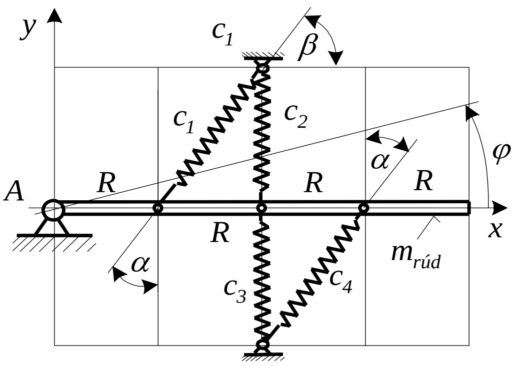
4. MECHANIKA-REZGÉSTAN GYAKORLAT
(kidolgozta: Fehér Lajos, tsz. mérnök; Tarnai Gábor, mérnök tanár; Molnár Zoltán, egy. adj., Dr. Nagy Zoltán, egy. adj.)

Egy szabadságfokú rezgőrendszer mozgásegyenletének felírása

4.1. Példa: Szabad csillapítatlan rezgőrendszer



Adott: az ábrán látható, az **A** pontban csapágyazott rezgőrendszer. Az általános koordináta legyen a rúd szögelfordulása $q=\varphi$.

$R=1$ m, $c_1=c_2=c_3=c_4=4\cdot 10^{-4}$ m/N ,

$m_{rúd}=12$ kg , $\beta=60^\circ$.

Feladat: a) Határozza meg az ábrán látható rendszer mozgásegyenletét kis szögelfordulások esetén.

b) Határozza meg a redukált rendszer jellemző paramétereit.

Kidolgozás:

1. A feladat megoldása $q=\varphi$ általános koordináta választással.

a) A mozgásegyenlet felírása:

Az ábrából: $\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\beta=30^\circ$.

Általános koordináta: $q=\varphi$.

$q=\varphi \quad (\text{rad})$,

$\dot{q}=\dot{\varphi} \quad (\text{rad/s})$,

$\ddot{q}=\ddot{\varphi} \quad (\text{rad/s}^2)$.

A *Lagrange*-féle másodfajú mozgásegyenlet: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dE}{d\dot{q}}\right)-\dfrac{dE}{dq}=Q_c$.

A rendszer kinetikai energiája:

$$E=\frac{1}{2}J_a\,\omega^2=\frac{1}{2}J_a\,\dot{q}^2=\frac{1}{2}J_a\,\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}\left(J_s+m_{rúd}\left[2R\right]^2\right)\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m_{rúd}\left[4R\right]^2+m_{rúd}\left[2R\right]^2\right)\dot{\varphi}^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{64}{12}m_{rúd}R^2\right)\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}m_r\dot{\varphi}^2.$$

A mozgásegyenlet bal oldalán álló deriváltak előállítása:

$$\frac{dE}{d\dot{q}}=\frac{dE}{d\dot{\varphi}}=\frac{1}{2}m_r\,2\dot{\varphi}=m_r\dot{\varphi} \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{d\dot{\varphi}}\right)=m_r\ddot{\varphi},$$

$$\frac{dE}{dq}=\frac{dE}{d\varphi}=0\,.$$

A rugókban felhalmozódott deformációs energia:

$$U=\frac{1}{2}\frac{\left(R\varphi\cos\alpha\right)^2}{c_1}+\frac{1}{2}\frac{\left(2R\varphi\right)^2}{c_2}+\frac{1}{2}\frac{\left(2R\varphi\right)^2}{c_3}+\frac{1}{2}\frac{\left(3R\varphi\cos\alpha\right)^2}{c_4},$$

$$U=\frac{1}{2}\frac{R^2\varphi^2\cos^2\alpha}{c_1}+\frac{1}{2}\frac{4R^2\varphi^2}{c_2}+\frac{1}{2}\frac{4R^2\varphi^2}{c_3}+\frac{1}{2}\frac{9R^2\varphi^2\cos^2\alpha}{c_4}=\frac{1}{2}\frac{1}{c_r}\varphi^2.$$

Az általános visszatérítő erő:

$$Q_c=-\frac{dU}{dq}=-\frac{dU}{d\varphi}=-\left(\frac{R^2\cos^2\alpha}{c_1}+\frac{4R^2}{c_2}+\frac{4R^2}{c_3}+\frac{9R^2\cos^2\alpha}{c_4}\right)\varphi=-\frac{1}{c_r}\varphi.$$

A rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$m_r\ddot{\varphi}+\frac{1}{c_r}\varphi=0$$

$$\left(\frac{64}{12}m_{rúd}R^2\right)\ddot{\varphi}+\left(\frac{R^2\cos^2\alpha}{c_1}+\frac{4R^2}{c_2}+\frac{4R^2}{c_3}+\frac{9R^2\cos^2\alpha}{c_4}\right)\varphi=0.$$

b) A redukált jellemzők meghatározása:

$$m_r=\frac{64}{12}m_{rúd}R^2=\frac{64}{12}\cdot 12\cdot 1^2=64\ \text{kgm}^2,$$

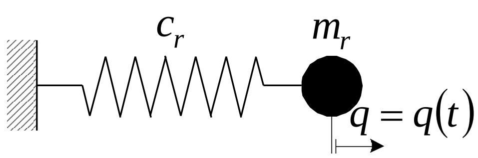
$$\frac{1}{c_r}=\frac{R^2\cos^2\alpha}{c_1}+\frac{4R^2}{c_2}+\frac{4R^2}{c_3}+\frac{9R^2\cos^2\alpha}{c_4}=\frac{1^2\cdot\cos^2 30^\circ}{4\cdot 10^{-4}}+\frac{4\cdot 1^2}{4\cdot 10^{-4}}+\frac{4\cdot 1^2}{4\cdot 10^{-4}}+\frac{9\cdot 1^2\cdot\cos^2 30^\circ}{4\cdot 10^{-4}},$$

$$\frac{1}{c_r}=\frac{15{,}5}{4\cdot 10^{-4}}=38750\ \text{Nm}.$$

A helyettesítő (redukált) rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$64\ddot{\varphi}+38750\varphi=0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Forgómozgás dinamikai alapegyenlete.}$$

A helyettesítő (redukált) rezgőrendszer:



2. A feladat megoldása $q=y_B$ általános koordináta választással.

Általános koordináta: $q=y_B$,

$\dot{q}=\dot{y}_B=v_B$,

$\ddot{q}=\ddot{y}_B=a_B$

A *Lagrange*-féle másodfajú mozgásegyenlet: $\frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{d\dot{q}}\right)-\frac{dE}{dq}=Q_c$.

A rendszer kinetikai energiája:

$$E=\frac{1}{2}J_a\omega^2=\frac{1}{2}J_a\left(\frac{\dot{y}_B}{R}\right)^2=\frac{1}{2}\left(J_s+m_{rúd}\left[2R\right]^2\right)\frac{\dot{y}_B^2}{R^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m_{rúd}\left[4R\right]^2+m_{rúd}\left[2R\right]^2\right)\frac{\dot{y}_B^2}{R^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}m_{rúd}+4m_{rúd}\right)\dot{y}_B^2=\frac{1}{2}\left(\frac{16}{3}m_{rúd}\right)\dot{y}_B^2=\frac{1}{2}m_r\dot{y}_B^2.$$

A mozgásegyenlet bal oldalán álló deriváltak előállítása:

$$\frac{dE}{d\dot{q}}=\frac{dE}{d\dot{\varphi}}=\frac{1}{2}m_r 2\dot{y}_B=m_r\dot{y}_B \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{d\dot{\varphi}}\right)=m_r\ddot{y}_B\,,$$

$$\frac{dE}{dq}=\frac{dE}{d\varphi}=0\,.$$

A rugókban felhalmozódott deformációs energia, kis rezgések esetén, ahol $y=R\varphi$ a rúd elmozdulása.

$$U=\frac{1}{2}\frac{\left(y_B\cos\alpha\right)^2}{c_1}+\frac{1}{2}\frac{\left(2y_B\right)^2}{c_2}+\frac{1}{2}\frac{\left(2y_B\right)^2}{c_3}+\frac{1}{2}\frac{\left(3y_B\cos\alpha\right)^2}{c_4},$$

$$U=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{c_1}+\frac{4}{c_2}+\frac{4}{c_3}+\frac{9\cos^2\alpha}{c_4}\right)y_B{}^2=\frac{1}{2}\frac{1}{c_r}y_B{}^2.$$

Az általános visszatérítő erő:

$$Q_c=-\frac{dU}{dq}=-\frac{dU}{dy_B}=-\frac{1}{2}\frac{1}{c_r}2y_B=-\frac{1}{c_r}y_B.$$

A rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$m_r\ddot{y}_B+\frac{1}{c_r}y_B=0$$

$$\left(\frac{4}{12}m_{rúd}\right)\ddot{y}_B+\left(\frac{\cos^2\alpha}{c_1}+\frac{4}{c_2}+\frac{4}{c_3}+\frac{9\cos^2\alpha}{c_4}\right)y_B=0.$$

b) A redukált jellemzők meghatározása:

$$m_r=\frac{4}{12}m_{rúd}=\frac{4}{12}\cdot 12=4\text{ kg},$$

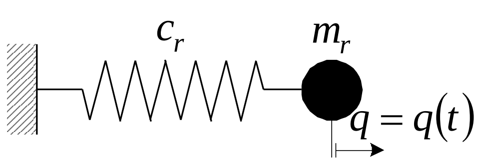
$$\frac{1}{c_r}=\frac{\cos^2\alpha}{c_1}+\frac{4}{c_2}+\frac{4}{c_3}+\frac{9\cos^2\alpha}{c_4}=\frac{\cos^2 30^\circ}{4\cdot 10^{-4}}+\frac{4}{4\cdot 10^{-4}}+\frac{4}{4\cdot 10^{-4}}+\frac{9\cdot\cos^2 30^\circ}{4\cdot 10^{-4}},$$

$$\frac{1}{c_r}=\frac{15{,}5}{4\cdot 10^{-4}}=38750\ \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

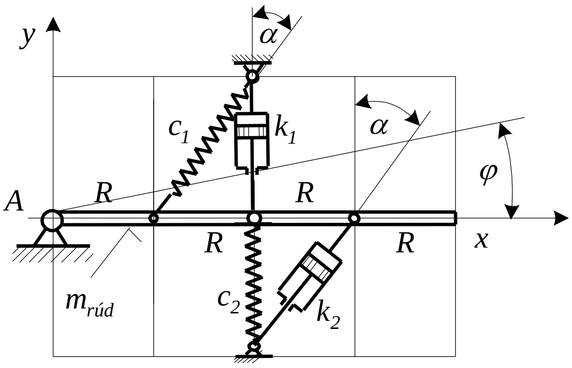
A helyettesítő (redukált) rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$4\ddot{y}_B+38750\,y_B=0 \qquad\Rightarrow\quad \text{Forgómozgás dinamikai alapegyenlete.}$$

A helyettesítő (redukált) rezgőrendszer:



4.2. Példa: Szabad csillapított rezgőrendszer



Adott: az ábrán látható, az A pontban csapágyazott rezgőrendszer. Az általános koordináta legyen a rúd szögelfordulása $q=\varphi$.

$R=1$ m, $c_1=c_2=4\cdot10^{-4}$ m/N , $\alpha=30^\circ$,

$m_{rúd}=12$ kg , $k_1=k_2=100$ Ns/m.

Feladat: a) Határozza meg az ábrán látható rezgőrendszer mozgásegyenletét kis szögelfordulások esetén.

b) Határozza meg a redukált rezgőrendszer jellemző paramétereit.

Kidolgozás:

a) A mozgásegyenlet felírása:

Az általános koordináta: $q=\varphi$.

$q=\varphi \quad (\text{rad})$,

$\dot{q}=\dot{\varphi} \quad (\text{rad/s})$,

$\ddot{q}=\ddot{\varphi} \quad (\text{rad/s}^2)$.

A *Lagrange*-féle másodfajú mozgásegyenlet: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dE}{d\dot{q}}\right)-\dfrac{dE}{dq}=Q_c+Q_k$.

A rendszer kinetikai energiája:

$$E=\frac{1}{2}J_a\omega^2=\frac{1}{2}J_a\dot{q}^2=\frac{1}{2}J_a\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}\left(J_s+md^2\right)\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m_{rúd}\left[4R\right]^2+m_{rúd}\left[2R\right]^2\right)\dot{\varphi}^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{64}{12}m_{rúd}R^2\right)\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}m_r\dot{\varphi}^2.$$

A mozgásegyenlet bal oldalán álló deriváltak előállítása:

$$\frac{dE}{d\dot{q}}=\frac{dE}{d\dot{\varphi}}=\frac{64}{12}m_{rúd}R^2\dot{\varphi}=m_r\dot{\varphi} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{d\dot{\varphi}}\right)=\frac{64}{12}m_{rúd}R^2\ddot{\varphi}=m_r\ddot{\varphi},$$

$$\frac{dE}{dq}=\frac{dE}{d\varphi}=0.$$

A rugókban felhalmozódott deformációs energia:

$$U=\frac{1}{2}\frac{\left(R\varphi\cos\alpha\right)^2}{c_1}+\frac{1}{2}\frac{\left(2R\varphi\right)^2}{c_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{R^2\cos^2\alpha}{c_1}+\frac{4R^2}{c_2}\right)\varphi^2=\frac{1}{2}\frac{1}{c_r}\varphi^2$$

Az általános visszatérítő erő:

$$Q_c=-\frac{dU}{dq}=-\frac{dU}{d\varphi}=-\left(\frac{R^2\cos^2\alpha}{c_1}+\frac{4R^2}{c_2}\right)\varphi=-\frac{1}{c_r}\varphi.$$

Az általános csillapító erő:

$Q_k=\vec{F}_{k1}\cdot\vec{\beta}_B+\vec{F}_{k2}\cdot\vec{\beta}_C$, ahol $\vec{F}_{k1}$, $\vec{F}_{k2}$ - a csillapító erők.

$\vec{F}_k=-k\vec{v}_d$, ahol k a csillapítási tényező, $\vec{v}_d$ a digattyú relatív sebessége a hengerhez képest.

Így $\vec{F}_{k1} = -k_1\vec{v}_{d1} = -k_1\left(2R\omega\vec{j}\right) = -k_1\left(2R\dot{\varphi}\vec{j}\right)$

$$\vec{\beta}_B = \frac{\partial \vec{v}_B}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial\left(2R\dot{\varphi}\vec{j}\right)}{\partial \dot{\varphi}} = 2R\vec{j}$$

ahol $\vec{\beta}_B$ az $\vec{F}_{k1}$ erő támadáspontjának az egységnyi koordináta sebességhez tartozó sebessége.

$$Q_{k1} = \vec{F}_{k1}\cdot\vec{\beta}_B = -k_1\left(2R\dot{\varphi}\vec{j}\right)\left(2R\vec{j}\right) = -k_1 4R^2\dot{\varphi}$$

$$Q_{k2} = \vec{F}_{k2}\cdot\vec{\beta}_C$$

$$\vec{F}_{k2} = -k_2\vec{v}_{d2} = -k_2 3R\dot{\varphi}\cos\alpha\left(\sin\alpha\vec{i} + \cos\alpha\vec{j}\right) = -k_2 3R\dot{\varphi}\left(\cos\alpha\sin\alpha\vec{i} + \cos^2\alpha\vec{j}\right)$$

$$\vec{\beta}_C = \frac{\partial \vec{v}_C}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial\left(3R\dot{\varphi}\vec{j}\right)}{\partial \dot{\varphi}} = 3R\vec{j}$$

$$Q_{k2} = \vec{F}_{k2}\cdot\vec{\beta}_C = -k_2 3R\dot{\varphi}\left(\cos\alpha\sin\alpha\vec{i} + \cos^2\alpha\vec{j}\right)\left(3R\vec{j}\right) = -k_2 9R^2\dot{\varphi}\cos^2\alpha$$

Így az általános csillapító erő:

$$Q_k = Q_{k1} + Q_{k2} = -k_1 4R^2\dot{\varphi} - k_2 9R^2\dot{\varphi}\cos^2\alpha = -\left(k_1 4R^2 + k_2 9R^2\cos^2\alpha\right)\dot{\varphi} = -k_{red}\dot{\varphi}$$

Az előállított mennyiségeket behelyettesítve a mozgásegyenletbe:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{d\dot{q}}\right) - \frac{dE}{dq} = Q_c + Q_k\,.$$

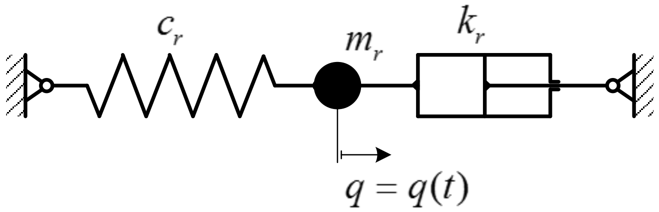
$$m_r\ddot{\varphi} = -\frac{1}{c_r}\varphi - k_{red}\dot{\varphi}$$

A rezgőrendszer redukált mozgásegyenlete:

$$m_r\ddot{\varphi} + k_{red}\dot{\varphi} + \frac{1}{c_r}\varphi = 0$$

$$\frac{64}{12}m_{rúd}R^2\,\ddot{\varphi} + \left(k_1 4R^2 + k_2 9R^2\cos^2\alpha\right)\dot{\varphi} + \left(\frac{R^2\cos^2\alpha}{c_1} + \frac{4R^2}{c_2}\right)\varphi = 0.$$

A redukált rezgőrendszer:



b) A redukált jellemzők meghatározása:

$$m_r = \frac{64}{12} m_{rúd} R^2 = \frac{64}{12} \cdot 12 \cdot 1^2 = 64 \text{ kgm}^2,$$

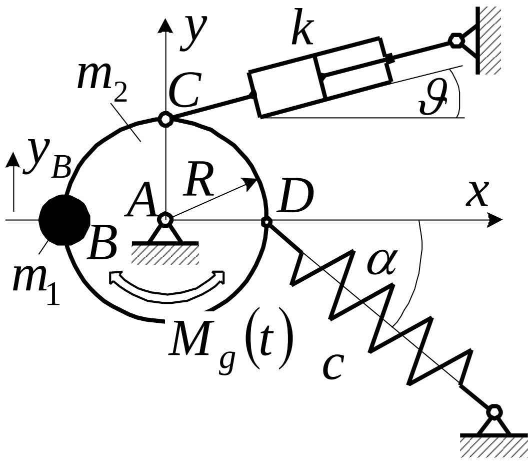
$$k_{red} = k_1 4R^2 + k_2 9R^2 \cos^2\alpha = \left(4k_1 + 9k_2\cos^2\alpha\right)R^2 = \left(4\cdot 100 + 9\cdot 100\cdot\cos^2 30^\circ\right)1^2 = 1075 \text{ Nsm},$$

$$\frac{1}{c_r} = \frac{R^2\cos^2\alpha}{c_1} + \frac{4R^2}{c_2} = \frac{1^2\cdot\cos^2 30^\circ}{4\cdot 10^{-4}} + \frac{4\cdot 1^2}{4\cdot 10^{-4}} = \frac{0,75+4}{4\cdot 10^{-4}} = 11875 \text{ Nm}.$$

A redukált rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$64\ddot{\varphi} + 1075\dot{\varphi} + 11875\varphi = 0.$$

4.3. Példa: Gerjesztett csillapított rezgőrendszer



Adott: az ábrán látható R sugarú, m_2 tömegű merev, homogén tömegeloszlású tárcsa és m_1, m_2, R, c, k, α, ϑ, $M_g(t) = M_{g0}\sin(\omega t + \varepsilon)$.

Feladat: a) Határozza meg az ábrán látható rezgőrendszer mozgásegyenletét kis szögelfordulások esetén.

b) Határozza meg a redukált rezgőrendszer jellemző paramétereit.

Általános koordinátaválasztás: $q = y_B$ - a B pont elmozdulása,

$\dot{q} = \dot{y}_B = v_B$ - a B pont sebessége,

$\ddot{q} = \ddot{y}_B = a_B$ - a B pont gyorsulása.

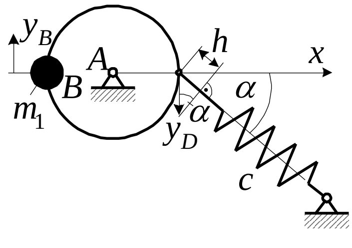
A *Lagrange*-féle másodfajú mozgásegyenlet:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}_B}\right) - \frac{\partial E}{\partial y_B} = Q_c + Q_k + Q_g .$$

A rendszer kinetikai energiája:

$$E = \frac{1}{2}m_1 v_B^2 + \frac{1}{2}J_{a2}\omega^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{1}{2}m_2 R^2\frac{1}{R^2}\right)\dot{y}_B^2 = \frac{1}{2}m_r\dot{y}_B^2 .$$

A rezgőrendszer $q = y_B$ általános koordinátaválasztáshoz tartozó redukált, vagy általános tömege: $m_r = \left(m_1 + \frac{1}{2}m_2\right)$.



A rugó hosszváltozása: $|y_B| = |y_D|$, $h = y_B\sin\alpha$.

A rugóban felhalmozott energia:

$$U = \frac{1}{2}\frac{h^2}{c} = \frac{1}{2}\frac{\sin^2\alpha}{c}y_B^2 = \frac{1}{2}\frac{y_B^2}{c_r} .$$

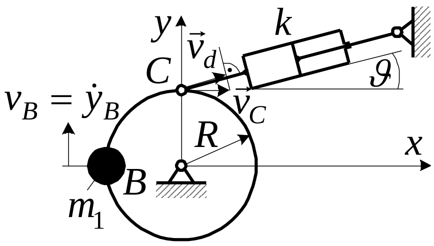
A rezgőrendszer $q = y_B$ általános koordinátaválasztáshoz tartozó c_r redukált rugóállandója: $\dfrac{1}{c_r} = \dfrac{\sin^2\alpha}{c}$.

Az általános visszatérítő erő meghatározása:

$$Q_c = -\frac{\partial U}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial y_B} = -\frac{1}{c_r} y_B = -\frac{\sin^2\alpha}{c} y_B .$$

Az általános csillapító erő meghatározása: $Q_k = \vec{F}_k \cdot \vec{\beta}_C$.

A dugattyú relatív sebességének meghatározása:



$$|v_C| = |v_B| = |\dot{y}_B|, \; v_d = v_C \cos\vartheta = \dot{y}_B \cos\vartheta ,$$

$$\vec{v}_d = v_d \vec{e}_d = v_d (\cos\vartheta \vec{i} + \sin\vartheta \vec{j}) .$$

$$\vec{\beta}_C = \frac{\partial \vec{v}_C}{\partial \dot{y}_B} = \frac{\partial\left(\dot{y}_B \vec{i}\right)}{\partial \dot{y}_B} = \vec{i} ,$$

$$\vec{F}_k = -k\vec{v}_d = -k\, v_d \vec{e}_d = -k \cos\vartheta \dot{y}_B (\cos\vartheta \vec{i} + \sin\vartheta \vec{j}) .$$

$$Q_k = \vec{F}_k \cdot \vec{\beta}_C = -k \cos^2\vartheta\, \dot{y}_B = -k_r\, \dot{y}_B .$$

A rezgőrendszer $q = y_B$ általános koordinátaválasztáshoz tartozó k_r redukált, vagy általános csillapítási tényezője: $k_r = k\cos^2\vartheta$.

Az általános gerjesztő erő meghatározása: $Q_g = \vec{M}_g(t) \cdot \vec{b}$.

$$\vec{M}_g(t) = M_g(t)\vec{k} = M_{g0} \sin(\omega t + \varepsilon)\vec{k} ,$$

$$\vec{b} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{y}_B} = \frac{\partial\left(\dfrac{\dot{y}_B}{R}\vec{k}\right)}{\partial \dot{y}_B} = \frac{1}{R}\vec{k} ,$$

$$Q_g = \vec{M}_g(t) \cdot \vec{b} = \frac{1}{R} M_g(t) .$$

Az előállított mennyiségeket behelyettesítve a mozgásegyenletbe és az általános gerjesztő erő kivételével mindent az egyenlet bal oldalára rendezve:

$$\left(m_1 + \frac{1}{2} m_2\right)\ddot{y}_B + k\cos^2\vartheta \dot{y}_B + \frac{\sin^2\alpha}{c} y_B = M_g(t)\frac{1}{R}, \text{ vagy}$$

$$m_r \ddot{y}_B + k_r \dot{y}_B + \frac{1}{c_r} y_B = M_g(t)\frac{1}{R}.$$

A redukált rezgőrendszer mozgásegyenlete: $m_r \ddot{q} + k_r \dot{q} + \dfrac{1}{c_r} q = Q_g(t)$.

A redukált rezgőrendszer: