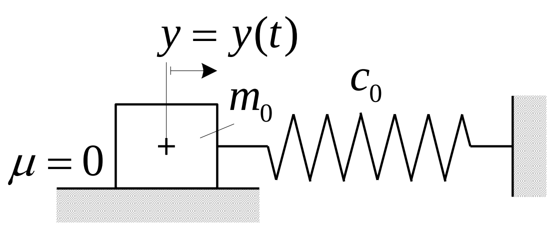
7. MECHANIKA-REZGÉSTAN GYAKORLAT

(kidolgozta: Fehér Lajos, tsz. mérnök; Tarnai Gábor, mérnök tanár; Molnár Zoltán, egy. adj., Dr. Nagy Zoltán, egy. adj.)

Egy szabadságfokú rezgőrendszer mozgásegyenletének megoldása

7.1. Példa: Szabad, csillapítatlan rezgőrendszer



Adott: az ábrán látható rezgőrendszer, valamint $c_0 = 2 \cdot 10^{-2}$ mm/N, $m_0 = 20$ kg, $y_0 = 4$ mm, $v_0 = 0{,}15$ m/s.

Feladat: a) A rezgőrendszer körfrekvenciájának, frekvenciájának és rezgésidejének meghatározása.
b) A mozgásegyenlet megoldásának előállítása.
c) A rezgés amplitúdójának meghatározása.
d) A maximális rugóerő meghatározása.

Rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$m_0 \ddot{z} + \frac{1}{c_0} z = 0 \text{ vagy } \ddot{z} + \alpha^2 z = 0$$

a) A rezgőrendszer körfrekvenciájának, frekvenciájának és rezgésidejének meghatározása:

$$c_0 = 2 \cdot 10^{-2} \frac{mm}{N} = 2 \cdot 10^{-5} \frac{m}{N}$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{m_0 c_0} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-5} \cdot 20} = \frac{10^4}{4} = 2500 \ \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2}, \quad \left[\frac{1}{kg \cdot m / N} = \frac{1}{kg \cdot m \cdot s^2 / kg \cdot m} = \frac{1}{s^2} = \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \right]$$

$$\alpha = \sqrt{2500} = 50 \ \text{rad/s}.$$

$$\alpha = 2\pi f_\alpha \quad \Rightarrow \quad f_\alpha = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{50}{6,283} \cong 7,94 \ \text{Hz}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{T_\alpha} \quad \Rightarrow \quad T_\alpha = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{1}{f_\alpha} = \frac{6,283}{50} \cong 0{,}126 \ \text{s}.$$

b) A mozgásegyenlet megoldása:

$$z(t) = (a + ib)e^{i\alpha t}, \quad \dot{z}(t) = i\alpha(a + ib)e^{i\alpha t}.$$

Kezdeti feltételek: $t = 0$

$$\text{Im}\left[z(0)\right] = b = y_0 \quad \Rightarrow \quad b = y_0 = 4\,\text{mm},$$

$$\text{Im}\left[\dot{z}(0)\right] = \alpha a = v_0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v_0}{\alpha} = \frac{150}{50} = 3\,\text{mm}.$$

$$z(t) = (a + ib)(\cos\alpha t + i\sin\alpha t) =$$
$$= (a\cos\alpha t - b\sin\alpha t) + i(b\cos\alpha t + a\sin\alpha t).$$

$$y(t) = \text{Im}\, z(t) = b\cos\alpha t + a\sin\alpha t = y_0 \cos\alpha t + \frac{v_0}{\alpha}\sin\alpha t.$$

$$y(t) = \left[4\cos 50t + 3\sin 50t\right] \text{mm}.$$

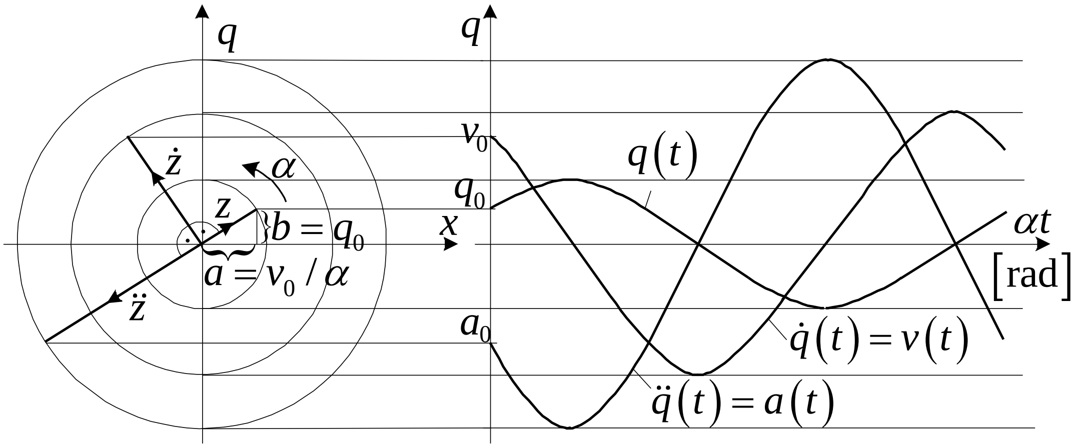
c) A rezgés amplitúdójának meghatározása:

$$A=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{y_0^2+\left(\frac{v_0}{\alpha}\right)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5\,\text{mm}.$$

d) A maximális rugóerő meghatározása:

$$F_{c\,\max}=\frac{y_{\max}}{c_0}=\frac{A}{c_0}=\frac{5}{2\cdot 10^{-2}}=250\text{ N}.$$

Az elmozdulás, sebesség és a gyorsulás időbeli változása.

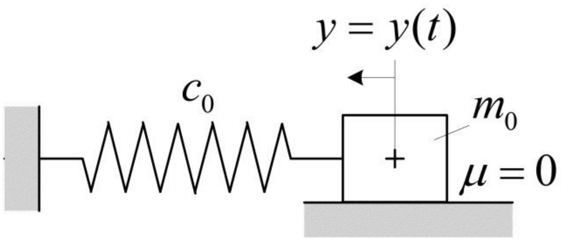


$$z(t)=(a+ib)e^{i\alpha t}$$

$$\dot z(t)=i\alpha(a+ib)e^{i\alpha t}=i\alpha z(t)$$

$$\ddot z(t)=-\alpha^2(a+ib)e^{i\alpha t}=-\alpha^2 z(t)$$

7.2. Példa: Szabad, csillapítatlan rezgőrendszer



Adott: az ábrán látható rezgőrendszer, valamint $c_0=2{,}5\cdot 10^{-2}$ mm/N, $m_0=42$ kg, $y_0=10$ mm, $v_0=0{,}2$ m/s.

Feladat: a) A rezgőrendszer körfrekvenciájának, frekvenciájának és rezgésidejének meghatározása.
b) A mozgásegyenlet megoldásának előállítása.
c) A rezgés amplitúdójának meghatározása.
d) A maximális rugóerő meghatározása.

Rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$m_0\ddot z+\frac{1}{c_0}z=0 \text{ vagy } \ddot z+\alpha^2 z=0$$

a) A rezgőrendszer körfrekvenciájának, frekvenciájának és rezgésidejének meghatározása:

$$\alpha^2=\frac{1}{m_0c_0}=\frac{1}{2{,}5\cdot 10^{-5}\cdot 42}=\frac{10^5}{105}=952{,}38\ \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2},$$

$$\alpha=\sqrt{952{,}38}=30{,}86\ \text{rad/s}.$$

$$\alpha = 2\pi f_\alpha \quad \Rightarrow \quad f_\alpha = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{30,86}{6,283} \cong 4,91 \text{ Hz}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{T_\alpha} \quad \Rightarrow \quad T_\alpha = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{1}{f_\alpha} = \frac{6,283}{30,86} \cong 0,204 \text{ s}.$$

b) A mozgásegyenlet megoldása:

$z(t) = (a+ib)e^{i\alpha t}, \quad \dot{z}(t) = i\alpha(a+ib)e^{i\alpha t}$.

Kezdeti feltételek: $t = 0$

$\mathrm{Im}\left[z(0)\right] = b = y_0 \quad \Rightarrow \quad b = y_0 = 10 \text{ mm},$

$\mathrm{Im}\left[\dot{z}(0)\right] = \alpha a = v_0 \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{v_0}{\alpha} = \dfrac{200}{30,86} = 6,48 \text{ mm}.$

$$z(t) = (a+ib)(\cos\alpha t + i\sin\alpha t) =$$
$$= (a\cos\alpha t - b\sin\alpha t) + i(b\cos\alpha t + a\sin\alpha t).$$

$$y(t) = \mathrm{Im}\, z(t) = b\cos\alpha t + a\sin\alpha t = y_0\cos\alpha t + \frac{v_0}{\alpha}\sin\alpha t.$$

$$y(t) = \left[10\cdot\cos(30,86t) + 6,48\cdot\sin(30,86t)\right] \text{mm}.$$

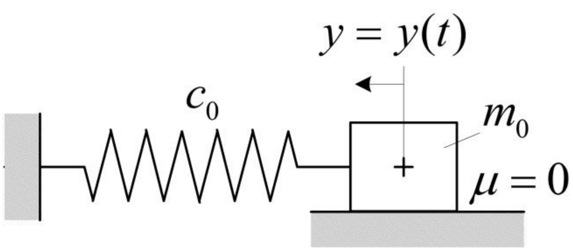
c) A rezgés amplitúdójának meghatározása:

$$A = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\alpha}\right)^2} = \sqrt{10^2 + 6,48^2} = 11,92 \text{ mm}.$$

d) A maximális rugóerő meghatározása:

$$F_{c\max} = \frac{y_{\max}}{c_0} = \frac{A}{c_0} = \frac{11,92}{2,5\cdot 10^{-2}} = 476,8 \text{ N}.$$

7.3. Példa: Szabad, csillapítatlan rezgőrendszer



Adott: az ábrán látható rezgőrendszer, valamint $c_0 = 0,4$ mm/N, $m_0 = 6$ kg, $y_0 = 8$ mm, $v_0 = 1$ m/s.

Feladat: a) A rezgőrendszer körfrekvenciájának, frekvenciájának és rezgésidejének meghatározása.

b) A mozgásegyenlet megoldásának előállítása.

c) A rezgés amplitúdójának meghatározása.

d) A maximális rugóerő meghatározása.

Rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$m_0\ddot{z} + \frac{1}{c_0}z = 0 \text{ vagy } \ddot{z} + \alpha^2 z = 0$$

a) A rezgőrendszer körfrekvenciájának, frekvenciájának és rezgésidejének meghatározása:

$$\alpha^2 = \frac{1}{m_0 c_0} = \frac{1}{0,4\cdot 10^{-3}\cdot 6} = \frac{10^3}{2,4} = 416,67 \ \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2},$$

$\alpha = \sqrt{416,67} = 20,41\ \text{rad/s}$.

$\alpha = 2\pi f_\alpha \quad \Rightarrow \quad f_\alpha = \dfrac{\alpha}{2\pi} = \dfrac{20,41}{6,283} \cong 3,248\ \text{Hz}$

$\alpha = \dfrac{2\pi}{T_\alpha} \quad \Rightarrow \quad T_\alpha = \dfrac{2\pi}{\alpha} = \dfrac{1}{f_\alpha} = \dfrac{6,283}{20,41} \cong 0,308\ \text{s}$.

b) A mozgásegyenlet megoldása:

$z(t) = (a+ib)e^{i\alpha t}, \quad \dot{z}(t) = i\alpha(a+ib)e^{i\alpha t}$.

Kezdeti feltételek: $t = 0$

$\text{Im}\left[z(0)\right] = b = y_0 \quad \Rightarrow \quad b = y_0 = 8\,\text{mm},$

$\text{Im}\left[\dot{z}(0)\right] = \alpha a = v_0 \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{v_0}{\alpha} = \dfrac{1000}{20,41} = 49\,\text{mm}.$

$$z(t) = (a+ib)(\cos\alpha t + i\sin\alpha t) =$$
$$= (a\cos\alpha t - b\sin\alpha t) + i(b\cos\alpha t + a\sin\alpha t).$$

$$y(t) = \text{Im}\, z(t) = b\cos\alpha t + a\sin\alpha t = y_0\cos\alpha t + \frac{v_0}{\alpha}\sin\alpha t\,.$$

$$y(t) = \left[8\cdot\cos\left(20,41t\right) + 49\cdot\sin\left(20,41t\right)\right]\text{mm.}$$

c) A rezgés amplitúdójának meghatározása:

$$A = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\alpha}\right)^2} = \sqrt{8^2+49^2} = 49,65\,\text{mm.}$$

d) A maximális rugóerő meghatározása:

$$F_{c\,\max} = \frac{y_{\max}}{c_0} = \frac{A}{c_0} = \frac{49,65}{0,4} = 124,125\,\text{N.}$$