *Hogyan számíthatók ki a feszültségvektor koordinátái? A koordinátákra bontást ábrán is szemléltesse!*



A normál feszültség koordinátája:
 $\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\sigma}_n = (\vec{n} \cdot \vec{\varrho}_n)$.

A csúsztató feszültségi koordináták:
 $\tau_{mn} = \vec{m} \cdot \vec{\varrho}_n = \vec{m} \cdot \vec{\tau}_n$,
 $\tau_{ln} = \vec{l} \cdot \vec{\varrho}_n = \vec{l} \cdot \vec{\tau}_n$.

- (45) *Adja meg a feszültségi tenzor definícióját diadikus alakban és írja fel a feszültségi tenzor mátrixát derékszögű descartesi koordináta-rendszerben!*

a) A feszültségi tenzor diadikus alakban: $\underline{\underline{F}} = (\vec{\varrho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\varrho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\varrho}_z \circ \vec{e}_z)$,

ahol a feszültségi vektorok az alábbi alakúak:

$$\vec{\varrho}_x = \sigma_x \vec{e}_x + \tau_{yx} \vec{e}_y + \tau_{zx} \vec{e}_z,$$

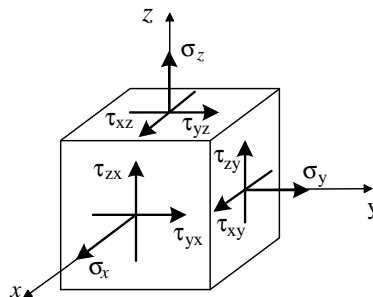
$$\vec{\varrho}_y = \tau_{xy} \vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y + \tau_{zy} \vec{e}_z,$$

$$\vec{\varrho}_z = \tau_{xz} \vec{e}_x + \tau_{yz} \vec{e}_y + \sigma_z \vec{e}_z.$$

b) A feszültségi tenzor mátrixa:

$$[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

- (46) *Szemléltesse a feszültségi tenzort az elemi kockán!*



- (47) *Hogyan számíthatók a feszültségi tenzorból az adott \vec{n} normálisú síkon fellépő σ_n és τ_{mn} feszültség koordináták?*

A normál feszültségi koordináta: $\sigma_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{\varrho}}_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n}$.

A csúsztató feszültségi koordináta: $\tau_{mn} = \tau_{nm} = \vec{m} \cdot \underline{\underline{\varrho}}_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \vec{m} = \vec{m} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n}$.

Az összefüggésekben \cdot a skaláris szorzás jele.

- (48) *Adja meg a feszültségi főirányok és főfeszültségek értelmezését!*

Ha az \vec{e} egységvektorra \perp elemi felületen $\vec{\tau}_e = \vec{0}$ és ebből következően $\underline{\underline{\varrho}}_e = \sigma_e \vec{e}$, akkor az \vec{e} feszültségi főtengety (feszültségi főirány) és σ_e főfeszültség, valamint az \vec{e} -re \perp elemi felület síkja főfeszültségi sík.

Megjegyzések:

- A σ_e is lehet zérus ($\underline{\underline{\varrho}}_e = \vec{0}$).

- Minden P pontban létezik legalább három főirány, amelyek kölcsönösen merőlegesek egymásra.

- (49) *Milyen esetben beszélünk prizmatikus rúdról?*

1. definíció: Prizmatikus rúdról abban az esetben beszélünk, ha a rúd keresztmetszeteinek az alakja és térbeli elhelyezkedése a rúd hossza mentén nem változik.
2. definíció: Prizmatikus az az egyenes középvonalú rúd, amelynek keresztmetszetei állandó alakúak és a középvonal mentén párhuzamos eltolással egymásba tolhatók.

- (50) *Adja meg a homogén, izotróp, lineárisan rugalmas test (anyag) definícióját!*

Homogén: Az anyagi tulajdonságok a test minden pontjában azonosak.

Izotróp: Az anyagi tulajdonságok nem függenek az iránytól.

Lineárisan rugalmas: Ha a feszültségek és az alakváltozási jellemzők között lineáris függvénykapcsolat áll fenn.

- (51) *Írja fel az egyszerű Hooke törvényt húzás-nyomásra!*

$$\sigma_z = E\varepsilon_z \quad \text{és} \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_k = -\nu\varepsilon_z.$$

- ahol: - σ_z a középvonal irányú normálfeszültség,
 - ε_z a középvonal irányú fajlagos nyúlás,
 - $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_k$ a keresztirányú fajlagos nyúlás,
 - E a (Young-féle) rugalmassági modulus,
 - ν a Poisson tényező.

- (52) *Fogalmazza meg általánosan a szilárdságtani méretezés feladatát rúdszerkezetek esetén!*

Adott: A rúd anyaga és terhelése (igénybevételei).

Feladat: A rúd keresztmetszeti méreteinek meghatározása úgy, hogy a rúd az adott terhelést kellő (megfelelő) biztonsággal elviselje.

- (53) *Fogalmazza meg általánosan a szilárdságtani ellenőrzés feladatát rúdszerkezetek esetén!*

Adott: a rúd anyaga, keresztmetszetének méretei és terhelése (igénybevételei).

Feladat: Annak eldöntése, hogy a rúd az adott terhelést kellő (megfelelő) biztonsággal elviseli-e.

- (54) Írja fel a P ponti feszültségi tenzort és adja meg a benne szereplő feszültség koordináták, valamint az l hosszúságú rúd rugalmas alakváltozási energiájának kiszámítási módját prizmatikus rúd húzás-nyomása esetén!

A feszültségi tenzor mátrixa:

$$[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

A normálfeszültség kiszámítása: $\sigma_z = \frac{N}{A}$,

ahol: N a rúderő és A a keresztmetszet területe.

A rugalmas alakváltozási energia: $U = \frac{1}{2} \frac{N^2}{A E} l$,

ahol: E a rugalmassági modulus.

- (55) Írja fel a P ponti feszültségi tenzort és adja meg a benne szereplő feszültség koordináták, valamint az l hosszúságú rúd rugalmas alakváltozási energiájának kiszámítási módját prizmatikus, kör- és körgyűrű keresztmetszetű rúd csavarása esetén!

A feszültségi tenzor mátrixa $R\varphi z$ henger koordináta-rendszerben:

$$[\underline{\underline{F}}]_{R\varphi z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix}.$$

A csúsztató feszültség kiszámítása: $\tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi} = \frac{M_c}{I_p} R$,

ahol: M_c a csavaró nyomaték, I_p a keresztmetszet poláris másodrendű nyomatéka és R a P pont súlyponttól mért távolsága.

A rugalmas alakváltozási energia: $U = \frac{1}{2} \frac{M_c^2}{I_p G} l$,

ahol: G a csúsztató rugalmassági modulus.

- (56) Adja meg az I_p poláris másodrendű nyomaték értelmezését és kiszámítását kör- és körgyűrű keresztmetszetre!

Értelmezés: $I_p = \int_{(A)} R^2 dA$.

Kiszámítás:

kör keresztmetszetre: $I_p = \frac{d^4 \pi}{32}$, körgyűrű keresztmetszetre $I_p = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{32}$.

- (57) Adja meg prizmatikus rúd tiszta hajlításának az értelmezését és ismertesse a Bernoulli hipotézist!

Tiszta hajlítás: ha a vizsgált rúdszakaszon az igénybevétel kizárólag hajlítónyomaték.

Bernoulli hipotézis: Tiszta hajlítás esetén a rúd deformált keresztmetszetei síkok maradnak, a keresztmetszetek síkjában nem lép fel szögtorzulás és a keresztmetszetek az alakváltozás után is merőlegesek maradnak a rúd alakváltozott S ponti szálára.

(58) Milyen esetben beszélünk egyenes hajlításról és ferde hajlításról?

Egyenes hajlítás: Ha az \vec{M}_S hajlító nyomaték párhuzamos a keresztmetszet valamelyik S ponti tehetetlenségi főtengelyével.

Ferde hajlítás: Ha az \vec{M}_S hajlító nyomaték nem párhuzamos a keresztmetszet egyik S ponti tehetetlenségi főtengelyével sem.

(59) Írja fel a P ponti feszültségi tenzort és adja meg a benne szereplő feszültség koordináták, valamint az l hosszúságú rúd rugalmas alakváltozási energiájának kiszámítási módját prizmatikus rúd tiszta, egyenes hajlítása esetén!

A feszültségi tenzor mátrixa:

$$[\underline{F}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

A normál feszültség kiszámítása: $\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y$,

ahol: - M_{hx} a hajlító nyomaték x irányú koordinátája,

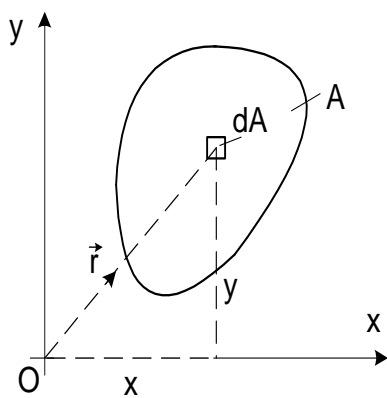
- I_x a keresztmetszet x tengelyre számított másodrendű nyomatéka és

- y a P pont x tengelytől mért előjeles távolsága. (Az x tengely a keresztmetszet S ponti tehetetlenségi főtengelye.)

A rugalmas alakváltozási energia: $U = \frac{1}{2} \frac{M_{hx}^2}{I_x E} l$,

ahol: E a rugalmassági modulus.

(60) Értelmezze keresztmetszet tengelyre, tengelypárra és pontra számított másodrendű (tehetetlenségi) nyomatékát!



Az x és y tengelyekre számított másodrendű nyomatékok:

$$I_x = \int_{(A)} y^2 dA > 0, \quad I_y = \int_{(A)} x^2 dA > 0.$$

Az x, y tengelypárra számított másodrendű nyomaték:

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_{(A)} xy dA = \int_{(A)} yx dA.$$

Az O pontra számított másodrendű nyomaték:

$$I_0 = \int_{(A)} (\vec{r})^2 dA = \int_{(A)} (x^2 + y^2) dA = I_y + I_x > 0$$

(61) Írja fel a keresztmetszet S ponti tehetetlenségi tenzorának mátrixát és adja meg a mátrix elemeinek értelmezését!

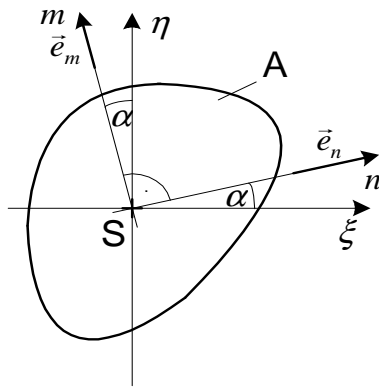
A tehetetlenségi tenzor a keresztmetszet S súlypontjához kötött ξ, η koordináta-rendszerben:

$$\left[\underline{I}_S \right] = \begin{bmatrix} I_\xi & -I_{\xi\eta} \\ -I_{\eta\xi} & I_\eta \end{bmatrix}$$

A tenzor elemeinek értelmezése:

$$I_\xi = \int_{(A)} \eta^2 dA, \quad I_\eta = \int_{(A)} \xi^2 dA, \quad I_{\xi\eta} = \int_{(A)} \xi\eta dA.$$

- (62) Az S ponti ξ, η koordináta-rendszerbeli \underline{I}_S tehetetlenségi tenzor ismeretében hogyan számíthatók ki az S ponti n és m tengelyekre és az n, m tengelypárra számított I_n, I_m, I_{nm} tehetetlenségi nyomatékok?



Az n és m tengelyekre számított másodrendű nyomatékok:

$$I_n = \vec{e}_n \cdot \underline{I}_S \cdot \vec{e}_n, \quad I_m = \vec{e}_m \cdot \underline{I}_S \cdot \vec{e}_m.$$

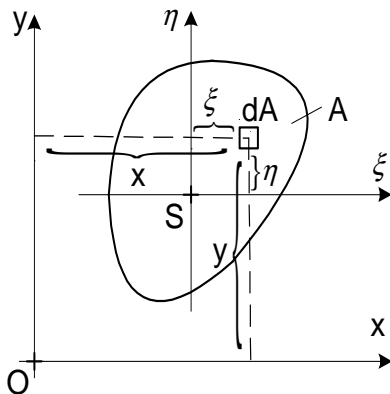
Az n, m tengelypárra számított másodrendű nyomaték:

$$I_{nm} = I_{mn} = -\vec{e}_n \cdot \underline{I}_S \cdot \vec{e}_m = -\vec{e}_m \cdot \underline{I}_S \cdot \vec{e}_n.$$

Az összefüggésekben \vec{e}_n és \vec{e}_m az n és m irányú egységvektorok:

$$\vec{e}_n = \cos \alpha \vec{e}_\xi + \sin \alpha \vec{e}_\eta, \quad \vec{e}_m = -\sin \alpha \vec{e}_\xi + \cos \alpha \vec{e}_\eta.$$

- (63) Írja fel a keresztmetszet tehetetlenségi nyomatékaira vonatkozó Steiner-tételt tenzoriális és skaláris alakban!



A tenzoriális alak:

$$\underline{I}_O = \underline{I}_S + \underline{I}_{OS},$$

$$\text{ahol: } \left[\underline{I}_{OS} \right] = A \begin{bmatrix} y_S^2 & -y_S x_S \\ -x_S y_S & x_S^2 \end{bmatrix}.$$

A skaláris alak:

$$I_x = I_\xi + A y_S^2,$$

$$I_y = I_\eta + A x_S^2,$$

$$I_{xy} = I_{\xi\eta} + A x_S y_S.$$

- (64) Adja meg keresztmetszet tehetlenségi főtengelyeinek és fő tehetlenségi nyomatékainak az értelmezését!

Tehetlenségi főtengely az n és m tengely ($n \perp m$), ha az n, m tengelypárra számított nyomatékok eltűnnek: $I_{nm} = I_{mn} = 0$.

Fő tehetlenségi nyomatékok az n és m tehetlenségi főtengelyekre számított I_n és I_m másodrendű nyomatékok.

- (65) Írja fel a szilárd testre vonatkozó egyensúlyi egyenletet koordináta rendszertől független vektoriális alakban és adja meg a skaláris egyenleteket x, y, z derékszögű descartesi koordináta-rendszerben!

Vektoriális alak: $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$,

ahol: $\underline{\underline{F}}$ a feszültségi tenzor,

∇ a Hamilton-féle differenciál operátor és

\vec{q} a térfogati terhelés sűrűségvektora.

Skaláris egyenletek x, y, z koordináta-rendszerben:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0.$$

- (66) Adja meg a derivált tenzormező és az elmozdulásmező, az alakváltozási tenzormező és az elmozdulásmező, valamint a forgató tenzormező és az elmozdulásmező kapcsolatát koordináta rendszertől független alakban!

A derivált tenzor: $\underline{\underline{D}} = \vec{u} \circ \nabla$,

Az alakváltozási tenzor: $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}(\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u})$,

A forgató tenzor: $\underline{\underline{\Psi}} = \frac{1}{2}(\vec{u} \circ \nabla - \nabla \circ \vec{u})$,

ahol: \vec{u} az elmozdulási vektormező,

∇ a Hamilton-féle differenciál operátor és

\circ a diadikus szorzás jele.

- (67) Írja fel az alakváltozási jellemzők és az elmozdulás-koordináták közötti kapcsolatot skaláris alakban!

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

- (68) Írja fel az általános Hooke törvény izotróp anyagra vonatkozó mindkét tenzoriális alakját és adja meg az egyenletekben szereplő mennyiségek jelentését!

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G}(\underline{\underline{F}} - \frac{\nu F_I}{1 + \nu} \underline{\underline{E}}), \quad \underline{\underline{F}} = 2G(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu A_I}{1 - 2\nu} \underline{\underline{E}}),$$

ahol: $\underline{\underline{A}}$ az alakváltozási tenzor,

$\underline{\underline{F}}$ a feszültségi tenzor,
 $\underline{\underline{E}}$ az egység tenzor,
 G a csúsztató rugalmassági modulus,
 ν a Poisson tényező,
 F_I a feszültségi tenzor első skalár invariánsa és
 A_I az alakváltozási tenzor első skalár invariánsa.

(69) *Vezesse le az E rugalmassági modulus és a G csúsztató rugalmassági modulus közötti kapcsolatot!*

Egytengelyű feszültségi állapot esetén: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z$.

Az egyszerű Hooke törvény: $\sigma_z = E\varepsilon_z$.

Az általános Hooke törvény:
$$\begin{aligned}\sigma_z &= 2G\left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] = \\ &= 2G\left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}(-\nu\varepsilon_z - \nu\varepsilon_z + \varepsilon_z)\right] = \\ &= 2G[\varepsilon_z + \nu\varepsilon_z] = 2G(1 + \nu)\varepsilon_z.\end{aligned}$$

Az egyszerű és az általános Hooke törvényt összevetve: $E = 2G(1 + \nu)$.

(70) *Adja meg a redukált (egyenértékű) feszültség definícióját!*

Olyan feszültség, amely a pontbeli feszültségi állapotot tönkremenetel szempontjából egyértelműen jellemzi.

A redukált feszültség bevezetésével a tetszőleges térbeli feszültségi állapotot egytengelyű feszültségi állapotra vezetjük vissza.

(71) *Hogyan értelmezzük a Coulomb-féle redukált feszültséget?*

$$\sigma_{red}(Coulomb) = \sigma_{max} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_3|),$$

ahol: σ_1 a legnagyobb, σ_3 pedig a legkisebb főfeszültség.

Coulomb szerint a pontbeli feszültségi állapotot károsodás szempontjából a legnagyobb abszolút értékű normál feszültség jellemzi.

(72) *Hogyan értelmezzük a Mohr-féle redukált feszültséget?*

$$\sigma_{red}(Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3,$$

ahol: σ_1 a legnagyobb, σ_3 pedig a legkisebb főfeszültség.

Mohr szerint a pontbeli feszültségi állapotot károsodás szempontjából a legnagyobb Mohr kör átmérője jellemzi.

(73) *Hogyan értelmezzük a Huber-Mises-Hencky-féle redukált feszültséget?*

$$\sigma_{red}(HMH) = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]},$$

vagy

$$\sigma_{red}(HMH) = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]},$$

ahol: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ főfeszültségek,

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ normál feszültségek,

$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ csúsztató feszültségek.

A Huber-Mises-Hencky-féle redukált feszültség négyzete arányos az u_T fajlagos torzulási energiával.

- (74) Adja meg a redukált feszültség számításának módját abban az esetben, amikor egy pontbeli feszültségi állapotot egy normál feszültség és egy (vele azonos síkon fellépő) csúsztató feszültség jellemzi!

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + \beta\tau^2},$$

ahol: Mohr esetében $\beta = 4$ és

Huber-Mises-Hencky esetében $\beta = 3$.

- (75) Adja meg ferde hajlítás esetén a zérusvonal értelmezését és írja fel a zérusvonal egyenletét!

Zérusvonal: A keresztmetszet azon pontjai, ahol $\sigma_z = 0$.

A zérusvonal egyenlete:

$$\sigma_z = 0 = \frac{M_{hx}}{I_x}y + \frac{M_{hy}}{I_y}x, \quad \text{vagy} \quad y = -\frac{M_{hy}}{M_{hx}}\frac{I_x}{I_y}x,$$

ahol: M_{hx}, M_{hy} az x, y tehetetlenségi főtengely irányú hajlítónyomatéki koordináták,
 I_x, I_y az x, y tehetetlenségi főtengelyekre számított másodrendű nyomatékok.

- (76) Írja fel a P ponti feszültségi tenzort és adja meg a benne szereplő feszültség koordináták kiszámítási módját prizmatikus rúd ferde hajlítása esetén!

A feszültségi tenzor mátrixa:

$$[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

A normál feszültség kiszámítása: $\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x}y + \frac{M_{hy}}{I_y}x$,

ahol: M_{hx}, M_{hy} az x, y tehetetlenségi főtengely irányú hajlítónyomatéki koordináták és

I_x, I_y az x, y tehetetlenségi főtengelyekre számított másodrendű nyomatékok.

- (77) Adja meg a ferde hajlítás mindkét értelmezését!

Ha az \vec{M}_S nyomatékvektor nem párhuzamos az egyik S ponti tehetetlenségi főtengellyel sem.

Ha az \vec{M}_S nyomatékvektor nem párhuzamos a zérusvonallal.

(78) Írja le prizmatikus rúd hajlítás-nyírásánál alkalmazott feltételezéseket!

- A σ_z úgy számítható, mint tiszta hajlítás esetén.
- A τ_{yz} egyensúlyi feltételből határozható meg.
- Az x és y tengelyek a keresztmetszet S ponti tehetetlenségi főtengelyei.
- Az x tengelyen fellépő $\vec{\tau}_z$ feszültségek az y tengelyen egy pontban metsződnek.
- Minden x tengellyel párhuzamos egyenes mentén a τ_{yz} állandó.

(79) Írja fel a P ponti feszültségi tenzort és adja meg a benne szereplő feszültség koordináták kiszámítási módját prizmatikus rúd hajlítás-nyírása esetén!

A feszültségi tenzor mátrixa:

$$[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

A normál feszültség kiszámítása: $\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y$,

ahol: M_{hx} az x tehetetlenségi főtengely irányába mutató hajlítónyomaték,
 I_x az x tehetetlenségi főtengelyre számított másodrendű nyomaték.

A τ_{yz} csúsztató feszültség kiszámítása: $\tau_{yz} = -\frac{T_y S_x(y)}{I_x a(y)}$,

ahol: T_y az y tengely irányú nyíróerő,

$S_x(y)$ a keresztmetszet $y = \text{áll.}$ egyenes fölé (alá) eső részének az x tengelyre számított statikai nyomatéka,

$a(y)$ a keresztmetszetbe metsző $y = \text{áll.}$ egyenes hossza.

A τ_{xz} csúsztató feszültség kiszámítása abból a feltételből történik, hogy a $\vec{\tau}_z$ feszültségek az y tengelyen egy pontban metsződnek.

(80) Hogyan számítható ki rúdszerkezetek alakváltozási energiája általános esetben?

$$U = \int_{(V)} u \, dV = \underbrace{U_N}_{\substack{\text{húzás-nyomási} \\ \text{alakváltozási} \\ \text{energia}}} + \underbrace{U_{M_h}}_{\substack{\text{hajlítási} \\ \text{alakváltozási} \\ \text{energia}}} + \underbrace{U_C}_{\substack{\text{csavarási} \\ \text{alakváltozási} \\ \text{energia}}} + \underbrace{U_T}_{\substack{\text{nyírási} \\ \text{alakváltozási} \\ \text{energia}}}.$$

$$\text{Ha } U_T \approx 0, \text{ akkor } U = \frac{1}{2} \int_{(l)} \left(\frac{N^2}{A E} + \frac{M_{hx}^2}{I_x E} + \frac{M_{hy}^2}{I_y E} + \frac{M_c^2}{I_p G} \right) ds.$$

(81) Ismertesse a Castigliano tételt!

1. alak: $u_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}$.

A szerkezetet terhelő F_i erő támadáspontjának az F_i erő irányába eső u_i elmozdulása egyenlő a szerkezet U alakváltozási energiájának az F_i erő szerint vett deriváltjával.

2. alak: $\psi_i = \frac{\partial U}{\partial M_i}$.

A szerkezetet terhelő M_i nyomaték keresztmetszetének az M_i nyomaték iránya körüli ψ_i szögelfordulása egyenlő a szerkezet U alakváltozási energiájának az M_i nyomaték szerint vett deriváltjával.

(82) *Mikor statikailag határozott egy szerkezet?*

Ha az ismeretlen támasztó és belső erő koordináták száma egyenlő a szerkezetre felírható, egymástól független skaláris statikai egyensúlyi egyenletek számával.

Ha a szerkezet támasztó és belső erőrendszerének skaláris koordinátái statikai egyensúlyi (vetületi és nyomatéki) egyenletekből meghatározhatók.

(83) *Mikor statikailag határozatlan egy szerkezet?*

Ha az ismeretlen támasztó és belső erő koordináták száma nagyobb, mint a szerkezetre felírható, egymástól független skaláris statikai egyensúlyi egyenletek száma.

Ha a szerkezet támasztó és belső erőrendszerének skaláris koordinátái statikai egyensúlyi (vetületi és nyomatéki) egyenletekből nem határozhatók meg.

(84) *Írja le a statikailag határozatlan tartószerkezetek támasztóerői meghatározásának gondolatmenetét!*

- A szerkezet statikailag határozottá tétele (törzstartó).
- Az alakváltozási (geometriai) korlátozási egyenlet felírása.
- Az alakváltozási korlátozásból a Castigliano tétellel a plusz támasztóerő koordináta meghatározása.
- Statikai egyensúlyi egyenletekből a többi támasztóerő koordináta meghatározása.

(85) *Adja meg a sík-alakváltozási állapot definícióját!*

Ha a testnek van egy olyan kitüntetett síkja, amellyel párhuzamos valamennyi sík alakváltozása azonos és alakváltozás közben a síkok távolsága nem változik.

(86) *Írja fel feszültségi és az alakváltozási tenzort sík-alakváltozási állapot esetén!*

$$\text{A feszültségi tenzor: } [\underline{\underline{F}}(x, y)] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

$$\text{Az alakváltozási tenzor: } [\underline{\underline{A}}(x, y)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(87) *Adja meg az általánosított sík-feszültségi állapot definícióját!*

Általánosított sík-feszültségi állapotban a saját síkjukban terhelt lemezek vannak.

A lemez olyan test, amelynek egyik mérete a másik két kiterjedéséhez képest kicsi és értelmezhető középsík.

A terhelés vastagság menti eredője a lemez középsíkjában működik.

(88) *Írja fel feszültségi és az alakváltozási tenzort általánosított sík-feszültségi állapot esetén!*

$$\text{A feszültségi tenzor: } [\underline{\underline{F}}(x, y)] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x & \bar{\tau}_{xy} & 0 \\ \bar{\tau}_{yx} & \bar{\sigma}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az alakváltozási tenzor: $[\underline{\underline{A}}(x, y)] = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_x & \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{yx} & \bar{\varepsilon}_y & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varepsilon}_z \end{bmatrix}$.

(89) Írja fel általánosított sík-feszültségi állapot esetén az átlagos feszültségek értelmezését!

$$\bar{\sigma}_x(x, y) = \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_x(x, y, z) dz, \quad \bar{\sigma}_y(x, y) = \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_y(x, y, z) dz,$$

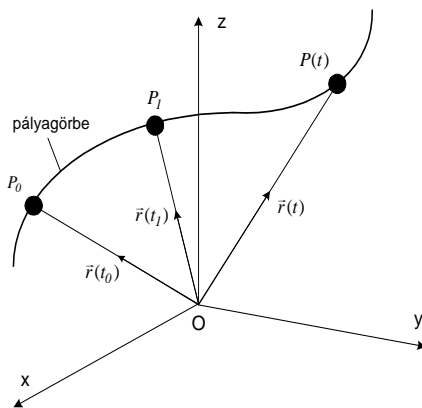
$$\bar{\tau}_{xy}(x, y) = \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{xy}(x, y, z) dz.$$

(90) Hogyan kell felvenni sík alakváltozásnál és általánosított sík feszültségi állapotnál a feszültségfüggvényt és hogyan származtathatók a feszültségek a feszültségfüggvényből?

A feszültségfüggvényt úgy kell felvenni, hogy a belőle számított feszültségek kielégítsék az egyensúlyi egyenleteket.

$$\sigma_x(x, y) = \frac{\partial^2 \chi(x, y)}{\partial y^2}, \quad \sigma_y(x, y) = \frac{\partial^2 \chi(x, y)}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy}(x, y) = -\frac{\partial^2 \chi(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

(91) Adja meg anyagi pont mozgástörvényének (mozgásfüggvényének) és pályájának definícióját!



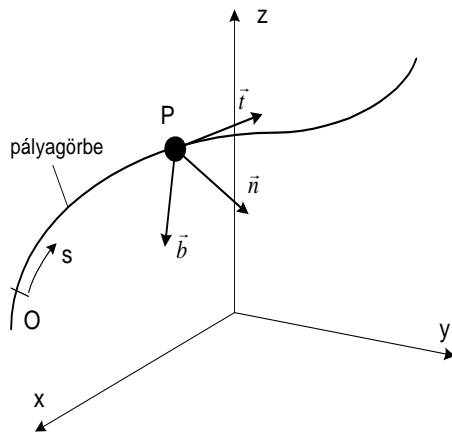
A mozgástörvény az az $\vec{r} = \vec{r}(t)$ helyvektor - idő (vektor - skalár) függvény, amely az anyagi pont pillanatnyi helyzetét meghatározza.

Anyagi pont pályája az a térgörbe, amelyen a pont a mozgás során végig halad.

(92) Adja meg az $s=s(t)$ ívkoordináta értelmezését!

Az s ívkoordináta egy adott O kezdőponttól, a pályagörbe mentén mért előjeles távolság (előjeles ívhossz), amely a tömegpont helyét a pályagörbén egyértelműen megadja.

(93) Értelmezze anyagi pont pályagörbéjének egy tetszőleges pontjában a \vec{t} , \vec{n} , \vec{b} kíséző triédert!



- Az érintő irányú egységvektor:

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad |\vec{t}| = 1.$$

- A főnormális egységvektor:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \vec{n} = \frac{1}{\rho} \vec{n}, \quad |\vec{n}| = 1.$$

- A binormális egységvektor:

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}, \quad |\vec{b}| = 1.$$

s - ívkoordináta (előjeles ívhossz),

κ - a pályagörbe görbülete,

ρ - a pályagörbe görbületi sugara.

- (94) Adja meg anyagi pont $\vec{v}(t)$ sebességfüggvényének, valamint pillanatnyi sebességvektorának értelmezését és írja le a pillanatnyi sebességvektor tulajdonságait!

A sebességfüggvény a mozgástörvény (mozgásfüggvény) idő szerint vett első deriváltja:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}.$$

A pillanatnyi sebességvektor a sebesség-függvény egy adott időpillanatban felvett értéke: $\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1)$.

A pillanatnyi sebességvektor tulajdonságai:

- vektor mennyiség,
- iránya megegyezik a pályagörbe érintőjének irányával.

- (95) Bizonyítsa be, hogy anyagi pont sebességvektorának iránya megegyezik a pályagörbe érintőjének irányával!

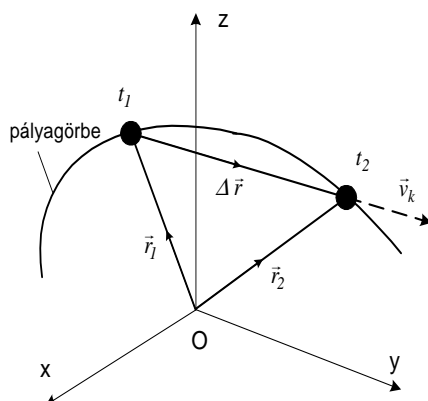
$$\text{Bizonyítás: } \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\vec{t}} = v(t)\vec{t}.$$

s - a pályagörbe mentén mért ívkoordináta,

\vec{t} - a pályagörbe érintő egységvektora,

$v(t)$ - a pályasebesség.

- (96) Értelmezze anyagi pont elmozdulásvektorát és közepes sebességét!



- Az elmozdulás-vektor:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

- Az elmozdulásvektor az anyagi pont t_1 időpillanatban elfoglalt helyéből a t_2 időpillanatbeli helyzetébe mutató helyvektor.

- A közepes sebesség:

$$\vec{v}_k = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}.$$

- Az elmozdulásvektor és a közepes sebességvektor is egy adott idő-intervallumra vonatkozik.

- (97) *Értelmezze anyagi pont pálya menti sebességét (pályasebességét) és írja le a tulajdonságait!*

A pálya menti sebesség a pályagörbe mentén mért ívkoordináta idő szerint vett első deriváltja: $v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$.

Tulajdonságai:

- (előjeles) skalár mennyiség,
- előjelét a s ívkoordináta irányítása dönti el, előjele a \vec{t} irányára vonatkozik (a pályasebesség akkor pozitív, ha az ívkoordináta nő).

- (98) *Adja meg anyagi pont gyorsulásfüggvényének, valamint pillanatnyi gyorsulásvektorának értelmezését és írja le a pillanatnyi gyorsulásvektor tulajdonságait!*

A gyorsulásfüggvény a sebességfüggvény idő szerint vett első deriváltja, illetve a mozgásfüggvény (mozgástörvény) idő szerint vett második deriváltja:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}.$$

A pillanatnyi gyorsulásvektor a gyorsulásfüggvény egy adott időpillanatban felvett értéke: $\vec{a}_1 = \vec{a}(t_1)$.

A pillanatnyi gyorsulásvektor tulajdonságai:

- vektormennyiség,
- a pályagörbe simulósíkjába esik és a pályagörbe \vec{t} érintője és \vec{n} főnormálisa irányába eső összetevőkből áll.

- (99) *Bizonyítsa be, hogy anyagi pont gyorsulásvektora a pályagörbe \vec{t} , \vec{n} simulósíkjába esik!*

$$\vec{a} = \vec{a}(t) = \frac{d}{dt}[v(t)\vec{t}(t)] = \frac{dv(t)}{dt}\vec{t} + v(t) \underbrace{\frac{d\vec{t}}{ds}}_{\frac{\vec{n}}{\rho}} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v(t)} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}.$$

- (100) *Adja meg az anyagi pont gyorsulásvektora koordinátáinak elnevezését, kiszámítási módját és fizikai tartalmát az pályagörbe \vec{t} , \vec{n} , \vec{b} természetes koordináta-rendszerében!*

| Elnevezés: | Kiszámítási mód: | Fizikai tartalom: |
|---|-----------------------------|---|
| Pálya menti gyorsulás (Pályagyorsulás) | $a_t(t) = \frac{dv(t)}{dt}$ | A sebességvektor nagyságának változását jellemzi. |
| Normális gyorsulás | $a_n(t) = \frac{v^2}{\rho}$ | A sebességvektor irányának változását jellemzi. |

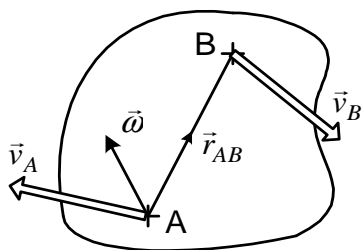
- (101) *Adja meg a merev test sebességállapotának értelmezését! Milyen mennyiségekkel adható meg egyértelműen merev test sebességállapota?*

Merev test sebességállapota egy adott időpillanatban a merev test összes pontjához tartozó sebességvektorok halmaza.

Megadás:

- a test pillanatnyi $\vec{\omega}$ szögsebességével,
- a test egy adott A pontjának pillanatnyi \vec{v}_A sebességével.

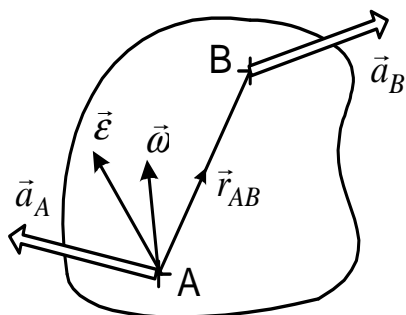
- (102) Adja meg egy adott időpillanatban a merev test két pontjának sebességvektora közötti összefüggést!



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB},$$

$\vec{\omega}$ - a test pillanatnyi szögsebessége,
 \vec{v}_A, \vec{v}_B - az A és B pontok pillanatnyi sebessége,
 \vec{r}_{AB} - az A pontból a B pontba mutató helyvektor.

- (103) Adja meg egy adott időpillanatban a merev test két pontjának gyorsulásvektora közötti összefüggést térbeli mozgás és síkmozgás esetén!



Térbeli mozgás: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\epsilon} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}),$

$\vec{\epsilon}$ - a test pillanatnyi szöggyorsulása,
 $\vec{\omega}$ - a test pillanatnyi szögsebessége,
 \vec{a}_A, \vec{a}_B - az A és B pontok pillanatnyi gyorsulása,
 \vec{r}_{AB} - az A pontból a B pontba mutató helyvektor.

Síkmozgás: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \epsilon \vec{n} \times \vec{R}_{AB} - \omega^2 \vec{R}_{AB},$

\vec{n} - a sík normális egységvektora,
 \vec{R}_{AB} - az \vec{r}_{AB} helyvektor síkba eső összetevője.

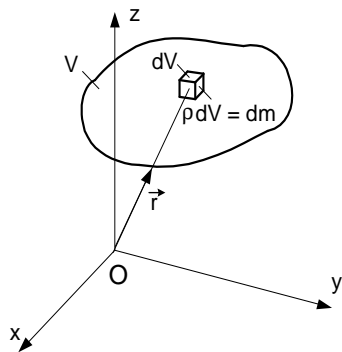
- (104) Adja meg a merev test gyorsulásállapotának értelmezését! Milyen mennyiségekkel adható meg egyértelműen merev test gyorsulásállapota?

Merev test gyorsulásállapota egy adott időpillanatban a merev test összes pontjához tartozó gyorsulásvektorok halmaza.

Megadás:

- a test $\vec{\epsilon}$ pillanatnyi szöggyorsulásával,
- a test $\vec{\omega}$ pillanatnyi szögsebességével,
- a test egy adott A pontjának \vec{a}_A pillanatnyi gyorsulásával.

- (105) Értelmezze a test tömegét és a test O pontra számított statikai nyomatékát! Készítsen magyarázó ábrát!



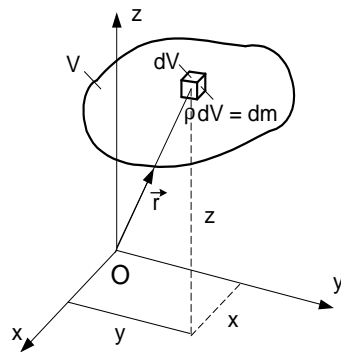
A test tömege a test tehetetlenségének mérőszáma:

$$m = \int_{(m)} dm = \int_{(V)} \rho dV.$$

A test O pontra számított statikai nyomatéka:

$$\vec{S}_O = \int_{(m)} \vec{r} dm = \int_{(V)} \vec{r} \rho dV.$$

- (106) *Értelmezze a test koordináta síkokra számított statikai nyomatékát!*
Készítsen magyarázó ábrát!



A koordináta síkokra számított statikai nyomatékok:

$$S_{xy} = \int_{(m)} z dm = \int_{(V)} z \rho dV = \vec{S}_O \cdot \vec{e}_z,$$

$$S_{yz} = \int_{(m)} x dm = \int_{(V)} x \rho dV = \vec{S}_O \cdot \vec{e}_x,$$

$$S_{xz} = \int_{(m)} y dm = \int_{(V)} y \rho dV = \vec{S}_O \cdot \vec{e}_y,$$

ahol:

\vec{S}_O – a test O pontra számított statikai nyomatéka,
 $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – a síkok normális egységvektorai.

- (107) *Adja meg az összefüggést egy merev test két pontra számított statikai nyomatéka között!*

$$\vec{S}_B = \vec{S}_A - m\vec{r}_{AB}, \quad \text{vagy} \quad \vec{S}_B = \vec{S}_A + m\vec{r}_{BA}$$

ahol A és B a tér két tetszőleges pontja,

$$\text{merev test esetén: } m = \int_{(m)} dm = \int_{(V)} \rho dV.$$

- (108) *Definiálja merev test T tömegközéppontját és adja meg a tömegközéppont helyvektorának kiszámítási módját! Milyen esetben esik egybe a tömegközéppont a súlyponttal?*

- A tömegközéppont az a pont, amelyre számított statikai nyomaték zérus.

- A tömegközéppont helyvektora: $\vec{r}_{OT} = \vec{r}_T = \frac{\vec{S}_O}{m}$,

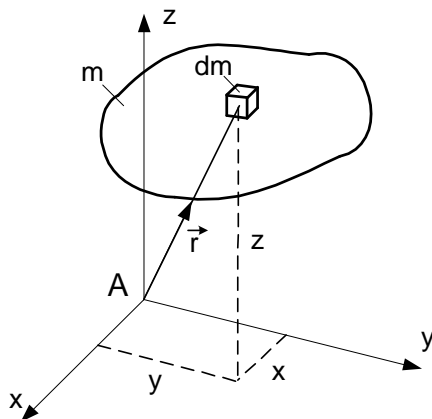
ahol O a koordináta-rendszer kezdőpontja,

m a rendszer tömege és

\vec{S}_O a koordináta-rendszer kezdőpontjára számított statikai nyomaték.

- A tömegközéppont akkor azonos a súlyponttal, ha a gravitációs gyorsulás állandó.

- (109) *Értelmezze merev test pontra és a koordináta-rendszer tengelyeire számított tehetetlenségi nyomatékát! Adja meg a pontra és a tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékok legfontosabb tulajdonságát!*



Pontra számított:

$$J_A = \int_{(m)} r^2 dm = \int_{(m)} (x^2 + y^2 + z^2) dm.$$

A koordináta tengelyekre számított nyomatékok:

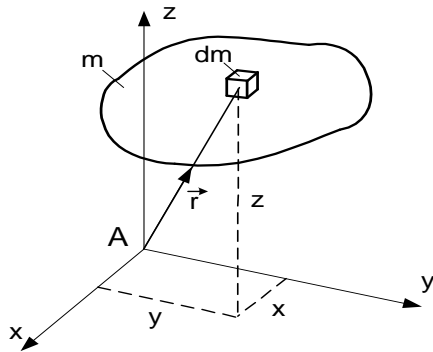
$$J_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm - x \text{ tengelyre számított,}$$

$$J_y = \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm - y \text{ tengelyre számított,}$$

$$J_z = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm - z \text{ tengelyre számított.}$$

Tulajdonság: $J_A \geq 0, J_a \geq 0$.

- (110) *Értelmezze merev test koordináta-síkpárokra számított tehetetlenségi nyomatékát!*



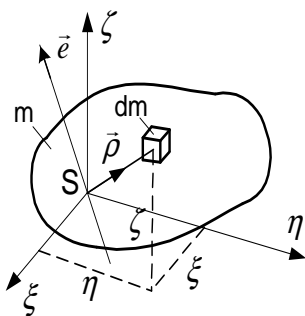
A koordináta-síkpárokra számított nyomatékok:

$$J_{xy} = \int_{(m)} (xy) dm - \text{az } [yz]-[xz] \text{ síkpárra számított,}$$

$$J_{yz} = \int_{(m)} (yz) dm - \text{az } [xz]-[xy] \text{ síkpárra számított,}$$

$$J_{zx} = \int_{(m)} (zx) dm - \text{az } [xy]-[yz] \text{ síkpárra számított.}$$

- (111) Adja meg a merev test S súlyponti e tengelyre számított tehetetlenségi vektorának, valamint tehetetlenségi tenzorának értelmezését és írja fel a tenzor mátrixát az S ponthoz kötött ξ, η, ζ koordináta-rendszerben!



Tehetlenségi vektor értelmezése:

$$\vec{J}_e = \int_{(m)} \vec{\rho} \times (\vec{e} \times \vec{\rho}) dm.$$

Tenzor értelmezése:

$$\underline{\underline{J}}_S = \int_{(m)} [\rho^2 \underline{\underline{E}} - \vec{\rho} \circ \vec{\rho}] dm = (\vec{J}_\xi \circ \vec{e}_\xi + \vec{J}_\eta \circ \vec{e}_\eta + \vec{J}_\zeta \circ \vec{e}_\zeta).$$

A tenzor mátrixa:

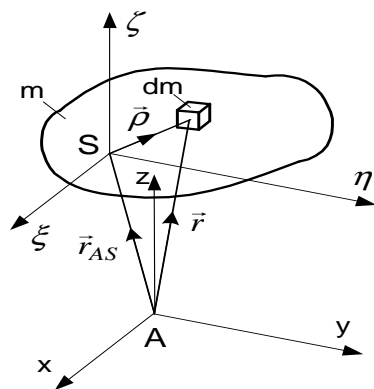
$$\left[\underline{\underline{J}}_S \right] = \begin{bmatrix} J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\eta\xi} & J_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\zeta\xi} & -J_{\zeta\eta} & J_\zeta \end{bmatrix}.$$

- (112) Hogyan számíthatók ki a $\underline{\underline{J}}_S$ súlyponti tehetetlenségi tenzor, valamint az \vec{n} és az \vec{m} irány egységvektorok ismeretében a J_n tengelyre és a J_{nm} síkpárra számított tehetetlenségi nyomaték?

$$J_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{n}, \quad J_{nm} = J_{mn} = -\vec{n} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{m} = -\vec{m} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{n}$$

- (113) Írja fel merev test tehetlenségi tenzorára a Steiner tételt!

A Steiner tétel összefüggést ad meg az egymással párhuzamos S súlyponti és tetszőleges A ponti tengelyekre (és síkpárokra) számított tehetetlenségi nyomatékok között.



Tenzoriális alak:

$$\underline{\underline{J}}_A = \underline{\underline{J}}_S + \underline{\underline{J}}_{SA}.$$

Skaláris alak:

$$J_x = J_\xi + m(y_{AS}^2 + z_{AS}^2) = J_\xi + m(\eta_{SA}^2 + \zeta_{SA}^2),$$

$$J_y = J_\eta + m(x_{AS}^2 + z_{AS}^2) = J_\eta + m(\xi_{SA}^2 + \zeta_{SA}^2),$$

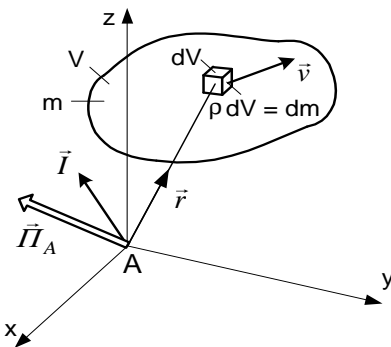
$$J_z = J_\zeta + m(x_{AS}^2 + y_{AS}^2) = J_\zeta + m(\xi_{SA}^2 + \eta_{SA}^2),$$

$$J_{xy} = J_{\xi\eta} + m x_{AS} y_{AS} = J_{\xi\eta} + m \xi_{SA} \eta_{SA},$$

$$J_{yz} = J_{\eta\zeta} + m y_{AS} z_{AS} = J_{\eta\zeta} + m \eta_{SA} \zeta_{SA},$$

$$J_{xz} = J_{\xi\zeta} + m x_{AS} z_{AS} = J_{\xi\zeta} + m \xi_{SA} \zeta_{SA}.$$

- (114) Adja meg az impulzus vektorrendszer eredő vektorkettősének értelmezését merev test esetén!



Merev test esetén:

Az eredő impulzus vektor:

$$\vec{I} = \int_{(m)} \vec{v} dm.$$

Az eredő impulzus-nyomaték (perdület) vektor:

$$\vec{\Pi}_A = \int_{(m)} \vec{r} \times \vec{v} dm.$$

- (115) Hogyan számítható ki az impulzus vektorrendszer S súlyponti eredő vektorkettőse merev test esetén!

Az eredő impulzus vektor kiszámítása: $\vec{I} = m\vec{v}_S$.

Az eredő impulzus-nyomaték (perdület) vektor kiszámítása: $\vec{\Pi}_S = \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{\omega}$.

m - a test tömege, \vec{v}_S - a test S súlypontjának sebességvektora,

$\vec{\omega}$ - a test szögsebességvektora,

$\underline{\underline{J}}_S$ - a test S ponti tehetetlenségi tenzora.

- (116) Hogyan számítható ki az impulzus vektorrendszernek a test tetszőleges A pontjára számított eredő vektorkettőse!

Az eredő impulzus vektor kiszámítása: $\vec{I} = m\vec{v}_S$.

Az eredő impulzus-nyomaték (perdület) vektor kiszámítása: $\vec{\Pi}_A = \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\omega} + \vec{r}_{AS} \times m\vec{v}_A$.

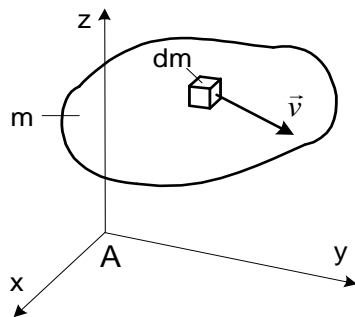
m - a test tömege, \vec{v}_S - a test S pontjának sebességvektora,

\vec{v}_A - a test A pontjának sebességvektora,

$\vec{\omega}$ - a test szögsebességvektora,

$\underline{\underline{J}}_A$ - a test A ponti tehetetlenségi tenzora.

- (117) Adja meg a kinetikai (mozgási) energia értelmezését merev test esetén!



Merev test esetén:

$$E = \int_{(m)} v^2 dm > 0.$$

A mozgási energia pozitív skalár mennyiség.

- (118) Hogyan számítható ki merev test kinetikai (mozgási) energiája a szögsebesség és az impulzus vektorrendszer eredő vektorkettősének felhasználásával?

A tetszőleges A ponti vektorkettőssel: $E = \frac{1}{2}(\vec{v}_A \cdot \vec{I} + \vec{\omega} \cdot \vec{\Pi}_A)$,

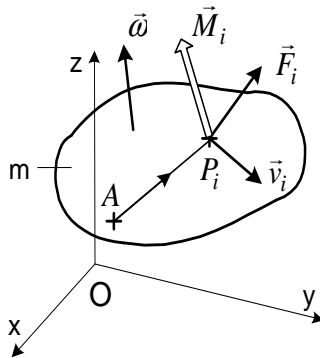
Az S súlyponti vektorkettőssel:

$$E = \frac{1}{2}(\vec{v}_S \cdot \vec{I} + \vec{\omega} \cdot \vec{\Pi}_S), \quad \text{vagy}$$

$$E = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}J_s\omega^2, \quad \text{ahol } J_s = \frac{1}{\omega^2}(\vec{\omega} \cdot \underline{J}_S \cdot \vec{\omega}) \text{ a test } \vec{\omega}\text{-val párhuzamos } S \text{ ponti}$$

tengelyére számított tehetetlenségi nyomaték.

(119) *Hogyan számítható ki merev testre ható erők teljesítménye?*



Merev testre ható erők teljesítménye:

$$P = P_K = \sum (\vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \vec{M}_i \cdot \vec{\omega}), \quad \text{vagy}$$

$$P = P_K = \vec{F} \cdot \vec{v}_A + \vec{M}_A \cdot \vec{\omega}, \quad \text{ahol}$$

\vec{F} - a külső erőrendszer eredő erője,

\vec{v}_A - a test A pontjának sebessége,

\vec{M}_A - a külső erőrendszernek az A pontra számított nyomatéka,

$\vec{\omega}$ - a test szögsebessége.

(120) *Hogyan számítható ki tömegpontra, illetve merev testre ható erőrendszer munkája?*

A tömegpontra ható erőrendszer munkája:

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

\vec{F} - az erőrendszer eredője, \vec{v} - a tömegpont sebessége.

A merev testre ható erőrendszer munkája:

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \vec{v}_A + \vec{M}_A \cdot \vec{\omega}) dt,$$

\vec{F} - a külső erőrendszer eredő erője, \vec{v}_A - a test A pontjának sebessége,

\vec{M}_A - a külső erőrendszer A pontra számított nyomatéka,

$\vec{\omega}$ - a test szögsebessége.

(121) *Ismertesse a dinamika alaptörvényét, valamint az ebből következő impulzus- és perdület-tétel differenciális alakját merev test (vagy tömegpont-rendszer) S súlypontjára, illetve tetszőleges A pontjára felírva!*

Merev test, (vagy tömegpont-rendszer) impulzusának idő szerinti első deriváltja egyenlő a merev testre (vagy tömegpont-rendszerre) ható külső erőrendszer eredőjével.

Merev test S pontjára számított perdületvektor idő szerinti első deriváltja egyenlő a testre ható erőrendszer S pontra számított nyomatékával.

| | Impulzus tétel: | Perdület-tétel: |
|-----------|-----------------------------------|---|
| S pont: | $\vec{I} = m\vec{a}_S = \vec{F},$ | $\dot{\vec{\Pi}}_S = \underline{J}_S \cdot \vec{\epsilon} + \vec{\omega} \times \vec{\Pi}_S = \vec{M}_S,$ |
| A pont: | $\vec{I} = m\vec{a}_S = \vec{F},$ | $\dot{\vec{\Pi}}_A = \underline{J}_A \cdot \vec{\epsilon} + \vec{\omega} \times \underline{J}_A \cdot \vec{\omega} + m\vec{r}_{AS} \times \vec{a}_A = \vec{M}_A.$ |

(122) *Ismertesse a mechanikai energia-tételt és a mechanikai munka-tételt!*

Energia-tétel: A rendszer kinetikai energiájának idő szerinti deriváltja (idő szerinti megváltozása) egyenlő a rendszerre ható külső és belső erők teljesítményével.

$$\dot{E} = P_K + P_B = P$$

Munka-tétel: A rendszer kinetikai energiájának $\langle t_1, t_2 \rangle$ idő intervallum alatti megváltozása egyenlő a rendszerre ható külső és belső erőknek a $\langle t_1, t_2 \rangle$ idő intervallum alatt végzett munkájával.

$$E_2 - E_1 = W_{K_{12}} + W_{B_{12}} = W_{12}$$