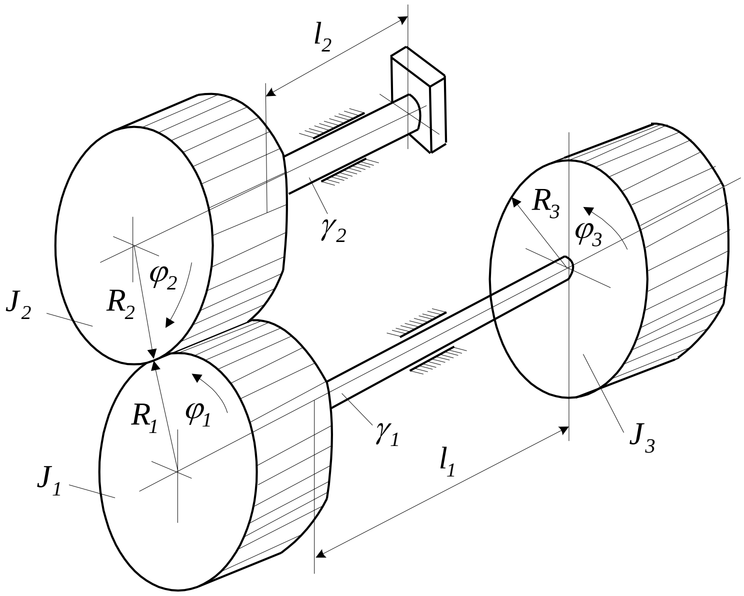
SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM **ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK**

11. MECHANIKA-REZGÉSTAN GYAKORLAT
(kidolgozta: Fehér Lajos, tsz. mérnök; Tarnai Gábor, mérnök tanár; Molnár Zoltán, egy. adj., Dr. Nagy Zoltán, egy. adj.)
Több szabadságfokú rezgőrendszer mozgásegyenletének felírása

11.1. Példa: Két szabadságfokú szabad, csillapítatlan rezgőrendszer



Adott: a 3 merev fogaskerékből álló, szabad rezgést végző rezgőrendszer. Adott továbbá $J_1 = J_2 = J_3 = 120$ kgm^2, $R_1 = R_2 = R_3 = 0,25$ m, $\gamma_1 = \gamma_2 = 4 \cdot 10^{-4}$ Nm/rad.

Feladat:
a) Határozza meg az ábrán látható rezgőrendszer mozgásegyenlet rendszerét kis szögelfordulások esetén mátrixos formában, számszerű adatokkal.

Kidolgozás:
A (2) és (1) fogaskerekek közötti – teljesen merevnek tekintett- kapcsolat miatt írható:

$$R_1 \varphi_1 = R_2 \varphi_2 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{R_1}{R_2}\varphi_1 \quad \text{........a két szögelfordulás nem független egymástól},$$

$$\varphi_2 = \frac{R_1}{R_2}\varphi_1 \left(rad\right) \;,\; \dot{\varphi}_2 = \frac{R_1}{R_2}\dot{\varphi}_1 \left(\frac{rad}{s}\right) \quad \text{és} \quad \ddot{\varphi}_2 = \frac{R_1}{R_2}\ddot{\varphi}_1 \left(\frac{rad}{s^2}\right).$$

A rendszerben az l_1 és l_2 hosszúságú tengelyek, mint torziós rugók szerepelnek, melyek torziós rugóállandóit a γ_1 és γ_2 paraméterek fejezik ki.
A szabadságfokok száma $i = 2$.
Az általános koordináták:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = \varphi_1 \;,\; q_2 = \varphi_3 \\ \dot{q}_1 = \dot{\varphi}_1 \;,\; \dot{q}_2 = \dot{\varphi}_3 \\ \ddot{q}_1 = \ddot{\varphi}_1 \;,\; \ddot{q}_2 = \ddot{\varphi}_3 \end{array}\right\} \qquad \vec{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} \text{rad} \;,\; \vec{\ddot{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{bmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

A *Lagrange*-féle másodfajú mozgásegyenlet: $\sum_{i=1}^{2} \frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{d\dot{q}_i}\right) - \frac{dE}{dq_i} = Q_{ci}$

A teljes rendszer kinetikai energiája: E

$$E = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}J_3\omega_3^2 = \frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\varphi}_3^2 = \frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\varphi}_3^2,$$

$$E = \frac{1}{2}\left[J_1 + J_2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right]\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\varphi}_3^2.$$

A rugókban felhalmozódott deformációs energia (a tengelyek, mint torziós rugók): U

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}\frac{(\varphi_1-\varphi_3)^2}{\gamma_1} + \frac{1}{2}\frac{(\varphi_2-0)^2}{\gamma_2} = \frac{1}{2}\frac{(\varphi_1-\varphi_3)^2}{\gamma_1} + \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{R_1}{R_2}\varphi_1\right)^2}{\gamma_2}.$$

$\underline{i=1}$ esetén

$$\frac{dE}{d\dot{q}_1} = \frac{dE}{d\dot{\varphi}_1} = \left[J_1 + J_2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right]\dot{\varphi}_1^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{d\dot{\varphi}_1}\right) = \left[J_1 + J_2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right]\ddot{\varphi}_1,$$

$$\frac{dE}{dq_1} = \frac{dE}{d\varphi_1} = 0.$$

Az általános visszatérítő erő (csavaró nyomaték): Q_{c1}

$$Q_{c1} = -\frac{dU}{dq_1} = -\frac{dU}{d\varphi_1} = -\left(\frac{\varphi_1-\varphi_3}{\gamma_1} + \frac{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\varphi_1}{\gamma_2}\right) = -\left(\left[\frac{1}{\gamma_1} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\frac{1}{\gamma_2}\right]\varphi_1 - \frac{1}{\gamma_1}\varphi_3\right).$$

$\underline{i=2}$ esetén

$$\frac{dE}{d\dot{q}_2} = \frac{dE}{d\dot{\varphi}_3} = J_3\dot{\varphi}_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{d\dot{\varphi}_3}\right) = J_3\ddot{\varphi}_3.$$

$$\frac{dE}{dq_2} = \frac{dE}{d\varphi_3} = 0.$$

Az általános visszatérítő erő (csavaró nyomaték): Q_{c2}

$$Q_{c2} = -\frac{dU}{dq_2} = -\frac{dU}{d\varphi_3} = -\left(\frac{\varphi_1-\varphi_3}{\gamma_1}(-1)\right) = -\left(-\frac{1}{\gamma_1}\varphi_1 + \frac{1}{\gamma_1}\varphi_3\right).$$

Az egyes tömegek mozgásegyenletei:

$$\left[J_1 + J_2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right]\ddot{\varphi}_1 + \left[\frac{1}{\gamma_1} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\frac{1}{\gamma_2}\right]\varphi_1 - \frac{1}{\gamma_1}\varphi_3 = 0,$$

$$J_3\ddot{\varphi}_3 - \frac{1}{\gamma_1}\varphi_1 + \frac{1}{\gamma_1}\varphi_3 = 0.$$

Mátrixos alakban felírva:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_1 + J_2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 & 0 \\ 0 & J_3 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{bmatrix}}_{\ddot{\vec{\varphi}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_1} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\frac{1}{\gamma_2} & -\frac{1}{\gamma_1} \\ -\frac{1}{\gamma_1} & \frac{1}{\gamma_1} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{C}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}}_{\vec{\varphi}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{M}}\,\ddot{\vec{\varphi}} + \underline{\underline{C}}\,\vec{\varphi} = 0.$$

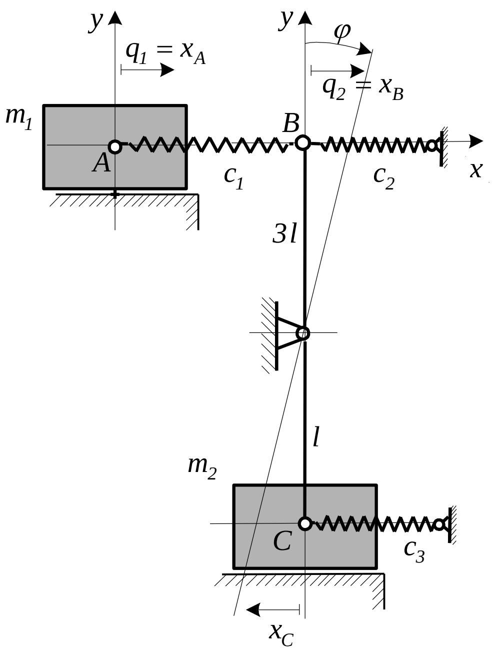
A tömegmátrix: $$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} J_1 + J_2\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2 & 0 \\ 0 & J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240 & 0 \\ 0 & 120 \end{bmatrix} \frac{\text{kgm}^2}{\text{rad}},$$

a rugómátrix: $$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\gamma_1} + \left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2 \dfrac{1}{\gamma_2} & -\dfrac{1}{\gamma_1} \\ -\dfrac{1}{\gamma_1} & \dfrac{1}{\gamma_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 & -2500 \\ -2500 & 2500 \end{bmatrix} \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}.$$

A rezgőrendszer mozgásegyenletének végső alakja:

$$\begin{bmatrix} 240 & 0 \\ 0 & 120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5000 & -2500 \\ -2500 & 2500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = 0.$$

11.2. Példa: Két szabadságfokú szabad, csillapítatlan rezgőrendszer



Adott: a kettő tömegből álló, szabad rezgést végző rezgőrendszer. Az általános koordináta: $q_1 = x_A$ és $q_2 = x_B$.

$c_1 = c_2 = 4 \cdot 10^{-4}$ m/N, $l = 1$ m,

$c_3 = 0{,}1111111 \cdot 10^{-4}$ m/N, $m_1 = m_2 = 18$ kg.

Feladat: Határozza meg az ábrán látható rendszer mozgásegyenletét kis szögelfordulások esetén mátrixos formában, számszerű adatokkal.

Kidolgozás:

A B és a C pontok közötti karos áttétel alapján írható: $tg\varphi = \dfrac{x_B}{3l} = \dfrac{x_C}{l} \Rightarrow x_C = \dfrac{x_B}{3}$.

A szabadságfokok száma $i = 2$.

Az általános koordináták:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = x_A \;\;,\;\; q_2 = x_B \\ \dot{q}_1 = \dot{x}_A \;\;,\;\; \dot{q}_2 = \dot{x}_B \\ \ddot{q}_1 = \ddot{x}_A \;\;,\;\; \ddot{q}_2 = \ddot{x}_B \end{array}\right\} \qquad \vec{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} \text{m} \;,\; \ddot{\vec{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{x}_B \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A *Lagrange*-féle másodfajú mozgásegyenlet: $\displaystyle\sum_{i=1}^{2} \frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{d\dot{q}_i}\right) - \frac{dE}{dq_i} = Q_{ci}$.

A teljes rendszer kinetikai energiája: E

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_A^2 + \frac{1}{2} m_2 v_C^2 = \frac{1}{2} m_1 v_A^2 + \frac{1}{2} m_2 v_C^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_A^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{\dot{x}_B}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_A^2 + \frac{1}{18} m_2 \dot{x}_B^2.$$

A rugókban felhalmozódott deformációs energia: U

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2}\frac{\left(x_B - x_A\right)^2}{c_1} + \frac{1}{2}\frac{x_B{}^2}{c_2} + \frac{1}{2}\frac{x_C{}^2}{c_3} = \frac{1}{2}\frac{\left(x_B - x_A\right)^2}{c_1} + \frac{1}{2}\frac{x_B{}^2}{c_2} + \frac{1}{2}\frac{(x_B/3)^2}{c_3},$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{\left(x_B - x_A\right)^2}{c_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{9c_3}\right) x_B{}^2.$$

Az első mozgásegyenlet felírása (i=1)

Az egyenletek bal oldalán álló mennyiségek:

$$\frac{dE}{d\dot{q}_1} = \frac{dE}{d\dot{x}_A} = m_1 \dot{x}_A \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{d\dot{x}_A}\right) = m_1 \ddot{x}_A. \qquad\qquad \frac{dE}{dq_1} = \frac{dE}{dx_A} = 0.$$

Az általános visszatérítő erő: Q_{c1}

$$Q_{c1} = -\frac{dU}{dq_1} = -\frac{dU}{dx_A} = -\left[\frac{\left(x_B - x_A\right)}{c_1}(-1)\right] = -\left(\frac{1}{c_1} x_A - \frac{1}{c_1} x_B\right).$$

Az első mozgásegyenlet felírása (i=2)

Az egyenletek bal oldalán álló mennyiségek:

$$\frac{dE}{d\dot{q}_2}=\frac{dE}{d\dot{x}_B}=\frac{1}{9}m_2\dot{x}_B \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{d\dot{x}_B}\right)=\frac{1}{9}m_2\ddot{x}_B. \qquad \frac{dE}{dq_2}=\frac{dE}{dx_B}=0.$$

Az általános visszatérítő erő: Q_{c2}

$$Q_{c2}=-\frac{dU}{dq_2}=-\frac{dU}{dx_B}=-\left[\frac{(x_B-x_A)}{c_1}(+1)+\left(\frac{1}{c_2}+\frac{1}{9c_3}\right)x_B\right]=-\left[-\frac{1}{c_1}x_A+\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{9c_3}\right)x_B\right].$$

Az egyes tömegek mozgásegyenletei:

$$m_1\ddot{x}_A+\frac{1}{c_1}x_A-\frac{1}{c_1}x_B=0,$$

$$\frac{1}{9}m_2\ddot{x}_B-\frac{1}{c_1}x_A+\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{9c_3}\right)x_B=0.$$

Mátrixos alakban felírva:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9}m_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}}\underbrace{\begin{bmatrix}\ddot{x}_A \\ \ddot{x}_B\end{bmatrix}}_{\ddot{\vec{x}}}+\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} & -\frac{1}{c_1} \\ -\frac{1}{c_1} & \left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{9c_3}\right) \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{C}}}\underbrace{\begin{bmatrix}x_A \\ x_B\end{bmatrix}}_{\vec{x}}=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{M}}\,\ddot{\vec{x}}+\underline{\underline{C}}\,\vec{x}=0.$$

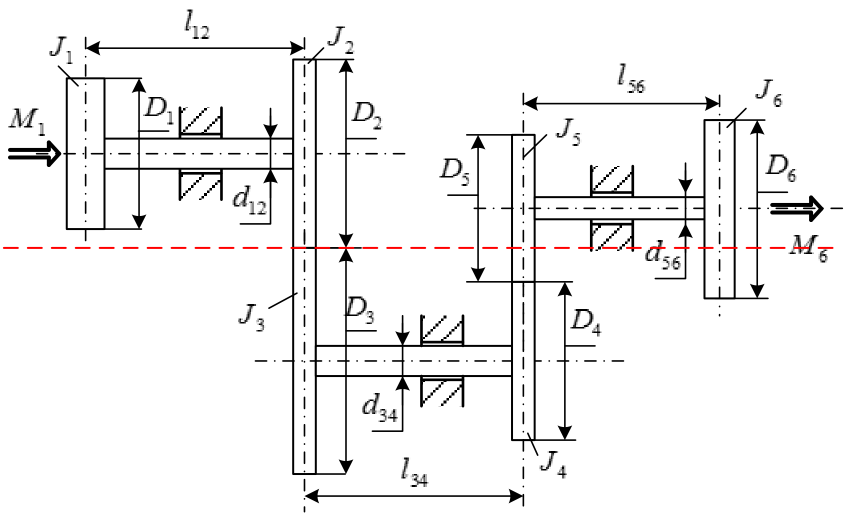
$$\text{A tömegmátrix: } \underline{\underline{M}}=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9}m_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\text{kg},$$

$$\text{a rugómátrix: } \underline{\underline{C}}=\begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} & -\frac{1}{c_1} \\ -\frac{1}{c_1} & \left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{9c_3}\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2500 & -2500 \\ -2500 & 15000 \end{bmatrix}\frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

A rezgőrendszer mozgásegyenletének végső alakja:

$$\begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}_A \\ \ddot{x}_B\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2500 & -2500 \\ -2500 & 15000 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_A \\ x_B\end{bmatrix}=0.$$

11.3. Példa: Hajtómű torziós rezgéseinek mozgásegyenlet rendszere



Adott: az ábrán látható hajtómű, továbbá $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, l_{12}, l_{34}, l_{56}$, $d_{12}, d_{34}, d_{56}, M_1, M_6$, továbbá M_1 és M_6 nyomatékok nem függenek az időtől.

Feladat:
a) Mozgásegyenlet rendszer felírása a fogaskerekek szögelfordulását választva általános koordinátáknak!

b) Olyan általános koordináta választása, amellyel a modell láncszerűvé válik, és a láncszerű modell meghatározása.

Kidolgozás:

A kinetikai energia: $E = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{2} J_i \dot{\varphi}_i^2$

A $D_2\varphi_2 = D_3\varphi_3$ és $D_4\varphi_4 = D_5\varphi_5$ áttétel figyelembevételével és $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ általános koordináták választásával: $\varphi_3 = \frac{D_2}{D_3}\varphi_2, \quad \varphi_5 = \frac{D_4}{D_6}\varphi_4,$

$$E = \frac{1}{2}\left[J_1\dot{\varphi}_1^2 + \left(J_2 + J_3\frac{D_2^2}{D_3^2} \right)\dot{\varphi}_2^2 + \left(J_4 + J_5\frac{D_4^2}{D_5^2} \right)\dot{\varphi}_4^2 + J_6\dot{\varphi}_6^2 \right]$$

A másodrendű nyomatékok $I_{p_{i,i+1}} = \frac{d_{i,i+1}^4 \pi}{32}, \quad i = 1,3,5$

A torziós rugóállandók: $\gamma_{i,i+1} = \frac{l_{i,i+1}}{I_{Pi,i+1}G} = \frac{32 l_{i,i+1}}{d_{i,i+1}^4 \pi G}, \quad i = 1,3,5$

A tengelyekben felhalmozódott rugalmas energia:

$$U = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{\gamma_{12}} + \frac{\left(\varphi_4 - \frac{D_2}{D_3}\varphi_2 \right)^2}{\gamma_{34}} + \frac{\left(\varphi_6 - \frac{D_4}{D_5}\varphi_4 \right)^2}{\gamma_{56}} .$$

A külső ER teljesítménye $P = M_1\dot{\varphi}_1 + M_6\dot{\varphi}_6$, mivel a 3 és 4 jelű fogaskerekeknél a pozitív szöglefordulás iránya az áttétel miatt fordított, addig az 5,6 jelű és az 1,2 jelű fogaskerekeknek egymással azonos a forgásiránya.
Így a mozgásegyenlet-rendszer:

$$\underbrace{J_1\ddot{\varphi}_1}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1}\right)} + \underbrace{\frac{1}{\gamma_{12}}\varphi_1 - \frac{1}{\gamma_{12}}\varphi_2}_{Q_{c1}=-\frac{dU}{d\varphi_1}} = M_1$$

$$\underbrace{\left(J_2 + J_3\frac{D_2^{\,2}}{D_3^{\,2}}\right)\ddot{\varphi}_2}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_2}\right)} \underbrace{-\frac{1}{\gamma_{12}}\varphi_1 + \left(\frac{1}{\gamma_{12}} + \frac{D_2^{\,2}}{D_3^{\,2}\gamma_{34}}\right)\varphi_2 - \frac{D_2}{D_3\gamma_{34}}\varphi_4}_{Q_{c2}=-\frac{dU}{d\varphi_2}} = 0$$

$$\underbrace{\left(J_4 + J_5\frac{D_4^{\,2}}{D_5^{\,2}}\right)\ddot{\varphi}_4}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_4}\right)} \underbrace{-\frac{D_2}{D_3\gamma_{34}}\varphi_2 + \left(\frac{1}{\gamma_{34}} + \frac{D_4^{\,2}}{D_5^{\,2}\gamma_{56}}\right)\varphi_4 - \frac{D_4}{D_5\gamma_{56}}\varphi_6}_{Q_{c3}=-\frac{dU}{d\varphi_4}} = 0$$

$$\underbrace{J_6\ddot{\varphi}_6}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_6}\right)} \underbrace{-\frac{D_4}{D_5\gamma_{56}}\varphi_4 + \frac{1}{\gamma_{56}}\varphi_6}_{Q_{c4}=-\frac{dU}{d\varphi_6}} = M_6$$

A szerkezet rezgéstani modellje áttételes rezgőrendszer.

b) Olyan általános koordináta választása, amellyel a modell láncszerűvé válik, és a láncszerű modell maghatározása:

Általános koordináták: $q_1 = D_2\varphi_1$, $q_2 = D_2\varphi_2 = D_3\varphi_3$, $q_3 = D_3\varphi_4 = D_3\frac{D_5}{D_4}\varphi_5$, $q_4 = D_3\frac{D_5}{D_4}\varphi_6$.

ahol: $\varphi_1 = \frac{q_1}{D_2}$, $\varphi_2 = \frac{q_2}{D_2}$, $\varphi_3 = \frac{q_2}{D_3}$, $\varphi_4 = \frac{q_3}{D_3}$, $\varphi_6 = \frac{q_4}{D_3}\frac{D_4}{D_5}$,

Ezzel a kinetikus energia

$$E = \frac{1}{2}\left[\frac{J_1}{D_2^2}\dot{q}_1^2 + \left(\frac{J_2}{D_2^2} + \frac{J_3}{D_3^2}\right)\dot{q}_2^2 + \left(\frac{J_4}{D_3^2} + \frac{D_4^2 J_5}{D_3^2 D_5^2}\right)\dot{q}_3^2 + \frac{D_4^2 J_6}{D_3^2 D_5^2}\dot{q}_4^2\right].$$

A rugókban felhalmozott rugóenergia

$$U = \frac{(q_2 - q_1)^2}{D_2^2\gamma_{12}} + \frac{(q_3 - q_2)^2}{D_3^2\gamma_{34}} + \frac{D_4^2(q_4 - q_3)^2}{D_3^2 D_5^2\gamma_{56}},$$

a teljesítmény $P = \frac{M_1}{D_2}\dot{q}_1 + \frac{D_4 M_6}{D_3 D_5}\dot{q}_4$.

A mozgásegyenlet-rendszer

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{J_1}{D_2^2}\ddot{q}_1+\frac{1}{D_2^2\gamma_{12}}q_1-\frac{1}{D_2^2\gamma_{12}}q_2=\frac{M_1}{D_2}\\
&\left(\frac{J_2}{D_2^2}+\frac{J_3}{D_3^2}\right)\ddot{q}_2-\frac{1}{D_2^2\gamma_{12}}q_1+\left(\frac{1}{D_2^2\gamma_{12}}+\frac{1}{D_3^2\gamma_{34}}\right)q_2-\\
&\qquad-\frac{1}{D_3^2\gamma_{34}}q_3=0\\
&\left(\frac{J_4}{D_3^2}+\frac{D_4^2J_5}{D_3^2D_5^2}\right)\ddot{q}_3-\frac{1}{D_3^2\gamma_{34}}q_2+\left(\frac{1}{D_3^2\gamma_{34}}+\frac{D_4^2}{D_3^2D_5^2\gamma_{56}}\right)q_3-\\
&\qquad-\frac{D_4^2}{D_3^2D_5^2\gamma_{56}}q_4=0\\
&\frac{D_3^2D_5^2J_5}{D_3^2}\ddot{q}_4-\frac{D_4^2}{D_3^2D_5^2\gamma_{56}}q_3+\frac{D_4^2}{D_3^2D_5^2\gamma_{56}}q_4=\frac{D_4M_6}{D_3D_5}
\end{aligned}\right\}.
$$

A rendszer tömegmátrixa:

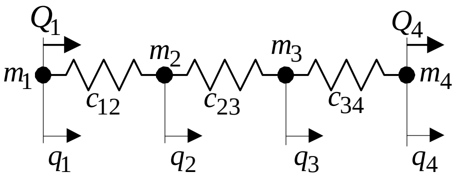
$$
\left[\underline{\underline{M}}\right]=\begin{bmatrix}
\frac{J_1}{D_2^2} & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{J_2}{D_2^2}+\frac{J_3}{D_3^2} & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{J_4}{D_3^2}+\frac{D_4^2J_5}{D_3^2D_5^2} & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{D_4^2J_6}{D_3^2D_5^2}
\end{bmatrix},
$$

a rugómátrix:

$$
\left[\underline{\underline{C}}\right]=
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\frac{1}{D_2^2\gamma_{12}} & -\frac{1}{D_2^2\gamma_{12}} & 0 & 0\\
-\frac{1}{D_2^2\gamma_{12}} & \frac{1}{D_2^2\gamma_{12}}+\frac{1}{D_3^2\gamma_{34}} & -\frac{1}{D_3^2\gamma_{34}} & 0\\
0 & -\frac{1}{D_3^2\gamma_{34}} & \frac{1}{D_3^2\gamma_{34}}+\frac{D_4^2}{D_3^2D_5^2\gamma_{56}} & -\frac{D_4^2}{D_3^2D_5^2\gamma_{56}}\\
0 & 0 & -\frac{D_4^2}{D_3^2D_5^2\gamma_{56}} & \frac{D_4^2}{D_3^2D_5^2\gamma_{56}}
\end{bmatrix}.
$$

A láncszerű modell elágazásmentes, amely nem kötött rendszer:



A modellben az egyes mennyiségek az alábbi összefüggésekkel származtathatók:

$$m_1 = \frac{J_1}{D_3^2}, \quad m_2 = \frac{J_2}{D_2^2} + \frac{J_3}{D_3^2}, \quad m_3 = \frac{J_4}{D_3^2} + \frac{D_4^2 J_5}{D_3^2 D_5^2}, \quad m_4 = \frac{D_4^2 J_6}{D_3^2 D_5^2},$$

$$\frac{1}{c_{12}} = \frac{1}{D_2^2 \gamma_{12}}, \quad \frac{1}{c_{23}} = \frac{1}{D_3^2 \gamma_{34}}, \quad \frac{1}{c_{34}} = \frac{D_4^2}{D_3^2 D_5^2 \gamma_{56}},$$

$$Q_1 = \frac{M_1}{D_2}, \quad Q_4 = \frac{D_4 M_6}{D_3 D_5}.$$