SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM — **ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK**

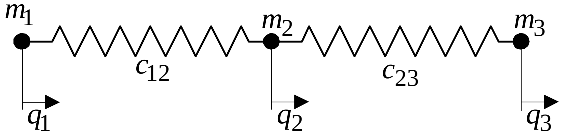
13. MECHANIKA-REZGÉSTAN GYAKORLAT

(kidolgozta: Fehér Lajos, tsz. mérnök; Tarnai Gábor, mérnök tanár;
Molnár Zoltán, egy. adj., Dr. Nagy Zoltán, egy. adj.)

Diszkrét rezgőrendszerek mozgásegyenlet-rendszerének megoldása

13.1. Példa: Nem kötött lánc szerű rezgőrendszer sajátfrekvenciái és rezgésképei

Adott: $m_1 = 2\,\text{kg}$,
$m_2 = 1\,\text{kg}$, $m_3 = 1\,\text{kg}$,
$c_{12} = 0{,}5\cdot 10^{-4}\,\text{m/N}$,
$c_{23} = 10^{-4}\,\text{m/N}$.



Feladat:

a) A rezgőrendszer saját körfrekvenciáinak a meghatározása.

b) Rezgéskép meghatározása az első saját körfrekvencián.

c) Rezgéskép meghatározása a második saját körfrekvencián

Megoldás:

a) A rezgőrendszer saját körfrekvenciáinak a meghatározása:
A karakterisztikus egyenlet betűkkel:

$$-m_1 c_{12} m_2 c_{23} m_3 \left(\alpha^2\right)^3 + \left[m_1 c_{12} m_2 + m_1\left(c_{12}+c_{23}\right)m_3 + m_2 c_{23} m_3\right]\left(\alpha^2\right)^2 -$$
$$-\left[m_1 + m_2 + m_3\right]\alpha^2 = 0.$$

Behelyettesítve:

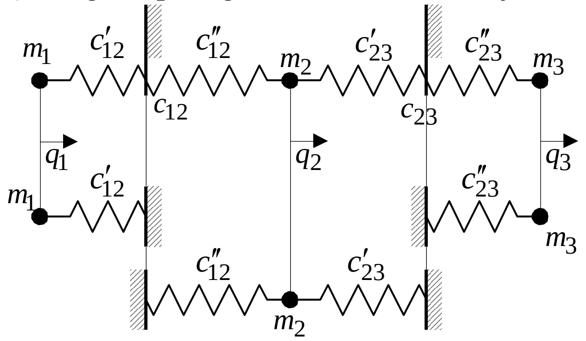
$$\Big\{-2\cdot 0{,}5\cdot 10^{-4}\cdot 1\cdot 10^{-4}\cdot 1\left(\alpha^2\right)^2 +$$
$$+\left[2\cdot 0{,}5\cdot 10^{-4}\cdot 1 + 2\cdot\left(0{,}5\cdot 10^{-4}+10^{-4}\right)\cdot 1 + 1\cdot 10^{-4}\cdot 1\right]\alpha^2 -$$
$$-\left[2+1+1\right]\Big\}\alpha^2 = 0.$$

Szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla, így $\alpha_0^2 = 0$ megoldást, illetve $10^{-8}\left(\alpha^2\right)^2 - 5\cdot 10^{-4}\alpha^2 + 4 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei:

$$\alpha_{12}^2 = \frac{5\cdot 10^{-4} \pm \sqrt{\left(5\cdot 10^{-4}\right)^2 - 4\cdot 10^{-8}\cdot 4}}{2\cdot 10^{-8}} = \frac{5\pm 3}{2}10^4 = \left\langle\begin{array}{l} 4\cdot 10^4, \\ 10^4. \end{array}\right.$$

$\alpha_1 = \sqrt{10^4} = 100$ rad/s, $\alpha_2 = \sqrt{4 \cdot 10^4} = 200$ rad/s, amit $\alpha_0 = 0$ egészít ki.

b) Rezgéskép meghatározása az első saját körfrekvencián.



A baloldali egyszabadságfokú rezgőrendszerből $\alpha_1^2 = \dfrac{1}{m_1 c'_{12}}$, amiből

$$c'_{12} = \frac{1}{m_1 \alpha_1^2} = \frac{1}{2 \cdot 10^4} = 0{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ m/N}.$$

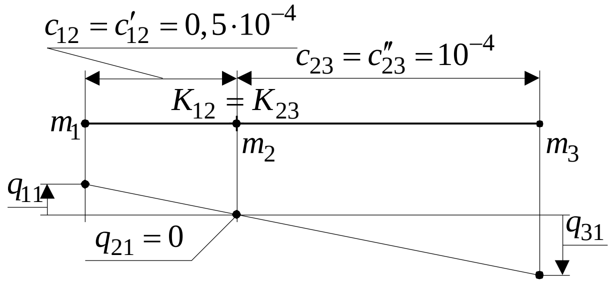
$c''_{12} = c_{12} - c'_{12} = 0{,}5 \cdot 10^{-4} - 0{,}5 \cdot 10^{-4} = 0$, vagyis a c_{12} rugón a csomópont a 2 jelű tömegre esik. Ez azt jelenti, hogy a 2 jelű tömeg helyben marad, ha a rezgőrendszer $\alpha_1 = 100$ rad/sec frekvencián rezeg.

A 2 jelű tömeg, vagyis a középső egyszabadságfokú rezgőrendszer vizsgálatának így nincs értelme.

A jobboldali egyszabadságfokú rezgőrendszerből $\alpha_1^2 = \dfrac{1}{m_3 c''_{23}}$, amiből

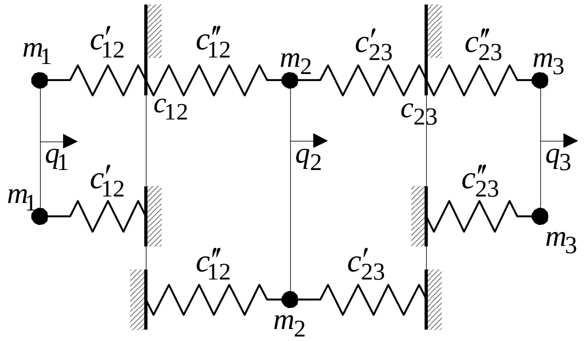
$c'_{23} = \dfrac{1}{m_3 \alpha_1^2} = \dfrac{1}{1 \cdot 10^4} = 1 \cdot 10^{-4}$ m/N adódik.

$c'_{23} = c_{23} - c''_{23} = 10^{-4} - 10^{-4} = 0$, vagyis a c_{23} rugón is a csomópont a 2 jelű tömegre esik. A rezgőrendszernek tehát egy csomópontja van, és az a 2 jelű tömegre esik. A rezgéskép ábrázolása:



Az amplitúdókra $\dfrac{q_{11}}{c_{12}} = -\dfrac{q_{31}}{c_{23}}$ igaz, amiből $q_{31} = -\dfrac{c_{23}}{c_{12}} q_{11} = -2q_{11}$, illetve $\left[\underset{=01}{q}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

c) Rezgéskép meghatározása a második saját körfrekvencián.



$\alpha_2 = 200$ rad/s, esetén $\alpha_2^2 = \dfrac{1}{m_1 c'_{12}}$, amiből $c'_{12} = \dfrac{1}{m_1 \alpha_1^2} = \dfrac{1}{2\cdot 4\cdot 10^4} = 0{,}125\cdot 10^{-4}$ m/N.

$c''_{12} = c_{12} - c'_{12} = 0{,}5\cdot 10^{-4} - 0{,}125\cdot 10^{-4} = 0{,}375\cdot 10^{-4}$, vagyis a c_{12} rugón a csomópont valóságos.

A középső egyszabadságfokú rezgőrendszerből $\alpha_1^2 = \dfrac{c''_{12} + c'_{23}}{c''_{12} m_2 c'_{23}}$, amiből

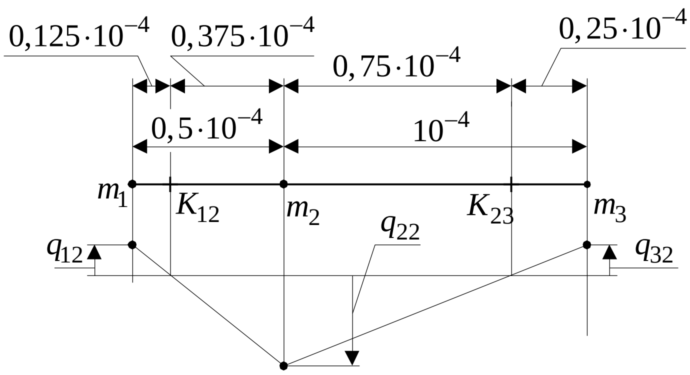
$$c'_{23} = \frac{c''_{12}}{c''_{12} m_2 \alpha_1^2 - 1} = \frac{0{,}375\cdot 10^{-4}}{0{,}375\cdot 10^{-4}\cdot 1\cdot 4\cdot 10^4 - 1} = 0{,}75\cdot 10^{-4} \text{ m/N.}$$

A jobboldali egyszabadságfokú rezgőrendszerből $c_{23} = c'_{23} + c''_{23}$ illetve $c''_{23} = c_{23} - c'_{23} = 10^{-4} - 0{,}75\cdot 10^{-4} = 0{,}25\cdot 10^{-4}$ m/N, a csomópont valóságos. $c''_{23} = \dfrac{1}{m_3 \alpha_1^2} = \dfrac{1}{1\cdot 4\cdot 10^{-4}} = 0{,}25\cdot 10^4$

Az amplitúdókra $\dfrac{q_{12}}{c'_{12}} = -\dfrac{q_{22}}{c''_{12}}$ igaz, amiből $q_{22} = -\dfrac{c''_{12}}{c'_{12}} q_{12} = -3q_{12}$, illetve $\dfrac{q_{32}}{c''_{23}} = -\dfrac{q_{22}}{c'_{23}}$

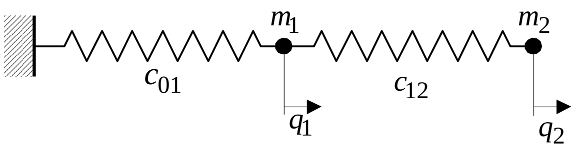
igaz, amiből $q_{32} = -\dfrac{c''_{23}}{c'_{23}} q_{22} = -\dfrac{1}{3} q_{22} = -\dfrac{1}{3}(-3) q_{12} = q_{12}$ $\qquad \left[\underline{\underline{q}}_{02}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

A rezgéskép ábrázolása a második saját körfrekvenciánál:



13.2. Példa: Kötött lánc szerű rezgőrendszer sajátfrekvenciái és rezgésképei

Adott: $m_1 = 2\,\text{kg}$, $m_2 = 1\,\text{kg}$, $c_{01} = 10^{-4}\,\text{m/N}$, $c_{12} = 2\cdot 10^{-4}\,\text{m/N}$.



Feladat:

a) A rezgőrendszer saját körfrekvenciáinak a meghatározása.

b) Rezgéskép meghatározása az első saját körfrekvencián.

c) Rezgéskép meghatározása a második saját körfrekvencián

Megoldás:

a) A rezgőrendszer saját körfrekvenciáinak a meghatározása:
A karakterisztikus egyenlet betűkkel:

$$c_{01}m_1c_{12}m_2\left(\alpha^2\right)^2 - \left[c_{01}m_1 + \left(c_{01}+c_{12}\right)m_2\right]\alpha^2 + 1 = 0.$$

Behelyettesítve:

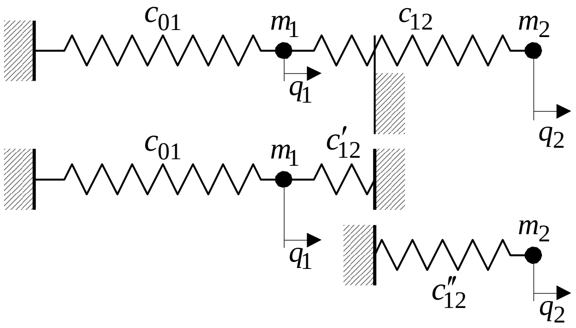
$$10^{-4}\cdot 2\cdot 2\cdot 10^{-4}\left(\alpha^2\right)^2 - \left[10^{-4}\cdot 2 + \left(10^{-4} + 2\cdot 10^{-4}\right)\cdot 1\right]\alpha^2 + 1 = 0$$

Megoldandó a $4\cdot 10^{-8}\left(\alpha^2\right)^2 - 5\cdot 10^{-4}\alpha^2 + 1 = 0$ másodfokú egyenletet, amelynek gyökei:

$$\alpha_{12}^2 = \frac{5\cdot 10^{-4} \pm \sqrt{\left(5\cdot 10^{-4}\right)^2 - 4\cdot 4\cdot 10^{-8}}}{2\cdot 4\cdot 10^{-8}} = \frac{5\pm 3}{8}10^4 = \left\langle \begin{matrix} 10^4, \\ 2500. \end{matrix} \right.$$

$$\alpha_1 = \sqrt{2500} = 50 \text{ rad/s}, \ \alpha_2 = \sqrt{10^4} = 100 \text{ rad/s}.$$

b) Rezgéskép meghatározása az első saját körfrekvencián:



A jobboldali egyszabadságfokú rezgőrendszerből $\alpha_1^2 = \dfrac{1}{m_2 c''_{12}}$, amiből

$$c''_{12} = \frac{1}{m_2 \alpha_1^2} = \frac{1}{1 \cdot 2500} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m/N}.$$

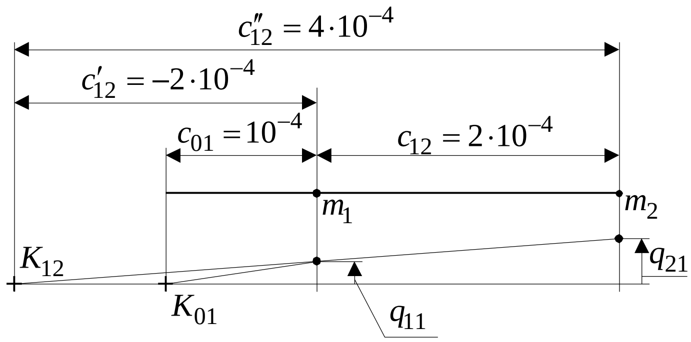
$c'_{12} = c_{12} - c''_{12} = 2 \cdot 10^{-4} - 4 \cdot 10^{-4} = -2 \cdot 10^{-4}$, vagyis a c_{12} rugón a csomópont virtuális.

A baloldali egyszabadságfokú rezgőrendszert ellenőrzésre használjuk, így teljesülnie kell a

$\alpha_1^2 = \dfrac{c_{01} + c'_{12}}{c_{01} m_1 c'_{12}}$ egyenletnek, ami

$$\alpha_1^2 = \frac{c_{01} + c'_{12}}{c_{01} m_1 c'_{12}} = \frac{10^{-4} + \left(-2 \cdot 10^{-4}\right)}{10^{-4} \cdot 2 \cdot \left(-2 \cdot 10^{-4}\right)} = 2500 \text{ teljesül is.}$$

A rezgéskép ábrázolása:



Az amplitúdókra $\dfrac{q_{11}}{c'_{12}} = -\dfrac{q_{21}}{c''_{23}}$ igaz, amiből $q_{21} = -\dfrac{c''_{12}}{c'_{12}} q_{11} = 2q_{11}$, illetve $\left[\underset{=01}{q} \right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

c) Rezgéskép meghatározása a második saját körfrekvencián:

$\alpha_2 = 100$ rad/s, esetén $\alpha_2^2 = \dfrac{1}{m_2 c''_{12}}$, amiből $c''_{12} = \dfrac{1}{m_2 \alpha_1^2} = \dfrac{1}{1 \cdot 10^4} = 10^{-4}$ m/N.

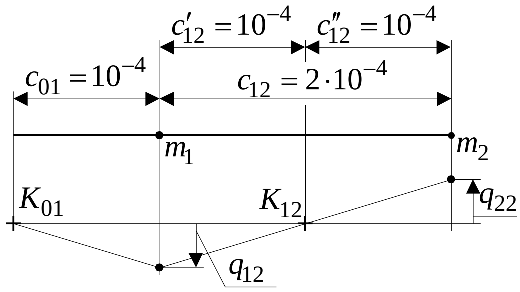
$c''_{12} = c_{12} - c'_{12} = 2 \cdot 10^{-4} - 10^{-4} = 10^{-4}$, vagyis a c_{12} rugón a csomópont valóságos.

A baloldali egyszabadságfokú rezgőrendszert ellenőrzésre használjuk, így teljesülnie kell a

$\alpha_2^2 = \dfrac{c_{01} + c'_{12}}{c_{01} m_1 c'_{12}}$ egyenletnek, ami

$$\alpha_1^2 = \frac{c_{01} + c'_{12}}{c_{01} m_1 c'_{12}} = \frac{10^{-4} + 10^{-4}}{10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 10^4 \text{ teljesül is.}$$

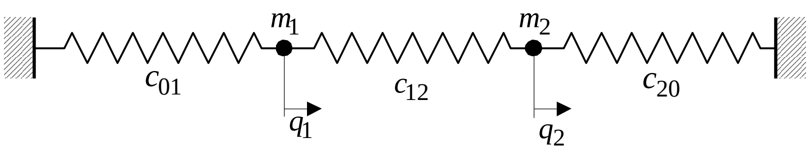
A rezgéskép ábrázolása:



A kitérésekre $\frac{q_{12}}{c'_{12}} = -\frac{q_{22}}{c''_{23}}$ igaz, amiből $q_{22} = -\frac{c''_{12}}{c'_{12}} q_{12} = -q_{12}$, illetve $\left[\underline{\underline{q}}_{02}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

13.3. Példa: Két oldalon kötött lánc szerű rezgőrendszer sajátfrekvenciái és rezgésképei

Adott: $m_1 = 100\,\text{kg}$, $m_2 = 50\,\text{kg}$, $c_{01} = 10^{-4}\,\text{m/N}$, $c_{12} = 10^{-4}\,\text{m/N}$, $c_{20} = 2 \cdot 10^{-4}\,\text{m/N}$.



Feladat:

A rezgőrendszer saját körfrekvenciáinak a meghatározása, majd a differenciálegyenlet-rendszer megoldásából kiindulva a rezgéskép meghatározása mind az első, mind a második saját körfrekvencián.

Kidolgozás:

A rezgőrendszer saját körfrekvenciáinak a meghatározása, majd a differenciálegyenlet-rendszer megoldásából kiindulva a rezgéskép meghatározása mind az első, mind a második saját körfrekvencián:
A karakterisztikus egyenlet betűkkel:

$$c_{01} m_1 c_{12} m_2 c_{20} \left(\alpha^2\right)^2 - \left[c_{01} m_1 \left(c_{12} + c_{20}\right) + \left(c_{01} + c_{12}\right) m_2 c_{20}\right] \alpha^2 + \left(c_{01} + c_{12} + c_{20}\right) = 0.$$

Behelyettesítve:

$$10^{-4} \cdot 100 \cdot 10^{-4} \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \left(\alpha^2\right)^2 - \left[10^{-4} \cdot 100 \cdot \left(10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4}\right) + \left(10^{-4} + 10^{-4}\right) \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-4}\right] \alpha^2 +$$

$$+ 10^{-4} + 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4} = 0$$

Megoldandó a $10^{-8} \left(\alpha^2\right)^2 - 5 \cdot 10^{-6} \alpha^2 + 4 \cdot 10^{-4} = 0$ másodfokú egyenletet, amelynek gyökei:

$$\alpha_{12}^2=\frac{5\cdot10^{-6}\pm\sqrt{\left(5\cdot10^{-6}\right)^2-4\cdot10^{-8}\cdot4\cdot10^{-4}}}{2\cdot10^{-8}}=\frac{5\pm3}{2}10^2=\left\langle\begin{matrix}4\cdot10^2,\\10^2.\end{matrix}\right.$$

$$\alpha_1=\sqrt{10^2}=10\ \text{rad/s},\ \alpha_2=\sqrt{4\cdot10^2}=20\ \text{rad/s}.$$

Amplitúdók a saját körfrekvencián:

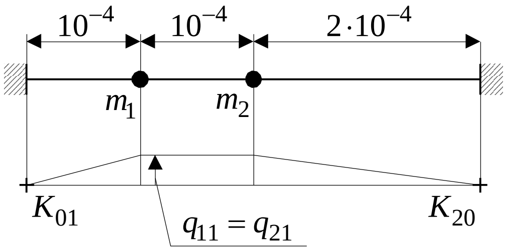
$$\left\{-\begin{bmatrix}m_1&0\\0&m_2\end{bmatrix}\alpha_i^2+\begin{bmatrix}\frac{1}{c_{01}}+\frac{1}{c_{12}}&-\frac{1}{c_{12}}\\-\frac{1}{c_{12}}&\frac{1}{c_{12}}+\frac{1}{c_{20}}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}q_{1i}\\q_{2i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\quad (i=1,2)$$

Első saját körfrekvencián ($\alpha_1=10$ rad/s):

$$\left\{-\begin{bmatrix}100&0\\0&50\end{bmatrix}100+\begin{bmatrix}\frac{1}{10^{-4}}+\frac{1}{10^{-4}}&-\frac{1}{10^{-4}}\\-\frac{1}{10^{-4}}&\frac{1}{10^{-4}}+\frac{1}{2\cdot10^{-4}}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}q_{11}\\q_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\qquad \text{behelyettesítve}$$

$\begin{bmatrix}10^4&-10^4\\-10^4&10^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_{11}\\q_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, azaz $q_{11}=q_{21}$. Ez azt jelenti, hogy a két tömegnek azonos nagyságú és előjelű a kitérése. Nincs a c_{12} rugónak zérus helye az első saját körfrekvencián: $\begin{bmatrix}\underline{\underline{q}}_{01}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

Rezgéskép ábrázolása az első saját körfrekvencián:



Második saját körfrekvencián ($\alpha_2=20$ rad/s):

$$\left\{-\begin{bmatrix}100&0\\0&50\end{bmatrix}400+\begin{bmatrix}\frac{1}{10^{-4}}+\frac{1}{10^{-4}}&-\frac{1}{10^{-4}}\\-\frac{1}{10^{-4}}&\frac{1}{10^{-4}}+\frac{1}{2\cdot10^{-4}}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}q_{12}\\q_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\qquad \text{behelyettesítve}$$

$\begin{bmatrix}-2\cdot10^4&-10^4\\-10^4&-0,5\cdot10^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_{12}\\q_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, azaz $q_{12}=-0,5q_{22}$. Ez azt jelenti, hogy a két tömegnek ellentétes előjelű a kitérése. A c_{12} rugónak a zérus helye az m_1 tömegtől a rugó egyharmad részén van a második saját körfrekvencián: $\begin{bmatrix}\underline{\underline{q}}_{02}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$.

Rezgéskép ábrázolása a második saját körfrekvencián: