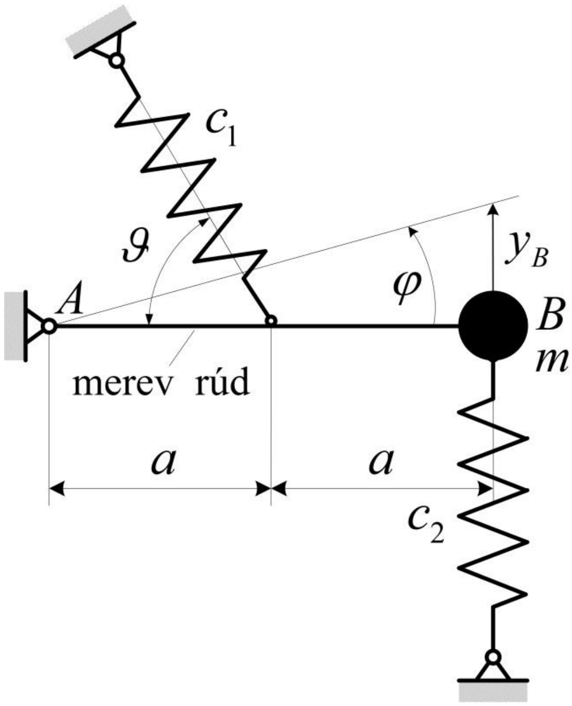
3. MECHANIKA-REZGÉSTAN GYAKORLAT

(kidolgozta: Fehér Lajos, tsz. mérnök; Tarnai Gábor, mérnök tanár;
Molnár Zoltán, egy. adj., Dr. Nagy Zoltán, egy. adj.)

Egy szabadságfokú rezgőrendszer mozgásegyenletének felírása

3.1. Példa: Szabad csillapítatlan rezgőrendszer



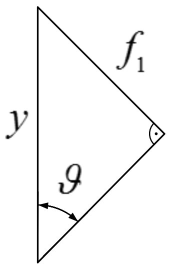
Adott: A $2a$ hosszúságú, súlytalan, merev rúd és m, a, c_1, c_2

Feladat:
a) A rezgőrendszer mozgásegyenletének felírása a merev rúd kis szögelfordulása esetén!
b) A redukált (helyettesítő) rezgőrendszer jellemzőinek meghatározása!

$$\cos\vartheta = \frac{f}{y_B} \quad \Rightarrow \quad f = y_B \cos\vartheta = R\varphi \cos\vartheta$$

$y = R\varphi$ – elmozdulások és szögelfordulások között lineáris kapcsolat áll fenn

A rugóban felhalmozott alakváltozási energia:



$$\sin\vartheta = \frac{f_1}{y} \quad \Rightarrow \quad f_1 = y\sin\vartheta,\ y = a\varphi$$

1. **A feladat megoldása $q = \varphi$ általános koordináta választással.**

Általános koordináta: $q = \varphi,$

$\dot{q} = \dot{\varphi} = \omega,$

$\ddot{q} = \ddot{\varphi} = \varepsilon$

A Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q_c$$

Q_c – általános visszatérítő erő

Az anyagi pont sebessége: $v = 2a\omega = 2a\dot{\varphi}$

A rendszer kinetikai energiája:

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(2a\omega\right)^2=\frac{1}{2}m4a^2\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}m_r\dot{\varphi}^2$$

A rezgőrendszer $q=\varphi$ ált. koordináta választáshoz tartozó redukált tömege:

$$m_r=m4a^2$$

A mozgásegyenlet bal oldalán álló deriváltak előállítása:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{1}{\cancel{2}}m_r\cancel{2}\dot{\varphi}=m_r\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}\right)=m_r\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial E}{\partial q}=\frac{\partial E}{\partial \varphi}=0$$

A rugókban felhalmozott energia:

Kis rezgés: $y<<l$ és $y=R\varphi$

$$U=\frac{1}{2}\frac{y_1^2}{c_1}+\frac{1}{2}\frac{y_2^2}{c_2}=\frac{1}{2}\frac{\left(a\varphi\sin\vartheta\right)^2}{c_1}+\frac{1}{2}\frac{\left(2a\varphi\right)^2}{c_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2\sin^2\vartheta}{c_1}+\frac{4a^2}{c_2}\right)\varphi^2=\frac{1}{2}\frac{\varphi^2}{c_r}$$

A redukált vagy általános rugóállandó:

$$\frac{1}{c_r}=\left(\frac{a^2\sin^2\vartheta}{c_1}+\frac{4a^2}{c_2}\right)$$

Az általános visszatérítő erő:

$$Q_c=-\frac{dU}{dq}=-\frac{dU}{d\varphi}=-\frac{1}{c_r}\varphi$$

Az előállított mennyiségeket behelyettesítve a mozgásegyenletbe és mindent a bal oldalra rendezve:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial E}{\partial q}=Q_c$$

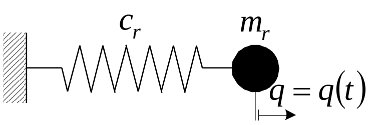
$$m_r\ddot{\varphi}=-\frac{1}{c_r}\varphi \quad \Rightarrow \quad m_r\ddot{\varphi}+\frac{1}{c_r}\varphi=0$$

$$4a^2m\ddot{\varphi}+\left(\frac{a^2\sin^2\vartheta}{c_1}+\frac{4a^2}{c_2}\right)\varphi=0$$

A redukált rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$m_r\ddot{q}+\frac{1}{c_r}q=0$$

A redukált rezgőrendszer:



2. A feladat megoldása $q = y_B$ általános koordináta választással.

Általános koordináta: $q = y_B$,

$\dot{q} = \dot{y}_B = v_B$,

$\ddot{q} = \ddot{y}_B = a_B$

A Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q_c$$

Az anyagi pont sebessége: $v = v_B = \dot{y}_B$

A rendszer kinetikai energiája:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m {v_B}^2 = \frac{1}{2} m y_B^2 = \frac{1}{2} m_r y_B^2,$$

ahol $m_r = m$

A mozgásegyenlet bal oldalán álló deriváltak előállítása:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial E}{\partial \dot{y}_B} = \frac{1}{\cancel{2}} m_r \cancel{2} \dot{y}_B = m_r \dot{y}_B$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}_B}\right) = m_r \ddot{y}_B$$

$$\frac{\partial E}{\partial q} = \frac{\partial E}{\partial y_B} = 0$$

A rugóban felhalmozott energia:

$$U = \frac{1}{2}\frac{y_1^2}{c_1} + \frac{1}{2}\frac{y_2^2}{c_2} = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{y_B}{2}\right)^2}{c_1} + \frac{1}{2}\frac{\left(y_B\right)^2}{c_2} = \frac{1}{2}\frac{\frac{y_B^2 \sin^2\vartheta}{4}}{c_1} + \frac{1}{2}\frac{y_B^2}{c_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\vartheta}{4c_1} + \frac{1}{c_2}\right) y_B^2 = \frac{1}{2}\frac{y_B^2}{c_r},$$

ahol $\dfrac{1}{c_r} = \left(\dfrac{\sin^2\vartheta}{4c_1} + \dfrac{1}{c_2}\right)$

Az ált. visszatérítő erő:

$$Q_c = -\frac{dU}{dq} = -\frac{dU}{dy_B} = -\frac{1}{c_r} y_B$$

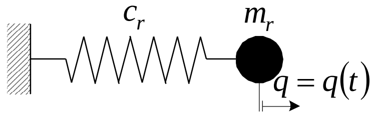
Behelyettesítve a mozgásegyenletbe:

$$m_r \ddot{y}_B + \frac{1}{c_r} y_B = 0$$

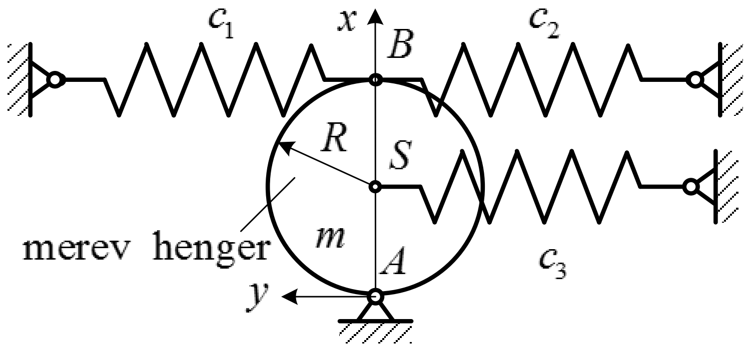
A redukált rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$m_r \ddot{q}_B + \frac{1}{c_r} q = 0$$

A redukált rezgőrendszer:



3.2. Példa: Szabad csillapítatlan rezgőrendszer



Adott: a homogén tömegeloszlású merev henger és m, c_1, c_2, c_3.

Feladat:

a) A rezgőrendszer mozgásegyenletének felírása a merev henger kis szöglefordulása esetén!

b) A helyettesítő (redukált) rezgőrendszer jellemzőinek meghatározása!

1. **A feladat megoldása $q=\varphi$ általános koordináta választással.**

Általános koordináta: $q=\varphi,$

$$\dot{q}=\dot{\varphi}=\omega,$$

$$\ddot{q}=\ddot{\varphi}=\varepsilon$$

A Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial E}{\partial q}=Q_c$$

A rendszer kinetikai energiája:

$$E=\frac{1}{2}J_a\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mR^2\right)\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mR^2\right)\omega^2=\frac{1}{2}m_r\dot{\varphi}^2,$$

ahol $J_a=J_S+md^2=\frac{1}{2}mR^2+mR^2=\frac{3}{2}mR^2$

A mozgásegyenlet bal oldalán álló deriváltak.

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}=m_r\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}\right)=m_r\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial E}{\partial q}=\frac{\partial E}{\partial \varphi}=0$$

A rugóban felhalmozott energia:

$$U=\frac{1}{2}\frac{y_B^2}{c_1}+\frac{1}{2}\frac{y_B^2}{c_2}+\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{y_B^2}{2}\right)^2}{c_3}=\frac{1}{2}\frac{\left(2R\varphi\right)^2}{c_1}+\frac{1}{2}\frac{\left(2R\varphi\right)^2}{c_2}+\frac{1}{2}\frac{\left(R\varphi\right)^2}{c_3}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4R^2}{c_1}+\frac{4R^2}{c_2}+\frac{R^2}{c_3}\right)\varphi^2=\frac{1}{2}\frac{\varphi^2}{c_r},$$

A redukált rugóállandó:

$$\frac{1}{c_r}=\left(\frac{4R^2}{c_1}+\frac{4R^2}{c_2}+\frac{R^2}{c_3}\right)$$

Az általános visszatérítő erő:

$$Q_c = -\frac{dU}{dq} = -\frac{dU}{d\varphi} = -\frac{1}{2}\frac{2\varphi}{c_r} = -\frac{1}{c_r}\varphi$$

Behelyettesítve a mozgásegyenletbe:

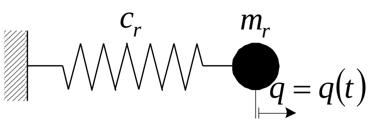
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q_c$$

$$m_r \ddot{\varphi} = -\frac{1}{c_r}\varphi$$

A redukált rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$m_r \ddot{q}_B + \frac{1}{c_r} q = 0$$

A redukált rezgőrendszer:



2. A feladat megoldása $q = y_B$ általános koordináta választással.

Általános koordináta: $q = y_B$,

$\dot{q} = \dot{y}_B = v_B$,

$\ddot{q} = \ddot{y}_B = a_B$

A Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q_c$$

A rendszer kinetikai energiája:

$$E = \frac{1}{2} J_a \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} m R^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} m R^2\right)\left(\frac{\dot{y}_B}{2R}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} m \cancel{R^2}\right)\frac{\dot{y}_B}{4\cancel{R^2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8} m\right)\dot{y}_B^2 = \frac{1}{2} m_r \dot{y}_B^2,$$

ahol $m_r = \frac{3}{8} m, \quad \dot{y}_B = v_B = 2R\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\dot{y}_B}{2R}$

A mozgásegyenlet bal oldalán álló deriváltak.

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial E}{\partial \dot{y}_B} = \frac{1}{\cancel{2}} m_r \cancel{2} \dot{y}_B = m_r \dot{y}_B$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}_B}\right) = m_r \ddot{y}_B$$

$$\frac{\partial E}{\partial q} = \frac{\partial E}{\partial y_B} = 0$$

A rugóban felhalmozott energia:

$$U = \frac{1}{2}\frac{y_B^2}{c_1} + \frac{1}{2}\frac{y_B^2}{c_2} + \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{y_B^2}{2}\right)^2}{c_3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{4c_3}\right) y_B^2 = \frac{1}{2}\frac{y_B^2}{c_r}$$

A redukált rugóállandó:

$$\frac{1}{c_r}=\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{4c_3}\right)$$

Az általános visszatérítő erő:

$$Q_c=-\frac{dU}{dq}=-\frac{dU}{dy_B}=-\frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{c_r}\cancel{2}y_B=-\frac{1}{c_r}y_B$$

Behelyettesítve a mozgásegyenletbe:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial E}{\partial q}=Q_c$$

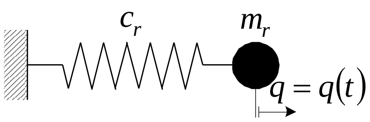
$$m_r\ddot{y}_B=-\frac{1}{c_r}y_B$$

$$m_r\ddot{y}_B+\frac{1}{c_r}y_B=0$$

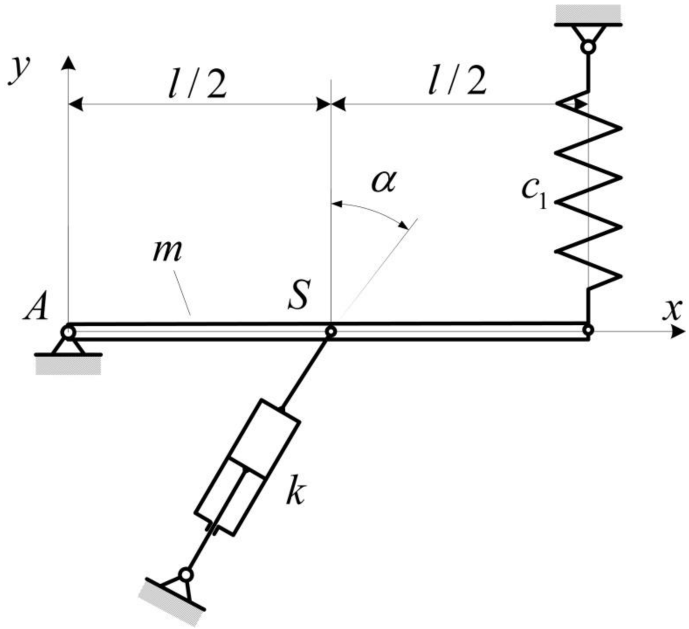
A redukált rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$m_r\ddot{q}_B+\frac{1}{c_r}q=0$$

A redukált rezgőrendszer:



3.3. Példa: Szabad csillapított rezgőrendszer



Adott: az ábrán látható merev rúd és m, c_1, k, l.

Feladat:

a) A rezgőrendszer mozgásegyenletének felírása a merev rúd kis szögelfordulása esetén!

b) A helyettesítő (redukált) rezgőrendszer jellemzőinek meghatározása.

1. A feladat megoldása $q=\varphi$ általános koordináta választással.

Általános koordináta: $q=\varphi,$

$\dot{q}=\dot{\varphi}=\omega,$

$\ddot{q}=\ddot{\varphi}=\varepsilon$

A Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial E}{\partial q}=Q_c+Q_k$$

A rendszer kinetikai energiája:

$$E=\frac{1}{2}J_a\omega^2=\frac{1}{2}\left(J_S+m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2+m\frac{l^2}{4}\right)\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}m_r\dot{\varphi}^2$$

Redukált tömeg $m_r=\frac{1}{3}ml^2$

A mozgásegyenlet bal oldalán álló deriváltak.

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{1}{2}m_r 2\dot{\varphi}=m_r\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}\right)=m_r\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial E}{\partial q}=\frac{\partial E}{\partial \varphi}=0$$

A rugóban felhalmozott energia:

$$U=\frac{1}{2}\frac{y^2}{c_1}=\frac{1}{2}\frac{(l\varphi)^2}{c_1}=\frac{1}{2}\frac{l^2}{c_1}\varphi^2=\frac{1}{2}\frac{1}{c_r}\varphi^2=\frac{1}{2}\frac{\varphi^2}{c_r}$$

Az általános visszatérítő erő:

$$Q_c=-\frac{dU}{dq}=-\frac{dU}{d\varphi}=-\frac{1}{2}\frac{2\varphi}{c_r}=-\frac{1}{c_r}\varphi$$

Az általános csillapító erő meghatározása:

$Q_k=\vec{F}_k\cdot\vec{\beta}_S,$

ahol $\vec{\beta}_S=\frac{\partial \vec{v}_S}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{\partial\left(\frac{l}{2}\dot{\varphi}\vec{j}\right)}{\partial \dot{\varphi}}=\left(\frac{l}{2}\vec{j}\right)$

A csillapító erő: $\vec{F}_k=-k\vec{v}_d,$

ahol $\vec{v}_d$ – a dugattyú relatív sebessége: $v_d=v_S\cos\alpha=\frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\alpha$

$$\vec{v}_d=v_d\left(\sin\alpha\vec{i}+\cos\alpha\vec{j}\right)$$

$$\vec{F}_k=-k\vec{v}_d=-k\frac{l}{2}\left(\sin\alpha\cos\alpha\vec{i}+\cos^2\alpha\vec{j}\right)\dot{\varphi}$$

Általános csillapító erő:

$$Q_k=\vec{F}_k\cdot\vec{\beta}_S=-k\frac{l}{2}\cos^2\alpha\frac{l}{2}\dot{\varphi}=-k\frac{l^2}{4}\cos^2\alpha\dot{\varphi}=-k_r\dot{\varphi},$$

ahol $k_r = k\dfrac{l^2}{4}\cos^2\alpha$ a redukált csillapítási tényező.

Az előállított mennyiségeket behelyettesítve a mozgásegyenletbe:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q_c + Q_k$$

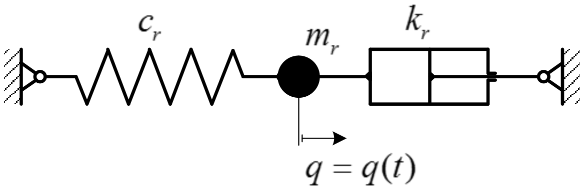
$$\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\ddot{\varphi} = \left(-\frac{l^2}{c_1}\right)\varphi + \left(-k\frac{l^2}{4}\cos^2\alpha\right)\dot{\varphi}$$

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi} + k\frac{l^2}{4}\cos^2\alpha\dot{\varphi} + \frac{l^2}{c_1}\varphi = 0 \qquad \text{vagy} \qquad m_r\ddot{\varphi} + k_r\dot{\varphi} + \frac{1}{c_r}\varphi = 0$$

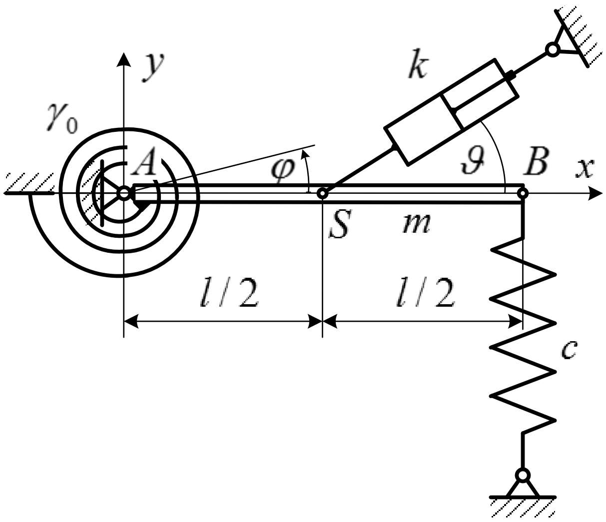
A redukált rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$m_r\ddot{\varphi} + k_r\dot{\varphi} + \frac{1}{c_r}\varphi = 0$$

A redukált rezgőrendszer:



3.4. Példa: Szabad csillapított rezgőrendszer



Adott: az ábrán látható merev rúd és $m, c, \gamma_0, k, l.$

Feladat:

a) A rezgőrendszer mozgásegyenletének felírása a merev rúd kis szögelfordulása esetén!

b) A helyettesítő (redukált) rezgőrendszer jellemzőinek meghatározása.

Általános koordináta választás: $q = \varphi$ – *szögelfordulás*,

$\dot{q} = \dot{\varphi} = \omega$ – *szögsebesség*,

$\ddot{q} = \ddot{\varphi} = \varepsilon$ – *szöggyorsulás*.

A Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q_c + Q_k$$

A rendszer kinetikai energiája:

$$E=\frac{1}{2}J_a\omega^2=\frac{1}{2}\left(J_S+m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2+m\frac{l^2}{4}\right)\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}m_r\dot{\varphi}^2$$

Redukált tömeg $m_r=\frac{1}{3}ml^2$

A mozgásegyenlet bal oldalán álló deriváltak.

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{1}{2}m_r 2\dot{\varphi}=m_r\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}\right)=m_r\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial E}{\partial q}=\frac{\partial E}{\partial \varphi}=0$$

A rugóban felhalmozott energia:

$$U=\frac{1}{2}\frac{1}{\gamma_0}\varphi^2+\frac{1}{2}\frac{1}{c}(l\varphi)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma_0}+\frac{l^2}{c}\right)\varphi^2=\frac{1}{2}\frac{1}{c_r}\varphi^2=\frac{1}{2}\frac{\varphi^2}{c_r}$$

Redukált rugóállandó:

$$\frac{1}{c_r}=\frac{1}{\gamma_0}+\frac{l^2}{c}$$

Az általános visszatérítő erő:

$$Q_c=-\frac{dU}{dq}=-\frac{dU}{d\varphi}=-\frac{1}{2}\frac{2\varphi}{c_r}=-\frac{1}{c_r}\varphi$$

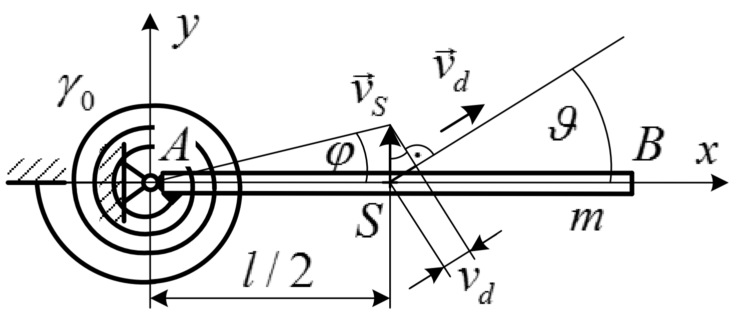
Az általános csillapító erő meghatározása:

$Q_k=\vec{F}_k\cdot\vec{\beta}_S$,

ahol $\vec{\beta}_S=\frac{\partial \vec{v}_S}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{\partial\left(\frac{l}{2}\dot{\varphi}\vec{j}\right)}{\partial \dot{\varphi}}=\left(\frac{l}{2}\vec{j}\right)$

A csillapító erő: $\vec{F}_k=-k\vec{v}_d$,

ahol $\vec{v}_d$ – a dugattyú relatív sebessége: $v_d=v_S\sin\vartheta=\frac{l}{2}\dot{\varphi}\sin\vartheta$



$$\vec{v}_d=v_d\left(\cos\vartheta\vec{i}+\sin\vartheta\vec{j}\right)$$

$$\vec{F}_k=-k\vec{v}_d=-k\frac{l}{2}\left(\sin\vartheta\cos\vartheta\vec{i}+\sin^2\vartheta\vec{j}\right)\dot{\varphi}$$

Általános csillapító erő:

$$Q_k = \vec{F}_k \cdot \vec{\beta}_S = -k\frac{l}{2}\sin^2\vartheta \frac{l}{2}\dot{\varphi} = -k\frac{l^2}{4}\sin^2\vartheta\dot{\varphi} = -k_r\dot{\varphi},$$

ahol $k_r = k\frac{l^2}{4}\sin^2\vartheta$ a redukált csillapítási tényező.

Az előállított mennyiségeket behelyettesítve a mozgásegyenletbe:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q_c + Q_k$$

$$\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\ddot{\varphi} = -\left(\frac{1}{\gamma_0} + \frac{l^2}{c}\right)\varphi + \left(-k\frac{l^2}{4}\sin^2\vartheta\right)\dot{\varphi}$$

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi} + k\frac{l^2}{4}\sin^2\vartheta\dot{\varphi} + \left(\frac{1}{\gamma_0} + \frac{l^2}{c}\right)\varphi = 0 \qquad \text{vagy} \qquad m_r\ddot{\varphi} + k_r\dot{\varphi} + \frac{1}{c_r}\varphi = 0$$

A redukált rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$m_r\ddot{\varphi} + k_r\dot{\varphi} + \frac{1}{c_r}\varphi = 0$$

A redukált rezgőrendszer: