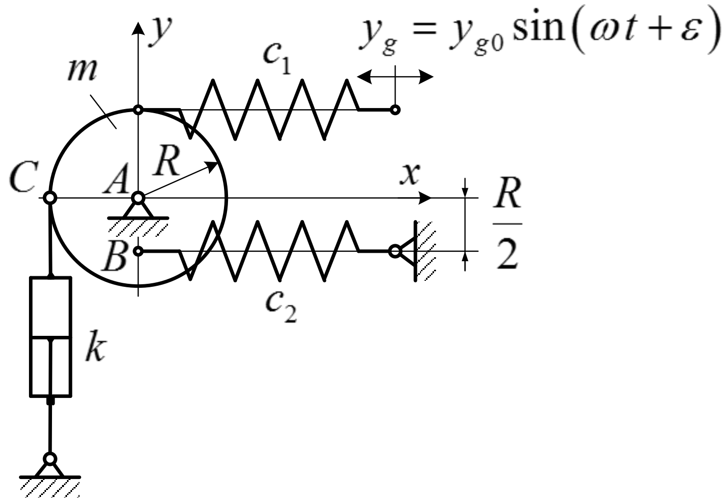
5. MECHANIKA-REZGÉSTAN GYAKORLAT

(kidolgozta: Fehér Lajos, tsz. mérnök; Tarnai Gábor, mérnök tanár;
Molnár Zoltán, egy. adj., Dr. Nagy Zoltán, egy. adj.)

Egy szabadságfokú rezgőrendszer mozgásegyenletének felírása

5.1. Példa: Gerjesztett, csillapított rezgőrendszer



Adott: az ábrán látható, m tömegű merev henger, valamint R, k, c_1, c_2, $y_g = y_{g0}\sin(\omega t+\varepsilon)$. Az általános koordináta legyen a rúd szögelfordulása $q = \varphi$.

Feladat: a) Határozza meg az ábrán látható rendszer mozgásegyenletét kis szögelfordulások esetén.
b) Határozza meg a redukált rendszer jellemző paramétereit.

Általános koordináta: $q = \varphi$,

$\dot{q} = \dot{\varphi} = \omega$,

$\ddot{q} = \ddot{\varphi} = \varepsilon$

A Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q_c$$

A rendszer kinetikai energiája:

$$E = \frac{1}{2}J_a\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m_r\dot{\varphi}^2,$$

Redukált tömeg: $m_r = \frac{1}{2}mR^2$

A mozgásegyenlet bal oldalán álló deriváltak.

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = m_r\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m_r\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial E}{\partial q} = \frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0$$

Az általános visszatérítő és gerjesztő erő:

$$U = \frac{1}{2}\frac{\left(R\varphi - y_g\right)^2}{c_1} + \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{R}{2}\varphi\right)^2}{c_2}$$

$$Q_c + Q_g = -\frac{dU}{dq} = -\frac{dU}{d\varphi} = -\frac{R\varphi - y_g}{c_1}R - \left(\frac{R}{2}\right)^2\frac{\varphi}{c_2} = -\left(\frac{R^2}{c_1} + \frac{R^2}{4c_2}\right)\varphi + \frac{R}{c_1}y_g = -\frac{1}{c_r}\varphi + Q_g\left(t\right)$$

A redukált rugóállandó: $\frac{1}{c_r} = \left(\frac{R^2}{c_1} + \frac{R^2}{4c_2}\right)$

Az általános csillapítóerő:

$Q_k = \vec{F}_k \cdot \vec{\beta}_C,$

ahol $\vec{\beta}_C = \frac{\partial \vec{v}_C}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial\left(R\dot{\varphi}\vec{j}\right)}{\partial \dot{\varphi}} = \left(R\vec{j}\right)$

A csillapító erő: $\vec{F}_k = -k\vec{v}_d = -k\left(R\varphi\vec{j}\right)$

$Q_k = \vec{F}_k \cdot \vec{\beta}_C = \left(-kR\dot{\varphi}\vec{j}\right)\cdot\left(R\vec{j}\right) = -kR^2\dot{\varphi} = -k_r\dot{\varphi}$

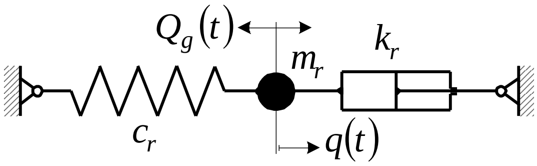
A redukált csillapítási tényező: $k_r = kR^2$

A mozgásegyenlet:

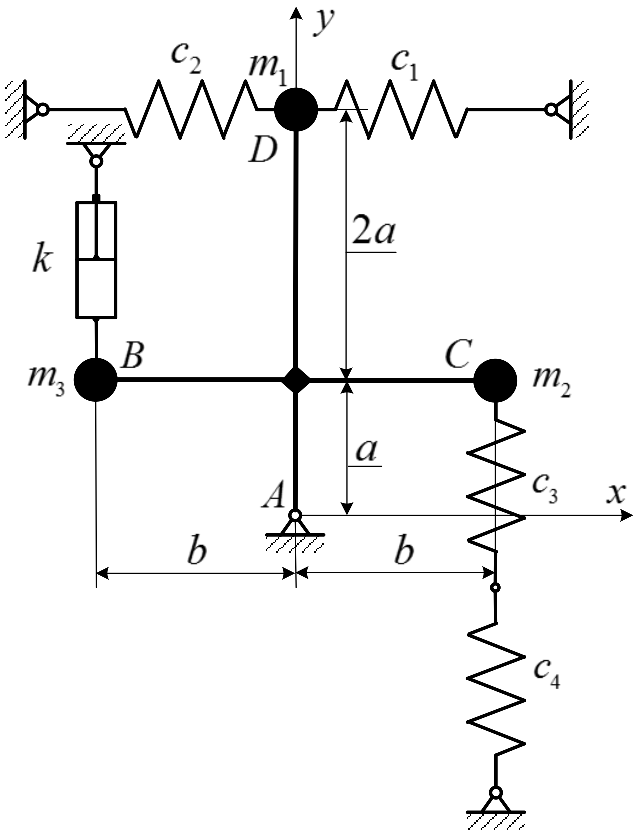
$$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\varphi} + kR^2\dot{\varphi} + \left(\frac{R^2}{c_1} + \frac{R^2}{4c_2}\right)\varphi = \frac{R}{c_1}y_g\left(t\right)$$

$$m_r\ddot{\varphi} + k_r\dot{\varphi} + \frac{1}{c_r}\varphi = Q_g\left(t\right)$$

Redukált rezgőrendszer:



5.2. Példa: Szabad, csillapított rezgőrendszer



Adott: az ábrán látható, *ABCD* merev súlytalan rudakból álló keret és m_1, m_2, m_3, a, b, c_1, c_2, c_3, c_4, k.

Feladat: a) Határozza meg az ábrán látható rendszer mozgásegyenletét kis szögelfordulások esetén.

b) Határozza meg a redukált rendszer jellemző paramétereit.

Általános koordináta: $q = \varphi$,

$\dot{q} = \dot{\varphi} = \omega$,

$\ddot{q} = \ddot{\varphi} = \varepsilon$

A Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q_c + Q_k$$

A rendszer kinetikai energiája:

$$v_D = 3a\omega = 3a\dot{\varphi},$$

$$v_C = (a+b)\omega = (a+b)\dot{\varphi} = \sqrt{a^2+b^2}\dot{\varphi},$$

$$v_B = (a+b)\omega = (a+b)\dot{\varphi} = \sqrt{a^2+b^2}\dot{\varphi}.$$

$$E = \frac{1}{2}m_1 v_D^2 + \frac{1}{2}m_2 v_C^2 + \frac{1}{2}m_3 v_B^2 = \frac{1}{2}m_1 9a^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2(a+b)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_3(a+b)^2\dot{\varphi}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[m_1 9a^2 + m_2(a+b)^2 + m_3(a+b)^2\right]\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m_r\dot{\varphi}^2$$

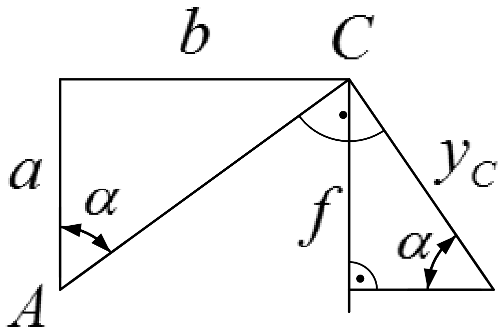
Redukált tömeg: $m_r = m_1 9a^2 + m_2(a+b)^2 + m_3(a+b)^2$

A mozgásegyenlet bal oldalán álló deriváltak.

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = m_r\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m_r\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial E}{\partial q} = \frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0$$



A C pont elmozdulása:

$$y_C = \sqrt{a^2+b^2}\varphi$$

A rugó hosszváltozása:

$$f = y_C \sin\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\varphi \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = b\varphi$$

$$c_{34} = c_3 + c_4$$

A rugóban felhalmozott energia:

$$U = \frac{1}{2}\frac{(3a\varphi)^2}{c_1} + \frac{1}{2}\frac{(3a\varphi)^2}{c_2} + \frac{1}{2}\frac{(b\varphi)^2}{(c_3+c_4)} = \frac{1}{2}\left(\frac{9a^2}{c_1} + \frac{9a^2}{c_2} + \frac{b^2}{c_3+c_4}\right)\varphi^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{c_r}\varphi^2$$

Az általános visszatérítő erő:

$$Q_c = -\frac{dU}{dq} = -\frac{dU}{d\varphi} = -\frac{1}{2}\frac{1}{c_r}2\varphi = -\frac{1}{c_r}\varphi$$

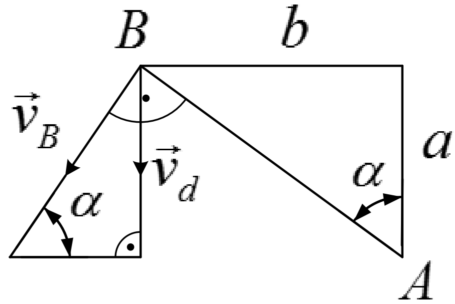
Az általános csillapító erő:

$Q_k = \vec{F}_k \cdot \vec{\beta}_B$, ahol

$$\vec{\beta}_B = \frac{\partial \vec{v}_B}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left[v_B\left(-\cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j}\right)\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left[\sqrt{a^2+b^2}\dot{\varphi}\left(-\cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j}\right)\right] =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(-\cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j}\right)$$



A csillapító erő:

$$v_d = v_B \sin\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\dot{\varphi}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = b\dot{\varphi}$$

$$\vec{F}_k = -k\vec{v}_d = -k\left(-b\dot{\varphi}\vec{j}\right) = kb\dot{\varphi}\vec{j}$$

Az általános csillapító erő:

$$Q_k = \vec{F}_k \cdot \vec{\beta}_B = \left(kb\dot{\varphi}\vec{j}\right)\cdot\sqrt{a^2+b^2}\left(-\cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j}\right) = -kb\sqrt{a^2+b^2}\overbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{\sin\alpha}\dot{\varphi} =$$

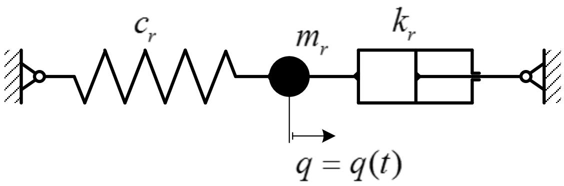
$$= -kb^2\dot{\varphi} = -k_r\dot{\varphi}$$

A redukált csillapítási tényező: $k_r = kb^2$

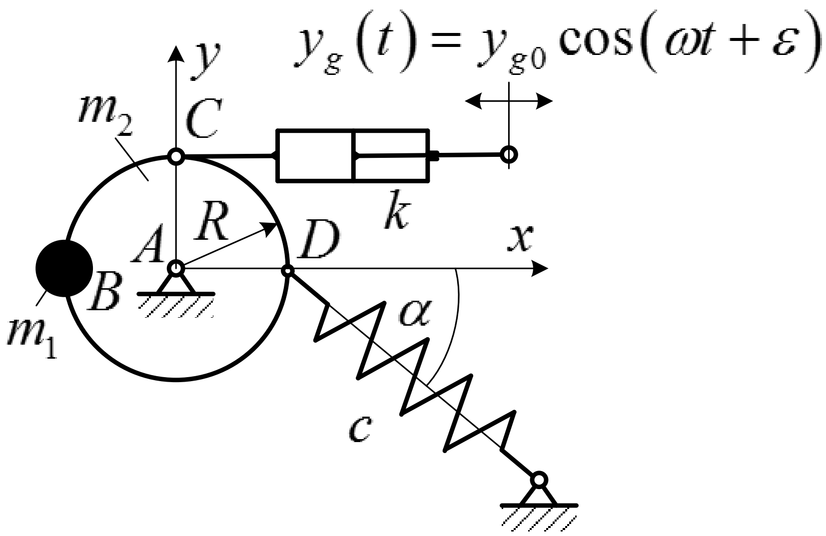
A mozgásegyenlet:

$$m_r\ddot{\varphi} + k_r\dot{\varphi} + \frac{1}{c_r}\varphi = 0$$

Redukált rezgőrendszer:



5.3. Példa: Gerjesztett, csillapított rezgőrendszer



Adott: az ábrán látható R sugarú, m_2 tömegű merev, homogén tömegeloszlású tárcsa és $m_1,\ m_2,\ R,\ c,\ k,\ \alpha,\ \vartheta,$ $y_g(t) = y_{g0}\cos(\omega t + \varepsilon)$.

Feladat: a) Határozza meg az ábrán látható rezgőrendszer mozgásegyenletét kis szögelfordulások esetén.
b) Határozza meg a redukált rezgőrendszer jellemző paramétereit.

Általános koordinátaválasztás:

$q = \varphi$

$\dot{q} = \dot{\varphi} = \omega$

$\ddot{q} = \ddot{\varphi} = \varepsilon$

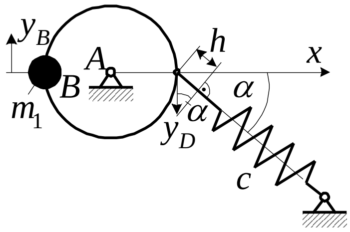
A *Lagrange*-féle másodfajú mozgásegyenlet:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \varphi}\right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi} = Q_c + Q_k + Q_g .$$

A rendszer kinetikai energiája:

$$E = \frac{1}{2}m_1 v_B^2 + \frac{1}{2}J_{a2}\omega^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 R^2 + \frac{1}{2}m_2 R^2\right)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m_r\dot{\varphi}^2 .$$

A rezgőrendszer $q = \varphi$ általános koordinátaválasztáshoz tartozó redukált, vagy általános tömege: $m_r = \left(m_1 R^2 + \frac{1}{2}m_2 R^2\right)$.



A rugó hosszváltozása: $|y_D| = R\varphi$, $h = y_D \sin\alpha = R\varphi \sin\alpha$.

A rugóban felhalmozott energia:

$$U = \frac{1}{2}\frac{h^2}{c} = \frac{1}{2}\frac{R^2\sin^2\alpha}{c}\varphi^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{c_r}\varphi^2 .$$

A rezgőrendszer $q = \varphi$ általános koordinátaválasztáshoz tartozó c_r redukált rugóállandója: $\frac{1}{c_r} = \frac{R^2\sin^2\alpha}{c}$.

Az általános visszatérítő erő meghatározása:

$$Q_c = -\frac{\partial U}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -\frac{1}{c_r}\varphi = -\frac{R^2\sin^2\alpha}{c}\varphi .$$

Az általános csillapító erő és gerjesztő erő meghatározása: $Q_k = \vec{F}_k \cdot \vec{\beta}_C$.

A dugattyú relatív sebességének meghatározása:

$|\vec{v}_C| = R\dot{\varphi}$, ,

$$\vec{\beta}_C = \frac{\partial \vec{v}_C}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \vec{v}_C}{\partial \dot{\varphi}} \frac{\partial\left(R\dot{\varphi}\vec{i}\right)}{\partial \dot{\varphi}} = R\vec{i} \ ,$$

$$\vec{F}_k = -k\vec{v}_d = -k\,\vec{v}_d = -k\left(\dot{y}_C - \dot{y}_g\left(t\right)\right)\vec{i} = -k\left(R\dot{\varphi} - \dot{y}_g\left(t\right)\right)\vec{i} = -kR\dot{\varphi}\vec{i} + k\dot{y}_g\left(t\right)\vec{i} \ .$$

$$\dot{y}_g\left(t\right) = -\omega y_{g0} \sin\left(\omega t + \varepsilon\right).$$

$$Q_k = \vec{F}_k \cdot \vec{\beta}_C = \left[-kR\dot{\varphi}\vec{i} + k\dot{y}_g\left(t\right)\vec{i}\right] \cdot R\vec{i} = \underbrace{-kR^2\dot{\varphi}}_{Q_k} + \underbrace{kR\dot{y}_g\left(t\right)}_{Q_g}$$

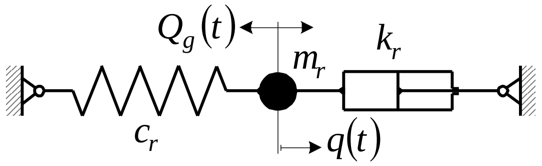
A rezgőrendszer $q = \varphi$ általános koordinátaválasztáshoz tartozó k_r redukált, vagy általános csillapítási tényezője: $k_r = kR^2$.

Az általános gerjesztő erő meghatározása:

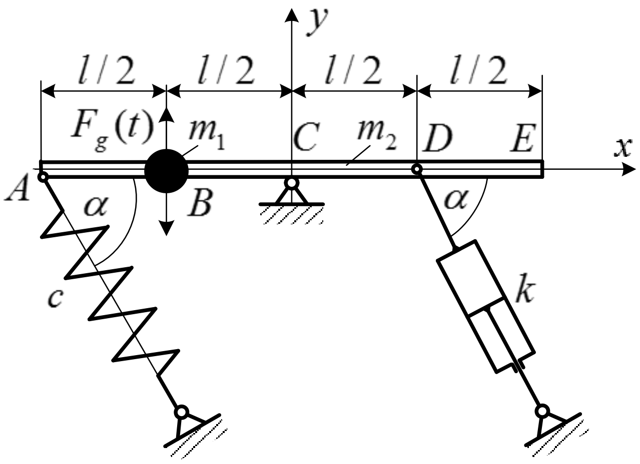
$$Q_g = kR\dot{y}_g\left(t\right)$$

A redukált rezgőrendszer mozgásegyenlete: $m_r\ddot{q} + k_r\dot{q} + \frac{1}{c_r}q = Q_g\,(t)$.

A redukált rezgőrendszer:



5.4. Példa: Gerjesztett csillapított rezgőrendszer



Adott: A $2l$ hosszúságú, m_2 tömegű merev prizmatikus rúd és m_1, m_2, l, c, k, α, $F_g(t) = F_{g0}\cos(\omega t + \varepsilon)$.

Feladat:

a) A rezgőrendszer mozgásegyenletének felírása a rúd kis szögelfordulása esetén.

b) A helyettesítő (redukált) rezgőrendszer jellemzőinek meghatározása.

Általános koordinátaválasztás: $q = \varphi$ - a rúd szögelfordulása.

Az általános koordináta: $q = \varphi$.

$q = \varphi \quad (\text{rad})$,

$\dot{q} = \dot{\varphi} \quad (\text{rad/s})$,

$\ddot{q} = \ddot{\varphi} \quad (\text{rad/s}^2)$.

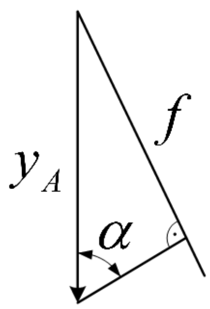
A *Lagrange*-féle másodfajú mozgásegyenlet:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}_B}\right) - \frac{\partial E}{\partial y_B} = Q_c + Q_k + Q_g .$$

A rendszer kinetikai energiája:

$$E = \frac{1}{2}m_1 v_B^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2 = \frac{1}{2}\left(m_1\frac{l^2}{4} + \frac{1}{12}m_2 4l^2\right)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m_r\dot{\varphi}^2 .$$

A rezgőrendszer $q = \varphi$ általános koordinátaválasztáshoz tartozó redukált, vagy általános tömege: $m_r = \left(m_1\frac{l^2}{4} + \frac{1}{12}m_2 4l^2\right)$.



A rugó hosszváltozása: $|y_A| = l\varphi$, $f = y_A \sin\alpha = l\varphi\sin\alpha$.

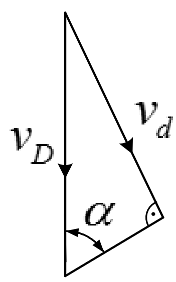
A rugóban felhalmozott energia:

$$U = \frac{1}{2}\frac{f^2}{c} = \frac{1}{2}\frac{l^2\sin^2\alpha}{c}\varphi^2 = \frac{1}{2}\frac{\varphi^2}{c_r} .$$

A rezgőrendszer $q = \varphi$ általános koordinátaválasztáshoz tartozó c_r redukált rugóállandója: $\dfrac{1}{c_r} = \dfrac{l^2\sin^2\alpha}{c}$.

Az általános visszatérítő erő meghatározása:

$$Q_c = -\frac{\partial U}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial y_B} = -\frac{1}{c_r}\varphi = -\frac{l^2\sin^2\alpha}{c}\varphi .$$



Az általános csillapító erő meghatározása: $Q_k = \vec{F}_k \cdot \vec{\beta}_D$.

A dugattyú relatív sebességének meghatározása:

$|v_D| = \dfrac{l}{2}\dot{\varphi}$, $v_d = v_D\sin\alpha = \dfrac{l}{2}\dot{\varphi}\sin\alpha$,

$\vec{v}_d = v_d\vec{e}_d = v_d(\cos\alpha\vec{i} - \sin\alpha\vec{j})$.

$$\vec{\beta}_D = \frac{\partial \vec{v}_D}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \left(-\frac{l}{2} \dot{\varphi}\, \vec{j} \right)}{\partial \dot{\varphi}} = -\frac{l}{2} \vec{j} \,,$$

$$\vec{F}_k = -k\vec{v}_d = -k\, v_d \vec{e}_d = -k \frac{l}{2} \dot{\varphi} \sin\alpha (\cos\alpha \vec{i} - \sin\alpha\, \vec{j}) \,.$$

$$Q_k = \vec{F}_k \cdot \vec{\beta}_D = -k \frac{l^2}{4} \dot{\varphi} \sin^2\alpha = -k_r\, \dot{y}_B \,.$$

A rezgőrendszer $q = \varphi$ általános koordinátaválasztáshoz tartozó k_r redukált, vagy általános csillapítási tényezője: $k_r = k \dfrac{l^2}{4} \sin^2\alpha$.

Az általános gerjesztő erő meghatározása: $Q_g = \vec{F}_g(t) \cdot \vec{\beta}_B$.

$$\vec{F}_g(t) = \vec{F}_g(t)\vec{j} = F_{g0} \cos(\omega t + \varepsilon)\, \vec{j} \,, \qquad \vec{\beta}_B = \frac{\partial \vec{v}_B}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \left(\frac{l}{2} \dot{\varphi} \vec{j} \right)}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{l}{2} \vec{j} \,,$$

$$Q_g = \vec{F}_g(t) \cdot \vec{\beta}_B = \frac{l}{2} F_g(t) \,.$$

Az előállított mennyiségeket behelyettesítve a mozgásegyenletbe és az általános gerjesztő erő kivételével mindent az egyenlet bal oldalára rendezve:

$$\left(m_1 \frac{l^2}{4} + \frac{1}{12} m_2 4l^2 \right) \ddot{\varphi} + \left(k \frac{l^2}{4} \sin^2\alpha \right) \dot{\varphi} + \left(\frac{l^2 \sin^2\alpha}{c} \right) \varphi = \frac{l}{2} F_g(t) \text{ , vagy}$$

$$m_r \ddot{\varphi} + k_r \dot{\varphi} + \frac{1}{c_r} \varphi = \frac{l}{2} F_g(t).$$

A redukált rezgőrendszer mozgásegyenlete: $m_r \ddot{q} + k_r \dot{q} + \dfrac{1}{c_r} q = Q_g(t).$

A redukált rezgőrendszer: