

FELÜLETI FESZÜLTSGI ÁLLAPOT MEGHATÁROZÁSA NYÚLÁSMÉRÉSSEL,
ELMOZDULÁSMÉRÉS

Laboratóriumi mérési gyakorlat
Egyetemi mesterképzésben (MSc) részt vevő mérnökhallgatók számára

Összeállította: Aczél Ákos egyetemi tanársegéd

1. Szilárdságtani alapismeretek

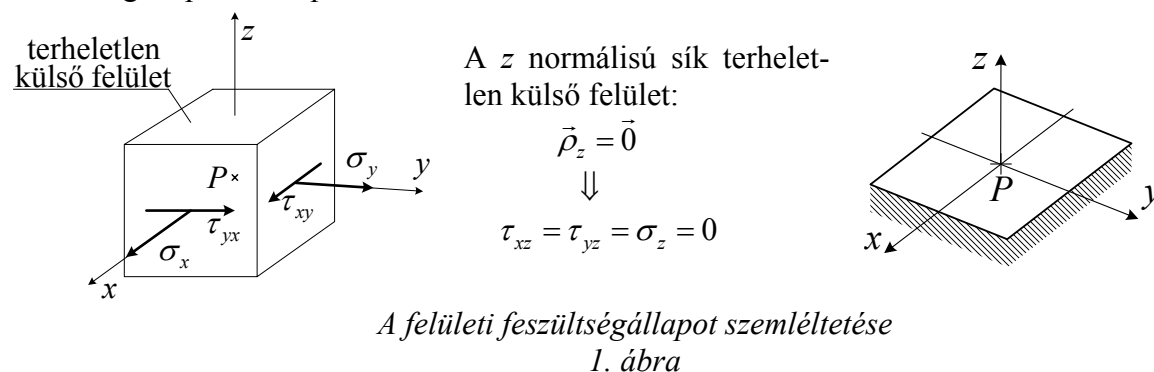
Alkatrészeknél, mérnöki szerkezeteknél gyakran előforduló eset, hogy a felületen, vagy a felület közelében alakul ki kritikus (veszélyes) feszültségi állapot és ennek következtében a felületről indul el a szerkezet tönkremenetele. Ezért fontos, hogy az alkatrészek felületén kialakuló feszültségi állapotot meghatározzuk. A laboratóriumi gyakorlaton az alkatrész felületén levő pontokban fellépő feszültségek meghatározásának egyik leggyakoribb mérési módjával az ún. nyúlásmérő bélyeges mérési technikával, valamint az elmozdulásméréssel ismerkedünk meg.

1.1. Felületi feszültségi állapot

A nyúlásmérő bélyeges technikát a műszaki fejlesztéssel foglalkozó cégek gyakran alkalmazzák, ez az eljárás ugyanis tetszőleges alakú és terhelésű alkatrész felületén alkalmas az alakváltozási- és a feszültségi állapot meghatározására. A számítógépes méretezési módszerek elterjedésével (Pl: véges elem módszer, peremelem módszer, véges differenciák módszere, stb.) a nyúlásmérési technikát gyakran használjuk a számítások helyességének ellenőrzésére.

A valóságos szerkezeteken feszültséget nem tudunk mérni! Az ún. nyúlásmérő bélyegekkel a szerkezet külső felületén különböző irányokban a fajlagos nyúlás értékét tudjuk mérni, és ebből a Hooke-törvény ismeretében a feszültségeket meghatározni.

Amint az előbbiekből kitűnik, ismernünk kell bizonyos szilárdságtani alapfogalmakat a síkbeli feszültségállapothoz kapcsolódóan.



Az alkatrész terheletlen felületén feszültség nem ébred: $\bar{\rho}_z = \vec{0} \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$. A felület pontjaiban az 1. ábra szerint σ_x , τ_{yx} , illetve σ_y , τ_{xy} feszültségek ébrednek. A τ_{xy} és τ_{yx} feszültségekre érvényes a dualitás elve, vagyis az \vec{e}_x és \vec{e}_y normálisú lapok közötti élre nézve a τ_{xy} és τ_{yx} feszültségek vagy összefutó, vagy szétfutó irányúak és abszolút értékük egyenlő.

A terheletlen felületen kialakuló feszültségi állapotot tehát a következő feszültségi tenzor írja le:

$$\begin{bmatrix} \underline{F_P} \\ \underline{xyz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ ahol a } z \text{ tengely a terheletlen felület kifelé mutató normálisa, egyben fe-}$$

szültségi főirány.

Az \vec{e}_z normálisú, terheletlen felületen lévő P pont alakváltozási állapotát a következő alakválto-

$$\text{zási tenzor írja le: } \begin{bmatrix} \underline{A_P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

A két tenzor koordinátái között a Hooke-törvény teremt kapcsolatot a következő összefüggések szerint.

Az alakváltozási jellemzők előállítására a feszültségekből:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y),$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x),$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y),$$

$$\gamma_{xy} = 2\frac{1+\nu}{E}\tau_{xy},$$

A feszültségek meghatározása az alakváltozási jellemzőkből:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$

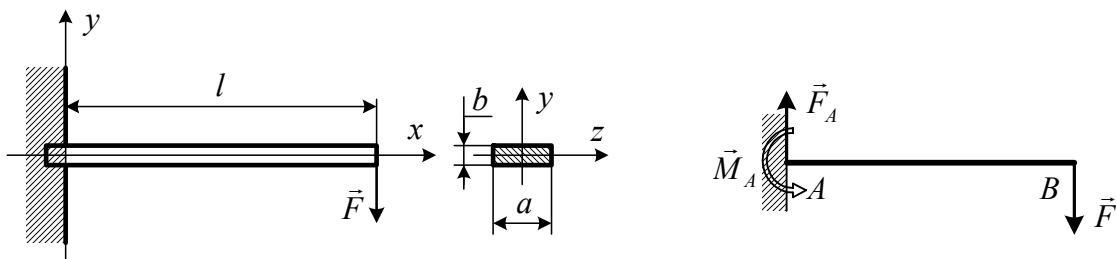
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$

ahol E a rugalmassági modulus, ν a Poisson-tényező. (Acélra $E \approx 2 \cdot 10^5$ MPa, $\nu \approx 0,3$.)

1.2. Hajlított, nyírt tartó feszültségi állapota

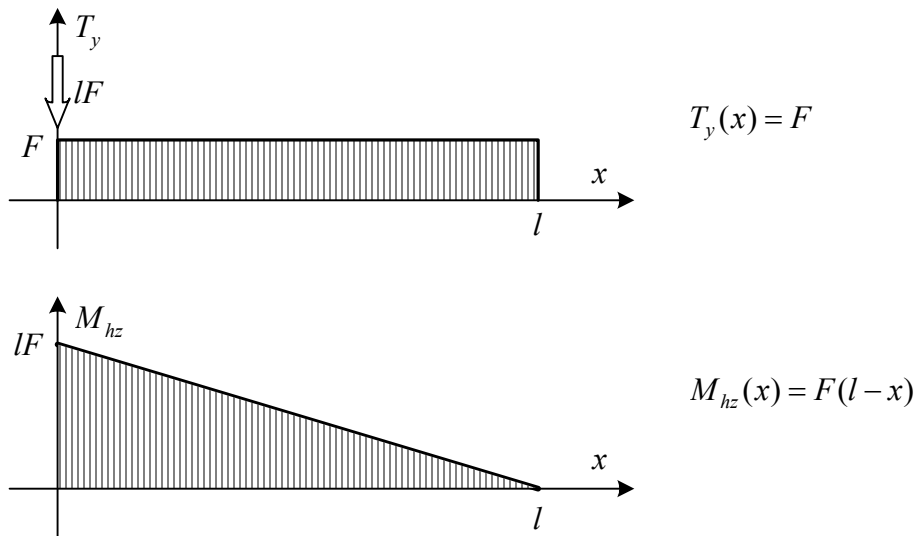
A mérés során egy hajlított, nyírt tartót fogunk vizsgálni, melynek elméleti úton előállított megoldását ismerjük. A 2. ábrán látható egyik végén befalazott és másik végén F erővel terhelt tartó feszültségi viszonyait a rúdmodell alapján tárgyaljuk.



Hajlított, nyírt tartó és rúdmodellje a támasztóerő-rendszerrel

2. ábra

A tartó A keresztmetszeténél (a befalazásnál) az ábrán feltüntetett $\vec{F}_A = -\vec{F}$ erő és $\vec{M}_A = -l\vec{e}_x \times \vec{F} = l|\vec{F}|\vec{e}_z$ nyomaték biztosítja az egyensúlyt. Ezek ismeretében meghatározhatjuk az igénybevételi függvényeket és megrajzolhatjuk az igénybevételi ábrákat.



Hajlított, nyírt tartó igénybevételi ábrái és igénybevételi függvényei
3. ábra

A szilárdságtani szempontból veszélyes keresztmetszet a befalazásnál lévő A keresztmetszet. A fenti függvényekből a tartó bármelyik keresztmetszetének igénybevétele kiszámítható. A rúd tetszőleges keresztmetszetének egy kiválasztott pontjában a következő feszültségi tenzor lép fel:

$$\underline{\underline{[F]}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ahol} \quad \sigma_x(x, y) = \frac{M_{hz}(x)}{I_z} y = \frac{12F(l-x)}{ab^3} y$$

$$\tau_{xy}(y) = \tau_{yx}(y) = -\frac{F}{A} 6 \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

A Hooke-törvény segítségével kiszámíthatjuk az alakváltozási tenzort:

$$\underline{\underline{[A_p]}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad \text{ahol} \quad \varepsilon_x(x, y) = \frac{\sigma_x(x, y)}{E} = \frac{12F(l-x)}{Eab^3} y$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$$

$$\gamma_{xy}(y) = \gamma_{yx}(y) = 2 \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} = -2 \frac{1+\nu}{E} \frac{F}{A} 6 \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

Az alakváltozást csak az alkatrész felületén tudjuk mérni, ezért a tartó felületi pontjaiban fellépő alakváltozási koordinátákat határozzuk meg. Amennyiben $y = \pm \frac{b}{2}$ (a tartó „alsó” és „felső” felü-

lete), $\varepsilon_x(x) = \pm \frac{6F(l-x)}{Eab^2}$, $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$, $\gamma_{xy} = 0$. Ezen felületeken az alakváltozást tehát kizárólag a hajlítás okozza. Ha meg tudjuk mérni ezeken a felületeken az x tengely irányú fajlagos nyúlást, akkor következtethetünk a felület feszültségi állapotára is.

A feszültségkoordináták nem függenek a z helykoordinátától, ezért ha $z = \pm \frac{a}{2}$ (a tartó oldalfelületei), akkor normál feszültséget és csúsztató feszültséget egyaránt megfigyelhetünk. Amennyiben $z = \pm \frac{a}{2}$ és $y = 0$ (az oldalfelületek középvonala), akkor a normál feszültség eltűnik, miközben a csúsztató feszültség és a belőle fakadó szögtorzulás maximális. Ha meg tudjuk mérni eze-

ken a szakaszokon a szögtorzulást, akkor következtethetünk a felület feszültségi állapotára is. A fajlagos nyúlást és közvetve a szögtorzulást nyúlásmérő bélyeggel mérhetjük meg.

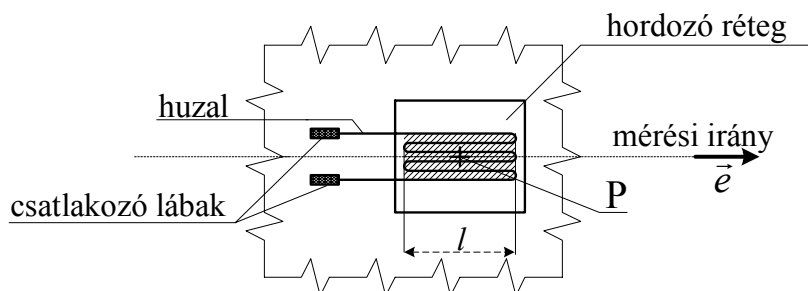
2. A nyúlásmérő bélyeg

Ismeretes, hogy egy huzal elektromos ellenállása függ a huzal hosszától és keresztmetszetétől:

$R = \rho \frac{l}{A}$, ahol l a vezető hossza, A a vezető keresztmetszete, ρ a vezető fajlagos ellenállása. Ha

a huzal hossza megnő, vagy keresztmetszete lecsökken, az ellenállása megnövekszik. Ha egy ilyen huzalt úgy rögzítünk az alkatrész felületéhez, hogy az alkatrész alakváltozását a huzal is elszenvedje, anélkül, hogy hatással lenne magának a vizsgált alkatrésznek az alakváltozására, akkor ennek a huzalnak az ellenállás-változásából következtethetünk a szóban forgó alkatrész vizsgált felületén bekövetkező alakváltozásra.

A nyúlásmérő bélyeg eredeti formájában tehát egy villamos szigetelőlapra (hordozó réteg) rögzített elektromos vezető huzal, amelynek felületére a külső behatások kizárására egy védőborítást visznek fel. A nyúlásmérő bélyeget a terheletlen alkatrész mérendő P pontjára ragasztjuk, pontosabban az alkatrész szabad felületére (4. ábra).



A felület P pontjára ragasztott nyúlásmérő bélyeg vázlatja
4. ábra

A ragasztónak kellően szilárdnak kell lennie ahhoz, hogy a felület alakváltozását maradéktalanul továbbítsa a mérőbélyeg hordozó rétegének. A hordozó rétegnek pedig olyan lágynak kell lennie, hogy az alkatrész alakváltozását ne befolyásolja.

A modern nyúlásmérő bélyegek mérőelemei a nyomtatott áramköri technikának megfelelően már nem vezető huzalok, hanem az ábra alakját követő vezető fóliák, vezetőrétegek.

Az acél alkatrészek méréséhez használt nyúlásmérő bélyegek névleges elektromos ellenállása $R = 120 \Omega$ nagyságú. A mérési hossz (az ábrán l jelöli) a mérési céltól függően $l = 0,3 - 100$ mm; szokványos gépészeti feladatoknál 1-3-5-7-10 mm értékű. Fontos megemlíteni, hogy a mérőbélyeg nem egy pontban, a P pontban mér, hanem a P pont környezetében a mérési hosszának és a bélyeg szélességének megfelelő területen az átlagos nyúlást méri. A vezetőréteg kialakítása biztosítja a mérőbélyeg ellenállásának nagyfokú érzéketlenségét a mérési irányra merőleges nyúlásra. A szokásos keresztirányú érzékenység tizedszázalék nagyságrendű, vagyis az alkatrész mérési irányra merőleges nyúlása több százszor kisebb ellenállás-változást okoz, mint az ugyanakkora nagyságú, de a mérési irányba eső nyúlás.

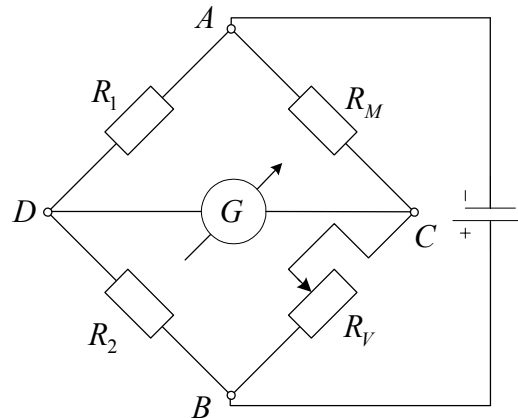
Ez alapján feltételezhetjük, hogy a jól felragasztott nyúlásmérő bélyeg elektromos vezetőjének fajlagos nyúlása megegyezik a P pontban, illetve a pont megfelelő környezetében a mérendő alkatrész felületén bekövetkező átlagos fajlagos nyúlással.

A bélyeg elektromos ellenállása: $R = \rho \frac{l}{A}$ [Ω], ahol l a vezetőréteg hossza m-ben, A a vezetőréteg keresztmetszete mm^2 -ben, ρ a vezetőréteg fajlagos ellenállása $\frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}$ mértékegységben.

Ha a bélyeg az alkatrész terhelése közben a mérendő felülettel együtt alakváltozva megnyúlik, akkor a bélyegen lévő vezetőréteg megnyúlik, keresztmetszete lecsökken, így az R ellenállása megváltozik. A tapasztalat szerint ez a ΔR ellenállás-változás arányos a fajlagos nyúlással:

$\frac{\Delta R}{R} = k_o \varepsilon$, ahol k_o a bélyegállandó, más néven átalakítási tényező. Mivel a k_o bélyegállandó 2 és 2,7 közötti érték, ezért a relatív ellenállásváltozás a fajlagos nyúlás nagyságrendjébe esik. Ilyen kis (tized-, század-, vagy akár ezredszázaléknyi) ellenállásváltozás pontos és megbízható mérésére az erre a célra épített mérőműszer, az ún. mérőerősítő alkalmas. A mérőerősítő működése a *Wheatstone-híd* (kiejtve: Vitszton-híd) kiegyenlítésére vezethető vissza.

Az alkatrész felületére ragasztott mérőbélyeget (R_M a mérőbélyeg ellenállása), a bélyeg csatlakozó lábaihoz forrasztott vezetékkel csatlakoztatva a mérőműszerbe épített három másik ellenállással ún. *Wheatstone-híd* kapcsolásba kötjük össze (5. ábra).



A mérő-híd bekötési vázlatja

5. ábra

A *Wheatstone-híd* A , B kapcsaira egyenáramú áramforrást, a C és D kapcsok közé egy galvanométert (érzékeny árammérő) kapcsolunk. A mérendő alkatrész terheletlen. Az R_V változtatható ellenállást úgy állítjuk be, hogy a galvanométeren ne folyjon áram, vagyis a galvanométer mutatója $I_G = 0$ áramértéket jelezen. Ilyenkor a C és a D pont azonos potenciálon van, vagyis az

ellenállásokból képzett feszültségosztókra fennáll az $\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_M}{R_M + R_V}$ egyenlőség. A neve-

zőkkel való bővítés után kiesik $R_1 R_M$ és kapjuk az $R_M R_2 = R_1 R_V$, vagy az ezzel egyenértékű

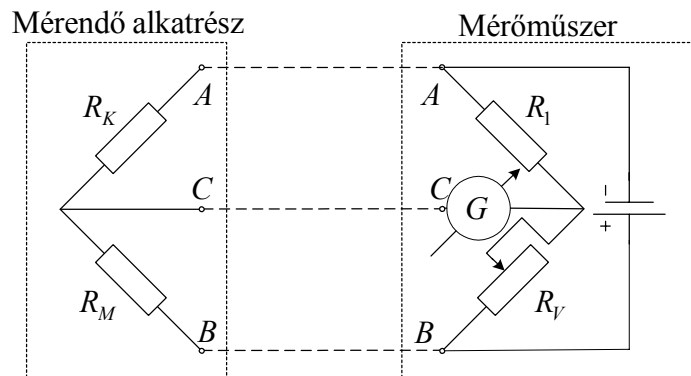
$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_M}{R_V}$ egyenlőséget. Vagyis a híd szemben lévő ágaiban lévő ellenállások szorzata egyenlő.

Ha teljesül az $R_1 = R_2$ egyenlőség, akkor célszerű olyan R_V változtatható ellenállást használni, melynek ellenállása a középállásban megegyezik a mérőbélyeg ellenállásával.

Ha a mérendő alkatrészt megterheljük, akkor az R_M nyúlásmérő bélyeg megnyúlik, a híd elhanyagolódik, és a galvanométeren áram folyik. Ekkor az R_V ellenállást ismét addig változtatjuk, míg az $I_G = 0$ kiegyenlítetttség be nem áll. A hangolási értéket mindkét esetben a változtatható ellenállás skálájáról tudjuk leolvasni. A leolvasás különbsége megadja, mennyi az R_V ellenállásnak a

ΔR_V megváltozása a terheletlen állapothoz képest. Mivel $\Delta R_V = \Delta R_M = R_M k_o \varepsilon$, így ebből a mérőbéllyeg fajlagos nyúlása meghatározható.

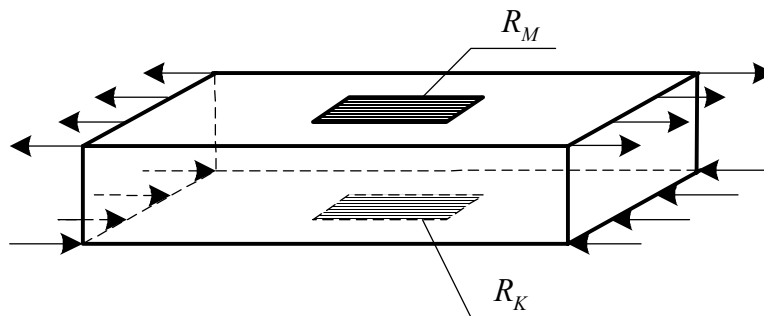
R_M értékére azonban a munkadarab hőmérsékletének változása is hatással van, ezt a hatást ki kell egyenlítenünk, kompenzálnunk kell. Annál is inkább, mert a munkadarabnak már néhány Celsius fokos melegezése olyan mértékben változtatja a mérőbéllyeg ellenállását, mint egy 10^{-5} nagyságrendű fajlagos nyúlás. Ekkora hőmérsékletváltozást pedig pusztán a munkadarab megvilágításával is okozhatunk. A 6. ábrán látható mérési elrendezésben a *Wheatstone-híd* két „félhídra” oszlik. A jobboldali félhíd a mérőerősítőben foglal helyet, a baloldali félhíd mindkét ellenállása egy-egy nyúlásmérő béllyeg.



A mérési elrendezés kompenzációval
6. ábra

R_M a mérendő alkatrész alakváltozását érzékeli a terhelés megjelenésekor, az R_K kompenzátor béllyeget pedig a mérendő alkatrész környezetében olyan helyre ragasztjuk, ahol nem ébred feszültség, nem jön létre nyúlás, de a hőmérséklet közel azonos a mérendő P pont környezetének hőmérsékletével. Ekkor a hőmérséklet változása miatt bekövetkező ellenállás-változások: ΔR_M és ΔR_K azonos értékűek. Így a szemben lévő hídágakban az ellenállások szorzata azonos marad, nem szűnik meg a híd kiegyenlítettisége. Ezzel tehát kikompenzáltuk a hőmérsékletváltozás hatását. A 6. ábra bal oldalán látható R_M - R_K kapcsolást fél hídkapcsolásnak nevezzük.

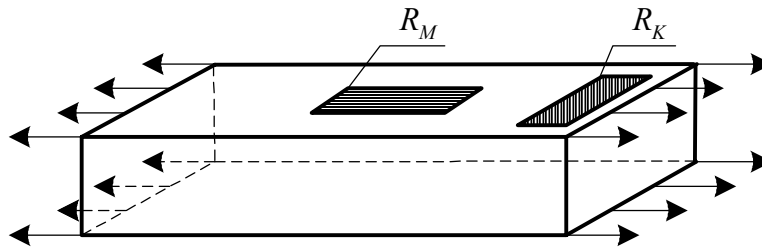
Az 7. és 8. ábrán a hőmérséklet-kompenzált nyúlásmérés gyakorlati megvalósítása látható rudak két legegyszerűbb igénybevételére: hajlításra és húzás-nyomásra.



Hőmérséklet-kiegyenlítés hajlítás esetén
7. ábra

Ha a rúd igénybevétele tiszta egyenes hajlítás, akkor a két mérőbéllyeg alkalmazása maradéktalanul kompenzálja a hőmérséklet változásának hatását, hiszen a híd szomszédos ágaiban vannak. Az alakváltozásból eredő ellenállás-változásaik viszont összeadódnak, az R_M -mel jelölt mérőbéllyeg ugyanis nyúlik, vagyis ellenállása nő, míg az R_K -val jelölt hossza és ezzel ellenállása csök-

ken. Így a híd kiegyenlítése után leolvasott ellenállás-változást osztani kell kettővel, hogy az R_M ellenállású mérőbéllyegnél fellépő fajlagos nyúlást kiszámíthassuk.



*Hőmérséklet-kiegyenlítés húzás-nyomás esetén
8. ábra*

Ha a rúd igénybevétele húzás-nyomás, akkor a hőmérséklet-változást teljesen kikompenzálhatjuk a 8. ábra szerinti elrendezésben. A próbatestnek a terhelés irányára merőleges méretei és ezzel az R_K jelű bélyeg hossza csökkennek, amit a nyúlásmérés kiértékelésekor figyelembe kell venni. A

Wheatstone-híd kiegyenlített állapota $R_V = R_1 \frac{1+k_0\varepsilon_z}{1-k_0\nu\varepsilon_z}$ esetén következik be, ami a magasabb

rendű tagok elhanyagolásával az $R_V = R_1 [1+(1+\nu)k_0\varepsilon_z]$ kifejezéssé egyszerűsödik. Az így kapott nyúláseredményt tehát $(1+\nu)$ -vel osztani kell, hogy a ténylegesen bekövetkezett nyúlást megkapjuk (ν a Poisson-tényező).

A legmodernebb nyúlásmérő bélyegek bizonyos esetekben egyáltalán nem igénylik a hőmérsékletkiegyenlítést. A vezetőréteg anyagának gondos megválasztásával ugyanis elérhető, hogy a bélyeg anyagának a hőmérsékletváltozás miatt bekövetkező ellenállás-változása ugyanakkora abszolút értékű, de ellentétes előjelű legyen, mint az a változás, ami a mérendő alkatrész hőmérsékletváltozás okozta tágulásából ered. Ha tehát valóban olyan hőtágulású anyagból készült alkatrészt vizsgálunk, amilyenre a speciális bélyeget tervezték, akkor a hőkompenzálás elmaradhat. Ezeknek a speciális bélyegeknek viszont komoly hátrányuk, hogy amennyiben nem a megfelelő anyagot vizsgáljuk velük, akkor teljesen hamis eredményt szolgáltathatnak. A hőkompenzálásra tehát különösen ügyelni kell, ha ismeretlen hőtágulású (ismeretlen anyagú) alkatrészt vizsgálunk. Semmiképpen nem alkalmazható hőkompenzáló bélyegként a mérőbéllyegtől eltérő típus, hiszen előfordulhat, hogy ezzel a kompenzálás helyett tovább növeljük a kiegyenlítetlenséget!

A fent leírt mérési elv az idők folyamán nem változott, de a mérőműszerek lényegesen korszerűbbek lettek. Az egyenáramú műszerek helyett váltóáramú ún. vivőfrekvenciás mérőerősítőket használunk. A hidat csak a mérés kezdetén kell kiegyenlíteni, s a kijelző skálát úgy is kalibrálhatjuk, hogy nyúlás helyett a feszültséget mutassa. A mérőműszerek egyszerre több mérőbéllyeget is ki tudnak szolgálni. (A többcsatornás mérőerősítő általában 6 vagy 12 csatornás, de létezik 100 csatornás mérőerősítő is.) A laboratóriumi gyakorlaton egy *Hottinger-Baldwin Messtechnik GmbH* által gyártott *Quantum 840* típusú számítógépes 6, illetve 12 csatornás mérő és méréskiértékelő műszercsoportot használunk. A csatornák egy része hőfokmérésre, illetve elmozdulás mérésre használható.

3. Felületi alakváltozási- és feszültségi állapot meghatározása nyúlásméréssel

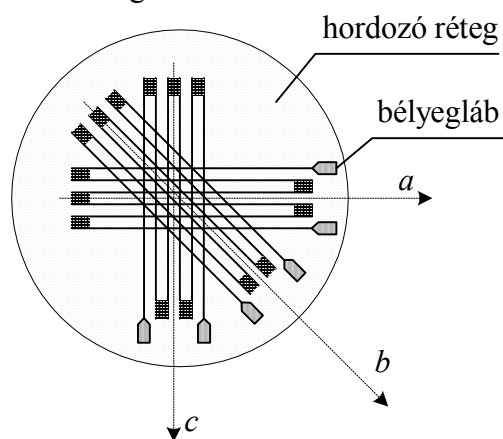
Az \vec{e}_z normálisú terheletlen felületen lévő P pont alakváltozási tenzorát már meghatároztuk:

$$\underline{\underline{A_P}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

A tenzor koordinátái közül csak öt nem egyenlő nullával, és ezek sem mind függetlenek egymástól: $\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$, $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$. (Első összefüggés a $\sigma_z = 0$ egyenlőségből, a második az alakváltozási tenzor szimmetriájából következik.) Hasonló módon kapjuk az \vec{e}_y normálisú, terheletlen felületen fekvő pontok alakváltozási tenzorát:

$$\underline{\underline{A_P}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

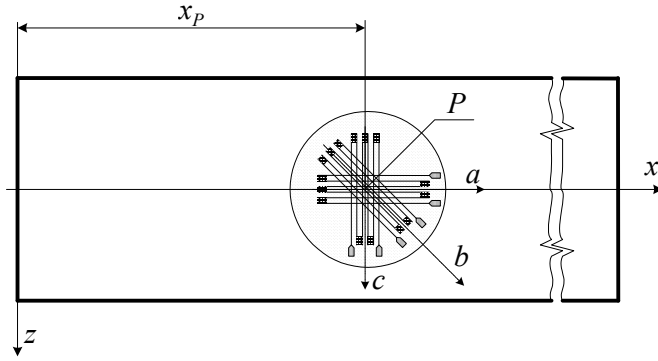
Tehát az alkatrész terheletlen felületén lévő tetszőleges pont alakváltozás-állapotát meghatározhatjuk az adott pontban végzett három egymástól független nyúlásmérés segítségével. Erre a feladatra fejlesztették ki az úgy nevezett rozettákat. A rozetták olyan összetett nyúlásmérő bélyegek, amelyek ugyanabban a pontban több különböző mérési irányban mérik a fajlagos nyúlást. A mérőbélyegek mérési irányának egymással bezárt szöge a gyakorlatban 45° , vagy 60° . Az előbbi esetre meghatározzuk az alakváltozási tenzor koordinátáinak kiszámítási módját.



45°-os rozetta
9. ábra

A rozetta három, egymás fölé rétegzett nyúlásmérő bélyegből áll. A mérési irányok (a , b , c) egymással 45° -t, illetve 90° -t zárnak be. A mérőbélyegek középpontjai pontosan egymás fölött vannak, ezért a három mérőbélyeg a három mérési irányban bekövetkezett fajlagos nyúlást ugyanannak a pontnak kis környezetében méri! A nyúlásmérő bélyegeket a „bélyeglábakra” forrasztott kivezetésekkel csatlakoztathatjuk a mérőerősítőhöz. A mérendő alkatrész felületére a speciális ragasztóval a hordozó réteget kell rögzíteni.

Ha a hajlított, nyírt tartó felső és/vagy alsó felületén kialakuló alakváltozást vizsgáljuk, akkor a rozettát a 10. ábra szerint elrendezésben ragasztjuk az alkatrészre.



A tartóra ragasztott rozetta a $P(x_p, b/2, 0)$ pont kis környezetében méri az a, b, c irányú fajlagos nyúlásokat. A rozetta irányításából következik, hogy $\varepsilon_a = \varepsilon_x$ és $\varepsilon_c = \varepsilon_z$.

45°-os rozetta a hajlított, nyírt tartó felső felületén
10. ábra

A b irányú fajlagos nyúlást pedig kifejezhetjük az alakváltozási tenzor fenti alakjából: $\varepsilon_b = \vec{n}_b \cdot \vec{\alpha}_b = \vec{n}_b \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{n}_b$, ahol \vec{n}_b a b irányú egységvektor, $\vec{\alpha}_b$ a b -re merőleges felületen fellépő alakváltozás-vektor.

$$\text{Ebben az esetben } \vec{n}_b = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Így } \vec{\alpha}_b = \begin{bmatrix} \varepsilon_a & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & 0 & \varepsilon_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_a + \frac{\sqrt{2}}{4}\gamma_{xz}; & 0; & \frac{\sqrt{2}}{4}\gamma_{zx} + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_c \end{bmatrix}.$$

$$\text{Végül } \varepsilon_b = \vec{n}_b \cdot \vec{\alpha}_b = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}; & 0; & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_a + \frac{\sqrt{2}}{4}\gamma_{xz}; & 0; & \frac{\sqrt{2}}{4}\gamma_{zx} + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_c \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{\varepsilon_c}{2} + \frac{\gamma_{zx}}{2},$$

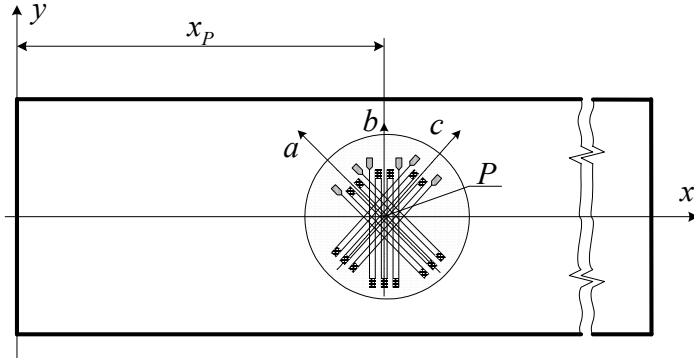
ahol már kihasználtuk az alakváltozási tenzor szimmetriáját ($\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$). Kifejezhetjük a fajlagos szögtorzulást: $\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c)$. A vizsgált felületre merőleges ε_y fajlagos nyúlást a

felület terheletlen voltából számíthatjuk: $\varepsilon_y = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_z) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_a + \varepsilon_c)$. Tehát, ha a három, egymással 45°-os szöget bezáró fajlagos nyúlást a mérésből meghatározzuk, akkor az alakváltozási tenzor minden koordinátáját kiszámíthatjuk.

Az alakváltozási tenzor ismeretében mód nyílik a feszültségi tenzor meghatározására is, a Hooke-törvény segítségével:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_a + \nu\varepsilon_c) & \sigma_y &= 0 \\ \sigma_z &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_c + \nu\varepsilon_a) & \tau_{yx} &= \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}[2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c)] & \tau_{yz} &= \tau_{zy} = 0 \end{aligned}$$

Ha a hajlított, nyírt tartó oldal-felületén kialakuló alakváltozást vizsgáljuk, akkor a rozettát a 11. ábra szerinti elrendezésben ragasztjuk az alkatrészre.



A tartóra ragasztott rozetta a $P(x_p, 0, a/2)$ pont kis környezetében méri az a, b, c irányú fajlagos nyúlásokat. A rozetta irányításából következik, hogy $\varepsilon_b = \varepsilon_y$.

45°-os rozetta a hajlított, nyírt tartó oldal-felületén
11. ábra

Az a és c mérési irányok irány-egységvektorai rendre

$$\vec{n}_a = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right], \quad \vec{n}_c = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right].$$

Az

előbb

követett

gondolatmenettel:

$$\varepsilon_a = \vec{n}_a \cdot \underline{\underline{A}}_P \cdot \vec{n}_a = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right] \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon_x}{2} + \frac{\varepsilon_y}{2} - \frac{\gamma_{xy}}{2},$$

valamint:

$$\varepsilon_c = \vec{n}_c \cdot \underline{\underline{A}}_P \cdot \vec{n}_c = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right] \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon_x}{2} + \frac{\varepsilon_y}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2}.$$

Figyelembe véve, hogy $\varepsilon_b = \varepsilon_y$, megoldhatjuk az egyenletrendszert: $\varepsilon_x = \varepsilon_a + \varepsilon_c - \varepsilon_b$ és

$\gamma_{xy} = \varepsilon_c - \varepsilon_a$. Az \vec{e}_z irányú fajlagos nyúlást a $\vec{\rho}_z = \vec{0}$ egyenletből, vagyis a felület terheletlen

voltából kapjuk: $0 = \sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]$, amiből: $\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_a + \varepsilon_c)$ adódik.

Ismerve az alakváltozási tenzort, a Hooke-törvény segítségével meghatározhatjuk a feszültségi tenzort is:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_a + \varepsilon_c - (1-\nu)\varepsilon_b] \quad \sigma_z = 0$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} [\nu(\varepsilon_a + \varepsilon_c) + (1-\nu)\varepsilon_b] \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} (\varepsilon_c - \varepsilon_a) \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$$

A 11. ábrán látható, hogy a rozetta bélyegeinek mérési irányai a vízszintessel 45° -t, 90° -t, illetve 135° -t zárnak be. Ennek az elrendezésnek a hasznossága kiderül a következő számításból. A $P(x_p, 0, a/2)$ pontban az alakváltozási tenzor a következő:

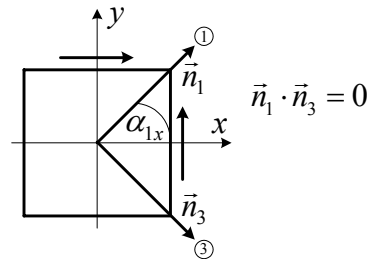
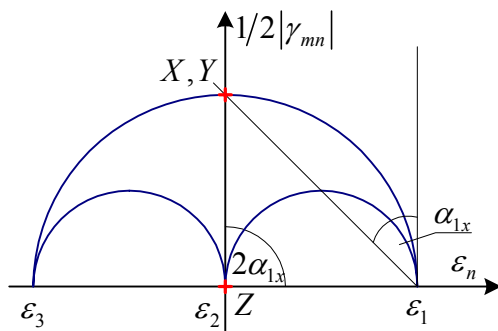
$$\underline{A_P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ ugyanis}$$

$$\varepsilon_x(x, y) = \frac{\sigma_x(x, y)}{E} = \frac{12F(l-x)}{Eab^3} y = 0$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = 0$$

$$\gamma_{xy}(y) = \gamma_{yx}(y) = 2\frac{1+\nu}{E}\tau_{xy} = -2\frac{1+\nu}{E}\frac{F}{A}\left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{b^2}\right) = -3\frac{1+\nu}{E}\frac{F}{A}$$

Az alakváltozási tenzorból leolvasható az egyik főnyúlás, az $\varepsilon_z = 0$ és a hozzá tartozó alakváltozási főirány, az \vec{e}_z . A Mohr-féle kördiagram megrajzolható, ha egy főnyúlást már ismerünk:



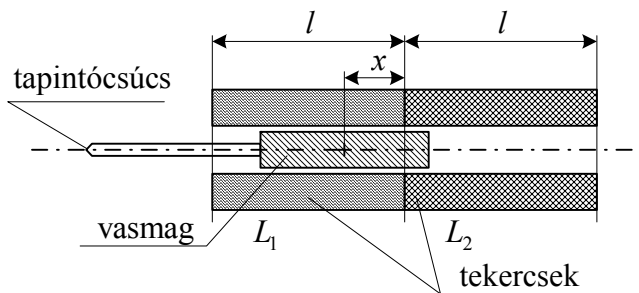
A Mohr-féle kördiagram és a sajátvektorok szemléltetése

A főnyúlások értéke az ábráról leolvasható: $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}|\gamma_{xy}|$, $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 = -\frac{1}{2}|\gamma_{xy}|$. A főnyúlásokhoz tartozó alakváltozási főirányok rendre: $\vec{n}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$, $\vec{n}_2 = \vec{e}_z$, $\vec{n}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_x - \vec{e}_y)$, ugyanis $\alpha_{1x} = 45^\circ$. Látható, hogy a rozetta a és c mérési iránya megegyezik az alakváltozási főirányokkal. Ezekben az irányokban tehát a $\pm 1/2\gamma_{xy}$ főnyúlásokat mérhetjük. A középső bélyeg viszont $\varepsilon_b = 0$ -t szolgáltat. Várakozásaink szerint tehát a és c irányban egymás ellentétét, b irányban pedig nullát kapunk.

4. Elmozdulásmérés induktív útdóval

Méréseink során egyes esetekben olyan kis elmozdulásokat kell pontosan megmérni, melyek szabad szemmel esetleg észre sem vehetők. Az ilyen kis elmozdulások mérésére induktív elmozdulás-mérőt, vagy a műszaki gyakorlatban elterjedt nevén: induktív útdót használunk.

Az induktív útdó működése azon alapul, hogy egy tekercs induktivitása megnövekszik, ha ferromágneses anyagból készült tárgy közeledik hozzá. Acéltárgyak elmozdulását tehát már egy egyszerű tekercs segítségével is mérhetnénk, azonban az induktivitás a távolságnak nem lineáris függvénye, továbbá a zajszint és a pontosság rendkívüli mértékben függene a távolságtól. A gyakorlatban az úgynevezett tapintós, kettőstekercsű induktív útdó rendelkezik megfelelő linearitással és nagy mérési tartománnyal.



A két tekercs belsejében mozgó vasmag pillanatnyi helyzetétől függ az L_1 és L_2 tekercs induktivitása, valamint a két tekercs M kölcsönös induktivitása.

Tapintós kettőstekercsű induktív úradó
12. ábra

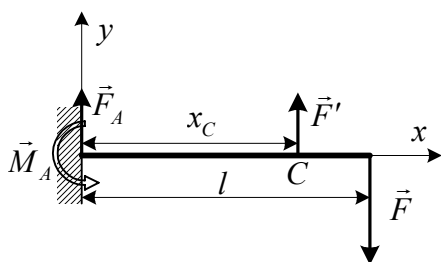
A tekercsek L_1 és L_2 induktitásából, valamint az M kölcsönös induktitásból meghatározható a vasmag x elmozdulása a 12. ábrán látható középhezsettől: $x = \alpha \frac{L_1 - L_2}{L_1 + L_2 + 2M} = \alpha K$, ahol α a

készülékre jellemző állandó. A $K = \frac{L_1 - L_2}{L_1 + L_2 + 2M}$ mennyiség ugyanis – szemben magukkal az

L_1 , L_2 , M induktitásokkal - széles tartományon belül lineáris függvénye az x elmozdulásnak. A mérőerősítő a szükséges induktitások mérése után közvetlenül szolgáltatja az x elmozdulást. De kielégítő pontosságot érhetünk el a két tekercs félhídba kapcsolásával is, ahogy a nyúlásmérő bélyeg hőmérsékletkompenzálásánál tettük. Ekkor a két induktitás különbségét mérjük és ez a vasmag elmozdulásával arányos, feltéve, hogy ez az elmozdulás kicsi az úradó tekercseinek hosszához képest. Mivel éppen a rendkívül kicsi (legfeljebb tized, vagy század milliméternyi) elmozdulások mérése a célunk, ez a feltétel teljesül, hiszen a tekercsek 5-10 cm hosszúak.

5. Hajlított, nyírt tartó tetszőleges pontjának lehajlása

A befalazott és megterhelt tartó pontjai elmozdulnak. Ezeket az elmozdulásokat kiszámíthatjuk a Castigliano-tétel (kiejtve: Kasztiliánó) segítségével. A Castigliano-tételnek most az $u_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}$ alakját használjuk, amely kimondja, hogy a szerkezetet terhelő F_i erő támadáspontjának az F_i erő irányába eső elmozdulása egyenlő a szerkezet alakváltozási energiájának az F_i erő szerint vett deriváltjával. Ha a tartó olyan pontjának y irányú elmozdulását szeretnénk számolni, ahol terhelés nem lép fel, akkor felvesszünk egy, a vizsgált pontban fellépő tetszőleges erőt, majd a számítások (a fajlagos energia integrálása és a feltételezett tetszőleges erő szerinti deriválás) elvégzése után ezt az erőt nullával vesszük egyenlőnek, megfelelően a tényleges helyzetnek.



A tartó tetszőleges C pontja függőleges elmozdulásának számításához felvesszük a C pontban ható, $\vec{F}' = F' \vec{e}_y$ erőt. A Castigliano-tétel szerint:

$$v_C = \frac{\partial U}{\partial F'} \Big|_{F'=0} = \frac{\partial}{\partial F'} \int_0^l \frac{1}{2} \frac{M_{hz}^2}{EI_z} dx \Big|_{F'=0}$$

Az alakváltozási energia számításakor figyelmen kívül hagyjuk a nyírási energiát. Ezt azért tehetjük meg, mert a nyírási energia rúdszerkezetek esetén rendszerint elhanyagolható a hajlításból, csavarásból, illetve húzás-nyomásból származó energia mellett. Téglalap keresztmetszetű tartónak a fenti terhelését feltételezve a nyírásból és a hajlításból származó alakváltozási energia

hányadosa: $\frac{U_{nyírás}}{U_{hajlítás}} = \frac{b^2}{4l^2}$, ami a tartó méreteit figyelembe véve lényegesen kisebb egy ezrednél

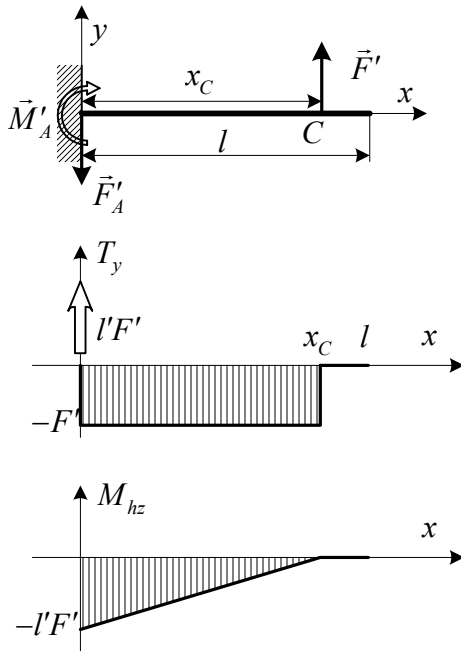
is. A nyírési energia elhanyagolása tehát teljesen indokolt. A hajlító nyomaték az eredeti \vec{F} terhelésből fakadó és a feltételezett \vec{F}' erőből fakadó nyomaték összege és hasonló összefüggés teljesül a nyíróerőre is:

$$M_{hz}(x, F') = M_0(x) + F'm(x), \quad T_y(x, F') = T_0(x) + F't(x)$$

A hajlító nyomatékot v_C fenti kifejezésébe beírva és figyelembe véve, hogy az x szerinti integrálás és az F' szerinti parciális deriválás felcserélhetők, végül érvényesítve, hogy $F' = 0$ és hogy $M_0(x)$ nem függ F' -től, a következőt kapjuk:

$$v_C = \frac{1}{2EI_z} \int_0^l \frac{\partial (M_0^2(x) + 2F'm(x)M_0(x) + F'^2m^2(x))}{\partial F'} dx \Bigg|_{F'=0} = \frac{1}{EI_z} \int_0^l M_0(x)m(x) dx.$$

Az integrálás elvégzéséhez szükség van még az $m(x)$ függvényre.



Ha a tartóra csak az \vec{F}' erő hatna, akkor a 13. ábrán látható támasztó-erőrendszer tartaná egyensúlyban.

Az így kialakuló erőrendszer a tartón a következő igénybevételt eredményezné. A nyomatéki ábráról leolvasható a keresett $m(x)$ függvény: $m(x) = \begin{cases} -(l-x); & \text{ha } x \leq l \\ 0; & \text{ha } x > l \end{cases}$

Ennek a függvénynek a korábban már felírt $M_{hz}(x) = F(l-x)$ függvénnyel vett szorzatát kell integrálni x szerint nullától l -ig, majd osztani EI_z -vel.

$$\text{Az eredmény: } v_C = -\frac{x_C^2(6l-2x_C)}{Eab^3} F$$

A C pontban ható, tetszőleges \vec{F}' erőhöz tartozó igénybevételi ábrák
13. ábra

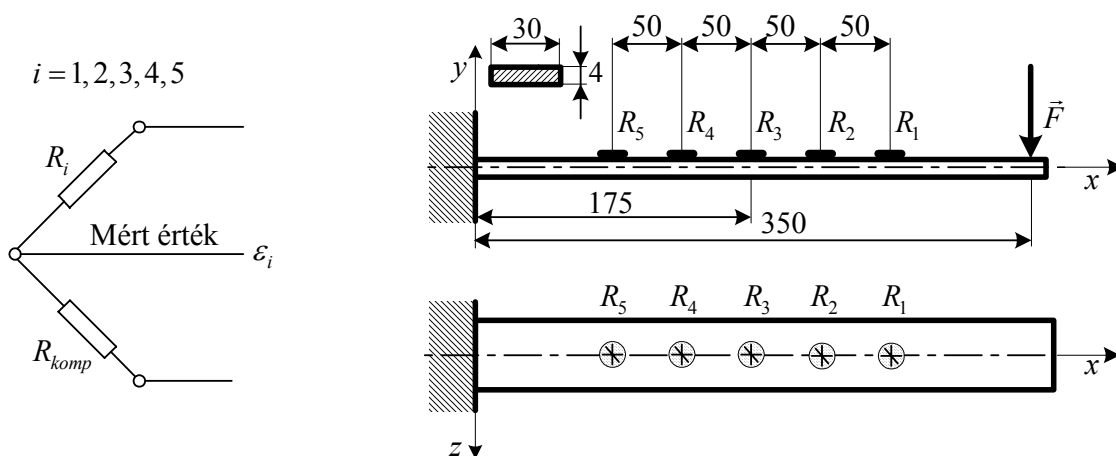
A tartó C pontjának függőleges elmozdulása a méretektől és az alkalmazott terheléstől függően nagyon kicsi is lehet: szabad szemmel észre sem vehető. Mérése csak induktív útdó használatával lehetséges.

6. A mérések leírása

6.1. Normál feszültség meghatározása hajlított-nyírt tartón

A nyúlásmérő bélyeg alkalmazásával a befalazott, hajlított-nyírt tartó felső felületének alakváltozását vizsgáljuk a terhelés függvényében. A 14. ábrán látható, egyik végén befogott, téglalap

keresztmetszetű tartót különböző nagyságú súlyokkal terheljük. A súlyterhelésből származik a tartó \vec{F} terhelése. A tartó pontjaiban tehát nyírás és hajlítás egyidejűleg fellép.



A laboratóriumi mérés vázlatja

14. ábra



A laboratóriumi mérés oldal- és felülnézetben

15. ábra

Mérési feladat:

- Adott terhelésre nyúlásméréssel meghatározni a felső felület öt megadott pontjában a feszültségi állapotot, vagyis a feszültségi tenzort. (A tartó anyagának rugalmassági modulusát és Poisson-tényezőjét ismerjük: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0,3$.)
- A rúdelmélet alapján számítással meghatározni a feszültségi állapotot ugyanabban az öt pontban, ugyanazzal a terheléssel. A számításokat összehasonlítjuk a mért értékekkel.
- A mérési eredményekből is és a rúdelmélet alapján számoltakból is megrajzolni a tartó adott szakaszára az $M_{hz}(x)$ nyomatéki ábrát.
- Három különböző terhelésre mind az öt pontban méréssel felvenni az $\varepsilon_x = \varepsilon_x(\sigma_x)$ diagramot.
- A tartó lehajlását egy adott pontban (az induktív útdóval vizsgált pontban) számítással meghatározni a Castigliano-tétel segítségével mindhárom terhelés esetére.

- A tartó lehajlását egy adott pontban megmérni a három különböző terhelés esetén és összehasonlítani a Castigliano-tétellel számítottakkal.

A mérés menete tehát a következő:

1. A terheletlen (pontosabban a csak a saját súlyával terhelt) tartón lévő mérőbélyegekhez kapcsolódó *Wheatstone*-hidakat kiegyenlítettjük a mérőerősítővel.
2. Az ismert súllyal megterheljük a tartót és a beálló új egyensúlyban leolvassuk a mérőbélyegeknél tapasztalt fajlagos nyúlásokat és az induktív útdó által szolgáltatott lehajlást.
3. A terhelést levesszük és még terheletlenül ismét kiegyenlítettjük a *Wheatstone*-hidakat.

Ugyanezeket a lépéseket elvégezzük mindhárom terhelés esetében.

A méréssorozat eredményeként tizenöt-ször három fajlagos nyúlás értékhez és három lehajlás-értékhez jutunk. (Minden rozetta három fajlagos nyúlás értéket szolgáltat mind az öt helyen és mind a három súly esetén.)

A mérési eredmények kiértékelése a következőképpen történik:

1. A harmadik fejezet első felében leírtak szerint meghatározzuk az öt pont feszültségi tenzorát a három különböző terhelés esetén. Várakozásaink szerint a tenzoroknak csak a σ_x koordinátája nem lesz zérus. A korlátozott mérési pontosság miatt a többi koordinátára sem feltétlenül kapunk nullát, de nagyságrendekkel kisebb számot, mint σ_x -re. Az eredmények közlésekor adjuk meg a relatív hibát is a hetedik fejezetben írtak alapján. Figyelmeztetés: ne „kozmetikázzuk” a mérési eredményeket abból a célból, hogy a várakozásoknak megfelelő eredmény jöjjön ki! A mérési pontatlanság a mérés természetes velejárója, melyet nem elfedni, hanem korrekten kezelni és a mérés fejlesztésével csökkenteni kell!
2. A terhelések ismeretében, a rúdelmélet segítségével számítással is meghatározzuk ezeket a tenzorokat. Természetesen itt valóban csak σ_x koordinátákat kapunk, vagyis a feladat ennek a tizenöt normálfeszültségnek a kiszámítása.
3. A nyomatóki ábrák megrajzolása során a három terhelés esetét külön-külön koordináta-rendszerben ábrázoljuk. Így három ábrát kapunk, mindegyikben két-két görbét (várakozásaink szerint egyenest). Egyiket a rúdelméletből számítjuk (az első fejezet második része alapján), másikat a mérési eredményeinkből számítjuk a következő egyszerű képlet alapján: $M_{hz}(x) = \sigma_x(x)K_z = \sigma_x(x)\frac{I_z}{b/2} = \sigma_x(x)\frac{ab^2}{6}$. A „csaknem” egy egyenesre illeszkedő pontokra egyenest kell illeszteni a hetedik fejezetben részletezett legkisebb négyzetek módszerével.

4. Az öt vizsgált pont $\varepsilon_x = \varepsilon_x(\sigma_x)$ függvényének előállítását a következőképpen történik: a fajlagos nyúlás értékeit a nyúlásmérő bélyegek szolgáltatják, a normál feszültséget pedig a terhelés és a geometriai méretek ismeretében számoljuk:

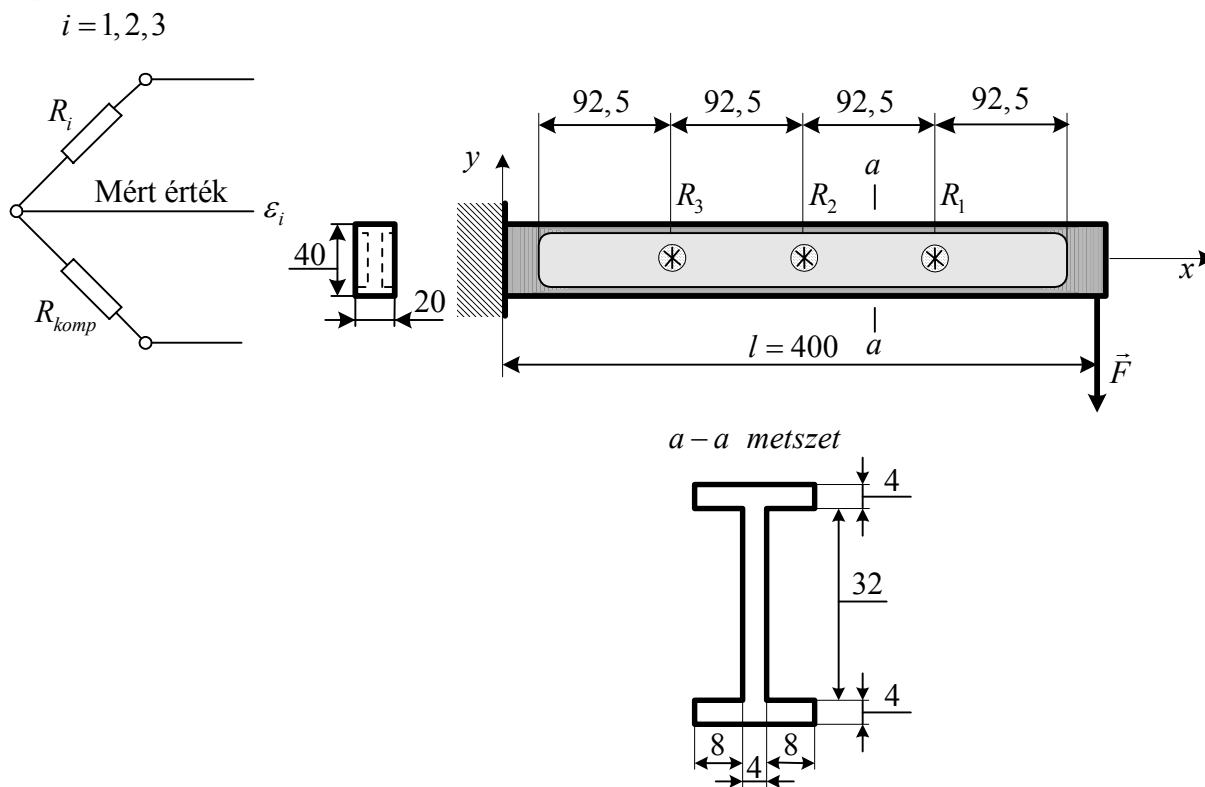
$$\sigma_x(x) = \frac{F(l-x)}{I_z} \frac{b}{2} = F(l-x) \frac{6}{ab^2}$$

delkezésünkre a három terhelésből. Erre a három eredményre kell egyenest illeszteni a hetedik fejezetben részletezett legkisebb négyzetek módszere alapján. Az öt pontra öt egyenest kapunk. Az egyenesek meredeksége egyenlő a rugalmassági modulus reciprokával. Várakozásaink szerint ez nem függ a pont helyétől, tehát az öt egyenest párhuzamosnak, sőt azonosnak várjuk.

5. Ábrázoljuk a $v_c = v_c(F)$ függvényt a negyedik fejezetben részletezett elmélet szerint és a mérések szolgáltatja három érték segítségével is. A három pontra egyenest kell illeszteni a hetedik fejezetben részletezett legkisebb négyzetek módszerével.

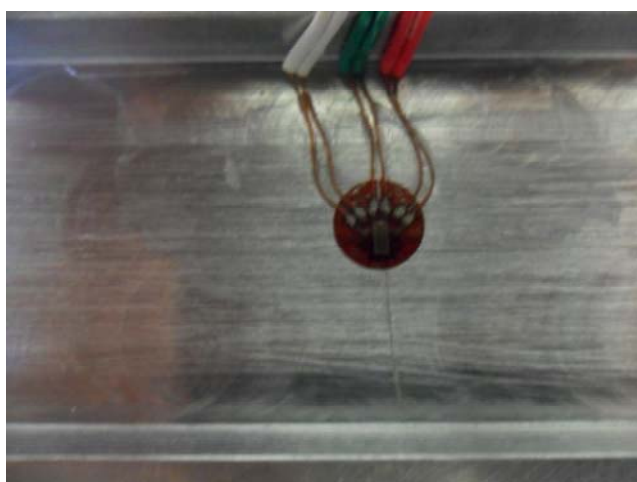
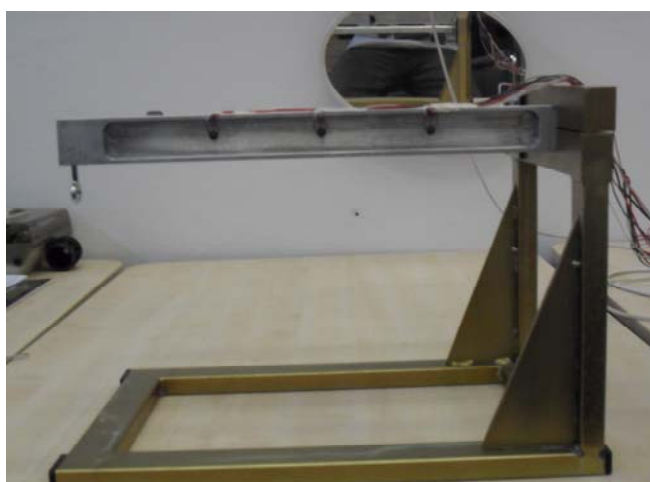
6.2. Csúszató feszültség meghatározása hajlított-nyírt tartón

A nyúlásmérő bélyeg alkalmazásával a befalazott, hajlított-nyírt tartó oldal felületének alakváltozását vizsgáljuk a terhelés függvényében. A 16. ábrán látható, egyik végén befogott I-tartót különböző nagyságú súlyokkal terheljük. A tartó pontjaiban tehát nyírás és hajlítás egyidejűleg fellép.



A laboratóriumi mérés vázlatja

16. ábra



A laboratóriumi mérés oldalnézetben, a felragasztott rozetta és bekötése

17. ábra

Mérési feladat:

- Adott terhelésre nyúlásméréssel meghatározni az oldal-felület három megadott pontjában a feszültségi állapotot, vagyis a feszültségi tenzort. (Az alumínium-ötvényből készült tartó anyagának rugalmassági modulusát és Poisson-tényezőjét ismerjük: $E = 6,87 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, $\nu = 0,34$.)
- A rúdelmélet alapján számítással meghatározni a feszültségi állapotot ugyanabban a három pontban, ugyanazzal a terheléssel. A számítások összehasonlítása a mért értékekkel.
- A mérési eredményekből is és a rúdelmélet alapján számoltakból is megrajzolni a tartó adott szakaszára a $T_y(x)$ nyíróerő ábrát.
- Három különböző terhelésre mind a három pontban mérésel felvenni a $\gamma_{xy} = \gamma_{xy}(\tau_{xy})$ diagramot. A három terhelést egy 6 kg-os, egy 12 kg-os és egy 18 kg-os súly szolgáltatja. A súlyerő meghatározásakor $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ nehézségi gyorsulással számoljunk!

A mérés menete tehát a következő:

1. A terheletlen (pontosabban a csak a saját súlyával terhelt) tartón lévő mérőbéllyegekhez kapcsolódó *Wheatstone*-hidakat kiegyenlítettük a mérőerősítővel.
2. Az ismert súllyal megterheljük a tartót és a beálló új egyensúlyban leolvassuk a mérőbéllyegeknel tapasztalt fajlagos nyúlásokat.
3. A terhelést levesszük és még terheletlenül ismét kiegyenlítettük a *Wheatstone*-hidakat.

Ugyanezeket a lépéseket elvégezzük mindhárom terhelés esetében.

A méréssorozat eredményeként kilencszer három fajlagos nyúlás értékhez jutunk. (Minden rozetta három fajlagos nyúlás értéket szolgáltat mind a három helyen és mind a három súly esetén.)

A mérési eredmények kiértékelése a következőképpen történik:

1. A harmadik fejezet második felében leírtak szerint meghatározzuk a három pont feszültségi tenzorát a három különböző terhelés esetén. Várakozásaink szerint a tenzoroknak csak a τ_{yx} (és természetesen a τ_{xy}) koordinátájára nem fogunk 0-át kapni. A korlátozott mérési pontosság miatt a többi koordinátára sem feltétlenül kapunk nullát, de nagyságrendekkel kisebb számot, mint τ_{yx} -re. Az eredmények közlésekor adjuk meg a relatív hibát is a hetedik fejezetben írtak alapján. Figyelmeztetés: ne „kozmetikázzuk” a mérési eredményeket abból a célból, hogy a várakozásoknak megfelelő eredmény jöjjön ki! A mérési pontatlanság a mérés természetes velejárója, melyet nem elfedni, hanem korrekten kezelni és a mérés fejlesztésével csökkenteni kell!

2. A terhelések ismeretében, a rúdelmélet segítségével számítással is meghatározzuk ezeket a tenzorokat. Természetesen itt valóban csak τ_{yx} koordinátákat kapunk, vagyis a feladat ennek a tizenhét csúsztató feszültségnek a kiszámítása. (Valójában egyszerűbb a helyzet amiatt, hogy a feszültségi tenzor szimmetrikus és a csúsztató feszültség nem függ az x -től.) A csúsztatófeszültségre itt alkalmazandó képletet a csúsztató feszültségre általánosan érvényes $\tau_{yx}(y) = -\frac{T_y S_z(A')}{I_z a(y)}$ összefüggésből vezethetjük le, ahol T_y a nyíróerő,

$S_z(A')$ a keresztmetszetnek z tengelytől y -nál messzebbre lévő részének (ezt jelöli A') statikai nyomatéka, I_z a keresztmetszet z tengelyre számított másodrendű nyomatéka és $a(y)$ a keresztmetszet szélessége (z irányú kiterjedése) az y függvényében. A keresztmetszet nyomatékait a Steiner-tétel felhasználásával számíthatjuk:

$$I_z = \frac{32^3 \cdot 4}{12} + 2 \left(\frac{4^3 \cdot 20}{12} + 18^2 \cdot 4 \cdot 20 \right) = 62\,976 \text{ mm}^4, \quad \text{illetve}$$

$S_z(A') = 8 \cdot 4 \cdot 16 + 18 \cdot 20 \cdot 4 = 1952 \text{ mm}^3$, ahol figyelembe vettük, hogy $y = 0$, vagyis A' a keresztmetszet felső fele. Mivel $y = 0$ esetén $a(y) = 4 \text{ mm}$, így kapjuk a

$$\tau_{yx} \Big|_{y=0} = -\frac{T_y}{A_T} \text{ összefüggést, ahol } A_T = 129,05 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.$$

3. A nyíróerő ábrák megrajzolása során a három terhelés esetét külön-külön koordináta-rendszerben ábrázoljuk. Így három ábrát kapunk, mindegyikben két-két görbét (várakozásaink szerint egyenest). Egyiket a rúdelméletből számítjuk (az első fejezet második része alapján: $T_y(x) = F$), másikat a mérési eredményeinkből számítjuk a következő egyszerű képlet alapján: $T_y(x) = -\tau_{xy}(x) \cdot A_T$. A „csaknem” egy egyenesre illeszkedő pontokra egyenest kell illeszteni a hetedik fejezetben részletezett legkisebb négyzetek módszerével.

4. A három vizsgált pont $\gamma_{yx} = \gamma_{yx}(\tau_{yx})$ függvényének előállítására a következőképpen történik: a fajlagos szögtorzulás értékeit a nyúlásmérő bélyeges mérés szolgáltatja, a csúsztató feszültséget pedig a terhelés és a geometriai méretek ismeretében számoljuk:

$$\tau_{yx} = \frac{-T_y}{A_T}. \text{ Minden mérési pontban három mérési adat áll a rendelkezésünkre a három}$$

terhelésből. Erre a három eredményre kell egyenest illeszteni a hetedik fejezetben részletezett legkisebb négyzetek módszere alapján. A három pontra három egyenest kapunk.

Az egyenesek meredeksége egyenlő a $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ csúsztató rugalmassági modulus

reciprokával. Várakozásaink szerint ez nem függ a pont helyétől, tehát a három egyenest párhuzamosnak, sőt azonosnak várjuk.

7. Hibaszámítás, mérési eredmények kiértékelése, egyenes illesztése

7.1. A hibák keletkezése és terjedése

Minden mérés hibával terhelt. Egyrészt előfordulhatnak emberi mulasztások, tévedések, másrészt tudomásul kell vennünk, hogy a mérőeszközeink pontossága is korlátozott. Ha pedig a felhasznált adatok és méretek sem tetszőlegesen pontosak, akkor a mérési eljárás végeredményétől sem várhatjuk el a tökéletes egyezést a valóságos értékekkel.

A hiba és a hibaterjedés korrekt figyelembe vételéhez definiálnunk kell a relatív hiba fogalmát:

Az x fizikai mennyiség mérésének relatív hibája alatt a $h_x = \frac{x_{\text{mért}} - x}{x}$ számot értjük. Minthogy x

valódi értékét nem ismerjük, hiszen éppen azt szeretnénk minél pontosabban megmérni, a mérés relatív hibáját definíciójából nem számolhatjuk, csupán a mérőeszköz ismert pontosságából becsülhetjük.

Például, ha egy körülbelül öt centiméter hosszú fémtárgy pontos hosszára vagyunk kíváncsiak és közönséges vonalzó áll a rendelkezésünkre, akkor aligha mérhetjük meg pontosabban, mint fél milliméter. Például leolvashatjuk, hogy a tárgy hossza 52 mm, de tudnunk kell, hogy a keresett hosszúság valójában 51,5 és 52,5 mm között bármennyi lehet: $l = 52 \text{ mm} \pm 0,5 \text{ mm}$. Ebben az

esetben $h = \frac{0,5 \text{ mm}}{52 \text{ mm}} = 0,0096 = 0,96\%$. Tolómérce alkalmazásával egy nagyságrendet javítha-

tunk a pontosságon, vagyis a relatív hiba a tizedére csökkenhet.

Amennyiben a többé-kevésbé pontos adatokkal további matematikai műveleteket is végzünk, akkor figyelembe kell venni a relatív hiba terjedési sajátosságait. Két mennyiség összeadásakor

az eredményt a relatív hibáik súlyozott átlaga fogja terhelni: $h_{összeg} = \frac{h_1 x_1 + h_2 x_2}{x_1 + x_2}$, ahol h_1 az x_1

mennyiség mérésének relatív hibája, h_2 az x_2 -é. Szorzáskor és osztáskor a relatív hibák összeg-
ződnek: $h_{szorzat} = h_{hányados} = h_1 + h_2$. Hatványozáskor a relatív hiba a hatványkitevővel szorzódik:

$h_{hatvány} = n \cdot h$, ahol n a hatványkitevő (gyökvonásnál törtszám). A legtragikusabb következménye

a kivonásnak lehet: $h_{különbség} = \frac{x_1 h_1 + x_2 h_2}{x_1 - x_2}$! Azonos nagyságrendű mennyiségek kivonásakor a

relatív hiba a sokszorosára nőhet.

Ennek fényében soha ne adjuk meg a végeredményt sok tizedes jeggyel, amennyiben már a geometriai méretek, vagy az elrendezés más paraméterei is csak kisebb pontossággal ismertek! Minden matematikai művelet során számoljuk ki az eredmény várható hibáját és a végeredmény közlésekor tüntessük fel, hogy az mekkora hibával terhelt!

Egyes esetekben gondot jelenthet az, hogy valójában nem tudjuk az ismertnek feltüntetett adatok relatív hibáját, hiszen nem mi mértük meg, így csak találgathatunk, hogy milyen pontosságú mérőeszköz használatával készültek. Ilyen esetekben az adat utolsó értékes jegye szolgálhat útmutatóul. Ha egy hosszúság $l = 3$ mm -ként van megadva, akkor ennek utolsó értékes jegye a 3, tehát valójában $l = 2,50 \dots 3,49$ mm, vagy $l = 3$ mm $\pm 0,5$ mm hosszról van szó. Ha ennél pontosabban ismerjük, akkor azt jelölni kell. Például $l = 3,0$ mm, ami egy nagyságrenddel pontosabb adatot takar: $l = 3,0$ mm $\mp 0,05$ mm, mert itt két értékes jegyet közöltünk! De még ez utóbbinak relatív hibája is több mint másfél százalék, ezért ennél pontosabb eredményben semmiféle számítás végén nem reménykedhetünk, ha a számítások ezt az adatot is felhasználják.

7.2. A konkrét mérési hibák és azok kezelése

A mérés pontatlanságai már a geometriai méretek ellenőrzése során megkezdődnek. A tartó hosszát nem tudjuk pontosabban mérni, mint egy tized milliméter. Ez legfeljebb ezreléknyi relatív hibát eredményez, csak hogy a vastagság mérése is hasonló abszolút hibával terhelt, ami csaknem százalékos relatív hibát jelent! A relatív hiba az abszolút hiba és a mért érték hányadosa. Például egy 20 mm-es szélesség mérésekor, ha a tolómérőről 0,05 mm pontossággal lehet leolvasni a méretet, akkor mondhatjuk, hogy a kérdéses szélesség: $a = 20,0 \pm 0,05$ mm. Az abszolút

hiba 0,05 mm, a relatív hiba pedig: $h_a = \frac{0,05}{20} = 0,0025$. Ez egy negyed százalék. Még rosszabb

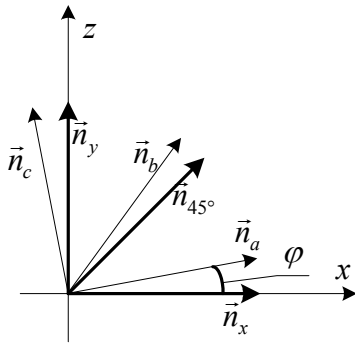
a helyzet, amikor például másodrendű nyomatékokat számolunk. Feltéve, hogy a vastagság ugyanilyen hibával terhelt és felhasználva a hibaterjedés korábban tárgyalt szabályait: $h_{I_z} = h_a + 3h_b = 0,01$.

A mérési eredmények mellett mindig fel kell tüntetni azt, hogy milyen pontosságúak. Például: $\sigma_x = 11,2$ MPa $\pm 4\%$, vagy – ami ezzel egyenértékű – $\sigma_x = 11,2$ MPa $\pm 0,448$ MPa. Így, ha számításaink alapján például $\sigma_x = 10,8$ MPa-t vártunk, elmondhatjuk, hogy a mérés eredménye összhangban van elvárásainkkal a mérési hibahatáron belül. Amennyiben a számításaink során hasonló nagyságú mérési eredményeket kell egymásból kivonnunk, a relatív hiba extrém értékűvé válhat. Ilyen esetekben nem a relatív hibát, hanem az abszolút hibát célszerű megadnunk: $\tau_{xz} = 0,04$ MPa $\pm 240\%$ helyett sokkal szemléletesebb a $\tau_{xz} = 0,04$ MPa $\pm 0,096$ MPa írásmód. Ez utóbbiból az is látható, hogy a kapott eredmény a mérési pontosságon belül a $\tau_{xz} = 0$ várt eredménnyel is egyezést mutat.

A laboratóriumi mérés során a hibák nemcsak a legfeljebb fél tized milliméter pontosságú geometriai méret-adatokból fakadnak. A terhelésként használt súlyok tömegét fél tizedgramm pontossággal ismerjük. Amennyiben a nehézségi gyorsulást $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ -nek vesszük, akkor ez körülbelül $\pm 5 \cdot 10^{-4}$ N abszolút hibát eredményez minden súlynál. Egy 1 N-os súlynál (kb. 10 dkg) például fél ezrelék relatív hiba adódik. Természetesen nagyobb súly használatakor a relatív hiba még kisebb.

Szintén hibával terhelt a számítások egy részéhez felhasznált rugalmassági modulus és Poisson-tényező. Ezek relatív hibája is kisebb egy ezreléknél.

A legveszélyesebb hibaforrás azonban a nyúlásmérő bélyeg! A mérőerősítő ugyan négy, vagy akár öt értékes jeggyel jelzi ki a mért nyúlást, ez azonban félrevezető lehet. Méréseink során feltételezzük, hogy a mérőbélyegek egymással és a tartó hossz tengelyével tökéletesen párhuzamosan vannak a tartó oldalára, vagy tetejére ragasztva. A szabad kézzel felragasztott bélyegek irányítása azonban 1-2 fokkal eltérhet ettől. További hibaforrás, hogy a mérőbélyegek ellenállása kismértékben ugyan, de mégis függ a mérési irányra merőleges nyúlástól is. Ennek a két hibának a hatását részletesen is megvizsgáljuk a következőkben.



A tartó tetejére ragasztott rozetta irányítása φ szöggel eltér az elvárt irányítástól. Így a mérőerősítő által szolgáltatott $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ fajlagos nyúlások is eltérnek az $\varepsilon_x, \varepsilon_{45^\circ}, \varepsilon_z$ értékektől.

$$\text{Az } \underline{\underline{A_p}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \text{ alakváltozási tenzor}$$

A rozetta felragasztásának pontatlansága

18. ábra

és az \vec{n}_i irányvektorok ismeretében $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ kifejezhetők az $\varepsilon_x, \varepsilon_{45^\circ}, \varepsilon_z$ fajlagos nyúlások segítségével.

$$\vec{n}_a = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ 0 \\ \sin \varphi \end{bmatrix}; \quad \vec{n}_b = \begin{bmatrix} \cos(45^\circ + \varphi) \\ 0 \\ \sin(45^\circ + \varphi) \end{bmatrix}; \quad \vec{n}_c = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ 0 \\ \cos \varphi \end{bmatrix}. \text{ A z tengelyre merőleges terheletlen felület}$$

$$\text{tetszőleges pontjában az alakváltozási tenzor: } \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

$$\vec{\alpha}_a = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{n}_a = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ 0 \\ \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \cos \varphi + \frac{1}{2}\gamma_{xz} \sin \varphi; & 0; & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \cos \varphi + \varepsilon_z \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_a = \vec{n}_a \cdot \vec{\alpha}_a = \varepsilon_x \cos^2 \varphi + \varepsilon_z \sin^2 \varphi + \gamma_{xz} \sin \varphi \cos \varphi$, ahol kihasználtuk azt, hogy az alakváltozási tenzor szimmetrikus. Behelyettesítve a korábban levezetett $\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 2\varepsilon_{45^\circ} - (\varepsilon_x + \varepsilon_z)$ összefüggést:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x (\cos^2 \varphi - \sin \varphi \cos \varphi) + \varepsilon_z (\sin^2 \varphi - \sin \varphi \cos \varphi) + 2\varepsilon_{45^\circ} \sin \varphi \cos \varphi.$$

Hasonlóan kapjuk:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_z (\cos^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) + \varepsilon_x (\sin^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) - 2\varepsilon_{45^\circ} \sin \varphi \cos \varphi.$$

Az ε_b kiszámításához felhasználjuk a szögfüggvények ismert addíciós tételeit és kapjuk:

$$\varepsilon_b = \varepsilon_{45^\circ} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \varepsilon_x (\sin^2 \varphi - \sin \varphi \cos \varphi) + \varepsilon_z (\sin^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi).$$

Mivel a φ elforgatás nagyságára semmilyen megszorítást nem tettünk, a levezetett képletek akár nagy szögeltérés esetén is helytállóak. Kis szögek esetén azonban további egyszerűsítéseket

tehetünk: $\sin \varphi \approx \varphi$; $\cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$. (Ezekbe a képletekbe a szöget radiánban kell behelyettesíteni!)

Elhanyagolva a φ -ben négyzetes és magasabb hatványú tagokat, a következőket kapjuk:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x (1 - \varphi) - \varepsilon_z \varphi + 2\varepsilon_{45^\circ} \varphi$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_z (1 + \varphi) + \varepsilon_x \varphi - 2\varepsilon_{45^\circ} \varphi$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_{45^\circ} - \varepsilon_x \varphi + \varepsilon_z \varphi$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{45^\circ} (1 - 2\varphi) - \varepsilon_x (1 + 2\varphi) - \varepsilon_z (1 - 2\varphi)$$

$$\varepsilon_a + \nu \varepsilon_c = \varepsilon_x (1 - \varphi + \nu \varphi) + \varepsilon_z (\nu - \varphi + \nu \varphi) + \varepsilon_{45^\circ} 2\varphi (1 - \nu)$$

$$\varepsilon_c + \nu \varepsilon_a = \varepsilon_x (\nu - \varphi + \nu \varphi) + \varepsilon_z (1 - \varphi + \nu \varphi) - \varepsilon_{45^\circ} 2\varphi (1 - \nu)$$

Figyelemre méltó, hogy a fenti kifejezésekből $\varepsilon_a + \varepsilon_c = \varepsilon_x + \varepsilon_z$ következik. Ez az összefüggés tetszőleges φ szögre igaz, ami levezethető az előző oldal gondolatmenete alapján, vagy egyszerűen belátható, ha észrevesszük, hogy $\varepsilon_x + \varepsilon_y = A_I - \varepsilon_z$, s ez a mennyiség invariáns a z tengely körüli forgatással szemben. Egymásra merőleges mérési irányokban mért fajlagos nyúlások összege tehát teljesen mentes a ragasztás szöghibája által okozott mérési hibától. Ha a feszültség egytengelyű, például $\vec{\varepsilon}_x$ irányú, akkor ez az egyetlen adat is elegendő az alakváltozási tenzor pontos megismeréséhez. Ekkor ugyanis $\varepsilon_a + \varepsilon_c = \varepsilon_x + \varepsilon_z = \varepsilon_x (1 - \nu)$. Erre alkalmas mérési elrendezés látható a 15. ábrán, közös állványon az általunk vizsgált tartóval.

Eddig feltételeztük, hogy a mérőbéllyeg csak a mérési irányának megfelelő nyúlást érzékeli. Ez azonban sajnos nem igaz, a mérési irányra merőleges nyúlás is hatással van a mérőbéllyeg ellenállására. Ezt a jelenséget keresztirányú érzékenységnak (S_C) nevezik, aminek mértéke jellemzően néhány tizedszázalék. Pontos értékét a béllyeg gyártója mindig megadja *Cross-sensitivity*, illetve *Querempfindlichkeit* néven. A keresztirányú érzékenységet is figyelembe véve a mért fajlagos nyúlások:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x (1 - \varphi) + \varepsilon_z (S_C - \varphi) + 2\varepsilon_{45^\circ} \varphi$$

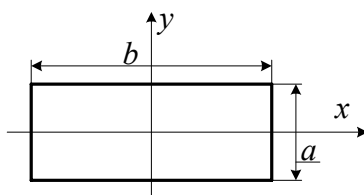
$$\varepsilon_c = \varepsilon_z (1 + \varphi) + \varepsilon_x (S_C + \varphi) - 2\varepsilon_{45^\circ} \varphi$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_{45^\circ} + \varepsilon_x (S_C - \varphi) + \varepsilon_z (S_C + \varphi)$$

Fontos tudomásul venni, hogy körültekintőbb ragasztással a φ és ezzel a belőle származó hiba csökkenthető, ezzel szemben a keresztirányú érzékenység objektív határt szab a pontosságnak. Abban az esetben, amikor a mérési irányban kicsi a fajlagos nyúlás, a rá merőleges irányban pedig nagy, még a jelentéktelennek tűnő, néhány ezreléknyi φ és S_C is jelentős hibákat okozhat. Az eddig tárgyalt hibákhoz képest az úradó hibája elhanyagolható.

Az előzőekből az tűnik ki, hogy általában az abszolút hibát ismerjük, vagyis minden egyes geometriai adathoz, minden egyes nyúlásértékhez külön-külön meg kell határoznunk a relatív hibát. Ezekkel az adatokkal legtöbbször további számításokat végzünk, így minden egyes számítás során a relatív hiba terjedését is meg kell vizsgálnunk.

Első példaként tekintsük egy tartó egy keresztmetszetének másodrendű nyomatékát!



Adott: $a = 12,1 \text{ mm}$, $b = 44,0 \text{ mm}$ keresztmetszeti méretek

Feladat: a keresztmetszet I_x másodrendű nyomatékának és a nyomaték relatív hibájának kiszámítása.

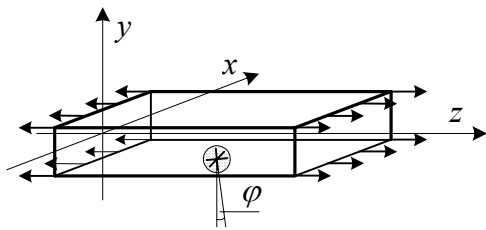
Kidolgozás: Az adatok utolsó értékes jegye a tizedmilliméter. Az abszolút hiba tehát legfeljebb fél tizedmilliméter: $a = 12,1 \text{ mm} \pm 0,05 \text{ mm}$; $b = 44,0 \text{ mm} \pm 0,05 \text{ mm}$

Ha adataink tökéletesen pontosak lennének, akkor $I_x = \frac{a^3 b}{12} = \frac{12,1^3 \cdot 44}{12} = 6495,72 \text{ mm}^4$ teljesülne.

Az adatok relatív hibája: $h_a = \frac{0,05}{12,1} = 0,41\%$; $h_b = \frac{0,05}{44} = 0,11\%$.

A hibaterjedés szabályai szerint: $h_{I_x} = 3h_a + h_b = 3 \cdot 0,41 + 0,11 = 1,34\%$. A hibaszámítással pontosított másodrendű nyomaték: $I_x = 6496 \text{ mm}^4 \pm 1,34\% = 6496 \text{ mm}^4 \pm 87 \text{ mm}^4$. Másként fogalmazva: $6409 \text{ mm}^4 \leq I_x \leq 6583 \text{ mm}^4$. A fenti két tizedes jeggyel való megadás tehát teljesen félrevezető, még a százask helyén lévő számjegyben sem lehetünk biztosak!

Második példaként számítsuk ki egy húzott-nyomott rúd egy felületi pontjának feszültségtenzorát és a feszültségtenzor koordinátáinak hibáját!



Adott: $\varphi \leq 2^\circ$; $S_C = -0,3\%$; $\varepsilon_z = 10^{-4}$;

$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$; $\nu = 0,3$

Feladat: A feszültségi tenzor koordinátái mérési hibájának meghatározása.

Kidolgozás: A rúd elmélet szerint az alakváltozási tenzor a következő alakú:

$$\underline{\underline{A_p}} = \begin{bmatrix} -\nu\varepsilon_z & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

Ideális bélyegekből álló, tökéletesen pontosan felragasztott rozettával tehát az $\varepsilon_a = \varepsilon_z = 10^{-4}$;

az $\varepsilon_c = \varepsilon_y = -3 \cdot 10^{-5}$ és az $\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_z}{2} + \frac{\varepsilon_y}{2} = 3,5 \cdot 10^{-5}$ adatokat kapnánk. A rozetta ragasztásának pontatlansága és a keresztirányú érzékenység miatt azonban a mérőbélyegeken legrosszabb esetben ($\varphi = 2^\circ = 0,035 \text{ rad}$) a következő fajlagos nyúlásokat mérhetjük:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_a &= \varepsilon_z(1 - \varphi) + \varepsilon_y(S_C - \varphi) + 2\varepsilon_{45^\circ}\varphi = [10(1 - 0,035) - 3(-0,003 - 0,035) + 2 \cdot 3,5 \cdot 0,035] \cdot 10^{-5} = \\ &= 1,0324 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon'_c &= \varepsilon_y(1 + \varphi) + \varepsilon_z(S_C + \varphi) - 2\varepsilon_{45^\circ}\varphi = [-3(1 + 0,035) + 10(-0,003 + 0,035) - 2 \cdot 3,5 \cdot 0,035] \cdot 10^{-5} = \\ &= -3,03 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon'_b &= \varepsilon_{45^\circ} + \varepsilon_z(S_C - \varphi) + \varepsilon_y(S_C + \varphi) = [3,5 + 10(-0,003 - 0,035) - 3(-0,003 + 0,035)] \cdot 10^{-5} = \\ &= 3,022 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

A szöveget radiánban helyettesítettük be, a fenti képletekben pedig felcseréltük a koordinátatengelyeket a jelenlegi feladatnak megfelelően.

Láthatjuk, hogy az ideális esettől való eltérések rendre 3%, 1%, 16% (a mért értékhez és nem az ideálishoz viszonyítva!). Húzott-nyomott rúd oldalára felragasztott rozetta fajlagos nyúlás adatait tehát csak ezzel a pontossággal fogadhatjuk el. Más terhelés esetén, másik felület vizsgálatakor, vagy eltérő bélyegállásnál ugyanezeket a számításokat újra el kell végezni (lásd a táblázatot a következő oldalon)!

A továbbiakban tételezzük fel, hogy a felületre ragasztott rozetta éppen az imént kiszámított, vagyis a lehető legnagyobb hibával terhelt adatokat szolgáltatata:

$$\varepsilon'_a = 1,0324 \cdot 10^{-4} \pm 3\% ; \varepsilon'_b = 3,022 \cdot 10^{-5} \pm 16\% ; \varepsilon'_c = -3,03 \cdot 10^{-5} \pm 1\%$$

Határozzuk meg először az alakváltozási tenzor koordinátáit!

$$\varepsilon_y = \varepsilon'_c = -3,03 \cdot 10^{-5} \pm 1\% \qquad \varepsilon_z = \varepsilon'_a = 1,0324 \cdot 10^{-4} \pm 3\%$$

Mivel az \vec{i} normálisú felület terheletlen: $\varepsilon_k = \varepsilon_x = \varepsilon_y; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = 0$

$$\gamma_{zy} = \gamma_{yz} = 2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c) = -1,25 \cdot 10^{-5} \pm 104\%$$

γ_{xz} relatív hibája a kiszámításához vezető kivonások miatt lett ilyen nagy. Szemléletesebb a $-2,55 \cdot 10^{-5} \leq \gamma_{xz} \leq 5 \cdot 10^{-7}$ írásmód, mert ez azonnal mutatja, hogy a mérési pontosság megengedi akár az elvárt $\gamma_{xz} = 0$ értéket is. De sajnos nem zárja ki azt sem, hogy a szögtorzulás a fajlagos nyúlások nagyságrendjébe essen!

Az alakváltozási tenzor „ismeretében” kiszámíthatjuk a feszültségi tenzort is:

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z) \qquad \sigma_y = \frac{2}{1-0,3^2} (-3,03 + 0,3 \cdot 10,324) = 0,148 \text{ MPa} \pm 183\%$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_z + \nu\varepsilon_y) \qquad \sigma_z = \frac{2}{1-0,3^2} (10,324 - 0,3 \cdot 3,03) = 20,69 \text{ MPa} \pm 3,4\%$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} \qquad \tau_{yz} = \frac{2}{2(1+0,3)} (-1,25) = -0,96 \text{ MPa} \pm 104\%$$

A feszültségi tenzor többi koordinátája nulla. A relatív hibát minden esetben a hibaterjedés már bemutatott összefüggéseivel számoltuk ki. Láthatjuk, hogy σ_z értékét aránylag pontosan megismerhetjük, σ_y -ről teljes bizonyossággal csak annyit állíthatunk, hogy legalább két nagyságrenddel kisebb a legnagyobb főfeszültségnél. A csúsztatófeszültség viszont csak egy nagyságrenddel kisebb a legnagyobb főfeszültségnél. Ezeket az extrém nagy relatív hibákat a képletekben alkalmazott kivonások eredményezték.

Az előző feladatban alkalmazott számításokat paraméteresen is elvégezhetjük, és akkor megkapjuk a rozettán mért fajlagos nyúlások, az alakváltozási tenzor és a feszültségi tenzor koordinátáinak relatív hibáját. Feltételezve a $\varphi \leq 2^\circ$ ragasztási pontatlanságot, és elhanyagolva az egy nagyságrenddel kisebb keresztirányú érzékenységet, a következőket kapjuk:

Mért, illetve számított mennyiség	Relatív hiba
$\varepsilon_y = \varepsilon_x$	$h_r = 0,035 \left(1 + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_y} - 2 \frac{\varepsilon_{45^\circ}}{\varepsilon_y} \right)$
ε_z	$h_r = 0,035 \left(1 + \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z} - 2 \frac{\varepsilon_{45^\circ}}{\varepsilon_z} \right)$
ε_{45°	$h_r = 0,035 \left(\frac{\varepsilon_y - \varepsilon_z}{\varepsilon_{45^\circ}} \right)$

$\left. \begin{array}{l} \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \end{array} \right\}$	$h_r = 0,07 \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_z}{2\varepsilon_{45^\circ} - \varepsilon_y - \varepsilon_z}$
σ_y	$h_r = 0,035(1-\nu) \frac{\varepsilon_y + \varepsilon_z - 2\varepsilon_{45^\circ}}{\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z}$
σ_z	$h_r = 0,035(1-\nu) \frac{\varepsilon_y + \varepsilon_z - 2\varepsilon_{45^\circ}}{\nu\varepsilon_y + \varepsilon_z}$

Az alakváltozási- és a feszültségi tenzor többi eleme zérus, amit nem a mérési eredményekből tudunk, hanem abból, hogy a szóban forgó felület terheletlen. Ezeket a zérusokat tehát teljesen pontos adatoknak tekinthetjük.

Amennyiben a rozetta nem az yz síkon van, akkor a fenti képletekben az indexeket át kell javítani: a hajlított-nyírt tartó normálfeszültségének mérésekor például a következő táblázatot kell használnunk:

Mért, illetve számított mennyiség	Relatív hiba
$\varepsilon_y, \varepsilon_z$	$h_r = 0,035 \left(1 + \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} - 2 \frac{\varepsilon_{45^\circ}}{\varepsilon_z} \right)$
ε_x	$h_r = 0,035 \left(1 + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} - 2 \frac{\varepsilon_{45^\circ}}{\varepsilon_x} \right)$
ε_{45°	$h_r = 0,035 \left(\frac{\varepsilon_z - \varepsilon_x}{\varepsilon_{45^\circ}} \right)$
$\left. \begin{array}{l} \gamma_{yx} = \gamma_{xy} \\ \tau_{yx} = \tau_{xy} \end{array} \right\}$	$h_r = 0,07 \frac{\varepsilon_z - \varepsilon_x}{2\varepsilon_{45^\circ} - \varepsilon_z - \varepsilon_x}$
σ_z	$h_r = 0,035(1-\nu) \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_x - 2\varepsilon_{45^\circ}}{\varepsilon_z + \nu\varepsilon_x}$
σ_x	$h_r = 0,035(1-\nu) \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_x - 2\varepsilon_{45^\circ}}{\nu\varepsilon_z + \varepsilon_x}$

A feszültségi tenzor koordinátáinak hibáját az anyagállandók pontatlan ismerete tovább növeli, de ez a hatás elhanyagolható a ragasztási szöghiba mellett. A legpontosabban ismert feszültségkoordináta hibájában esetleg figyelembe vehetjük a következőképpen:

$$h_{F_{ij}}^* = h_{F_{ij}} + h_E + \frac{2\nu^2}{1-\nu^2} h_\nu$$
, ahol $h_{F_{ij}}$ a feszültségi tenzor ij indexű elemének relatív hibája a fenti táblázat szerint, h_E, h_ν a Young-modulus, illetve a Poisson-szám relatív hibája.

7.3. A legkisebb négyzetek módszere

A legtöbb mérési feladat során a lehetőleg minél több adatból álló pontsorra kell egyenest illeszteni és ennek az egyenesnek a paramétereire (leggyakrabban a meredekségére) vagyunk kíváncsiak. Ha a mérendő fizikai mennyiségek egymással nem lineáris kapcsolatban vannak, a problémát sok esetben akkor is egyenes ábrázolására kell visszavezetnünk! Ha például az y mérni kívánt mennyiség várhatóan az x független változó négyzetével (vagy éppen logaritmusával)

arányos, akkor az y -t az x^2 (vagy $lg(x)$ függvényében) kell ábrázolnunk! Így joggal várunk egyenest. A mérés közben és a számítások során fellépő hibák, pontatlanságok miatt azonban az adatokból képzett pontok mégsem esnek pontosan egy egyenesre! Olyan egyenest kell keresnünk, amelyre a lehető legkisebb hibával illeszkednek a mérési eredmények. Az optimalizálási feladat célja a pontoknak az egyenestől vett függőleges távolságának négyzetösszegét minimalizálni az egyenes paramétereinek alkalmas megválasztásával (legkisebb négyzetek módszere). Bizonyítható, hogy ez a négyzetösszeg akkor minimális, ha az $y = mx + b$ alakban keresett egyenes paraméterei a következők:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_{\text{átl}})(x_i - x_{\text{átl}})}{\sum_{j=1}^n (x_j - x_{\text{átl}})^2}, \quad b = y_{\text{átl}} - mx_{\text{átl}}.$$

Az összefüggések megadják az egyenes m meredekségét és az y tengellyel való b metszetét. Az összegzéseket az összes mért értékpárra el kell végezni, $x_{\text{átl}}$ és $y_{\text{átl}}$ pedig a mérés független és mért függő változójára kapott értékek számtani közepei.

Várakozásunk szerint az ismert terhelésekből számított normál feszültség és a mért fajlagos nyúlás arányosak egymással, az arányossági tényező az E Young-modulus. Továbbá az ismert terhelésekből számított csúsztató feszültség és a mért szögtorzulás arányosak egymással, az arányossági tényező a G csúsztató rugalmassági modulus. Ha tehát ábrázoljuk az $\varepsilon(\sigma)$ függvényt, olyan

egyenest várunk, mely átmegy az origón ($b = 0$) és meredeksége: $m = \frac{1}{E}$. A $\gamma(\tau)$ függvény ábrázolásakor szintén $b = 0$ -t várunk, a meredekségre pedig $m = \frac{1}{G}$ -t.

rázolásakor szintén $b = 0$ -t várunk, a meredekségre pedig $m = \frac{1}{G}$ -t.

8. A mérési jegyzőkönyv elkészítése

A mérési jegyzőkönyv egy rövid összefoglalóval kezdődik, melyben a mérést végző leírja, milyen berendezések és mérőeszközök igénybevételével, milyen fizikai törvényszerűségek felhasználásával milyen fizikai mennyiségek mérését végezte el.

Ezután következik a konkrét mérési elrendezés vázlatrajza a műszaki ábrázolás követelményeinek betartásával. Célszerű a számításokhoz használt méreteket ellenőrizni (például tolómérővel). A ténylegesen elvégzett mérések számszerű eredményeit táblázatban kell rögzíteni, mindig feltüntetve a mennyiségek mértékegységét és relatív hibáját is. A mérés közvetlen eredményeiből számítások útján határozzuk meg az alakváltozási- és a feszültségi tenzor koordinátáit. Természetesen nem elegendő pusztán a végeredmények közlése! A mérési jegyzőkönyvből ki kell derülnie, hogy a mérést végző hogyan számolta ki eredményeit. Ezért legalább egy pont legalább egy terhelése esetére a számításokat teljes részletességgel mellékelni kell!

A mérési eredményekről grafikont kell készíteni: a vízszintes tengelyre a független változónak tekintett feszültséget, a függőleges tengelyre a függő változónak tekintett fajlagos nyúlást (illetve szögtorzulást) mérve fel. A táblázat alapján felrajzolt pontokra aztán a fenti egyenes-illesztési eljárással egyenest fektetünk. Ügyelni kell a grafikon tengelyeinek helyes skálázására és az egyenes jellemzőinek feltüntetésére is.

A mérési eredmények pontosságát feltétlenül elemezni kell! E nélkül nem tudjuk megítélni, vajon értékes eredményeket kaptunk-e egyáltalán. Először a számítások során felhasznált méretek pontosságát kell tisztázni, aztán a mérés szolgáltatja adatok hibáját kell megbecsülni a 7.2. fejezet alapján és ezen hibák terjedését meghatározni a számítások során használt képletekben a hetedik fejezet általános képletei és a példák segítségével.

A mérési jegyzőkönyvet összefoglaló zárja, melyben értékelni kell, mennyire teljesültek az elmélet alapján megfogalmazott előzetes várakozások. Külön meg kell vizsgálni, vajon mi okozhatta az esetleges eltéréseket. Esetleg javaslatokat lehet megfogalmazni a mérés pontosságának növelésére.