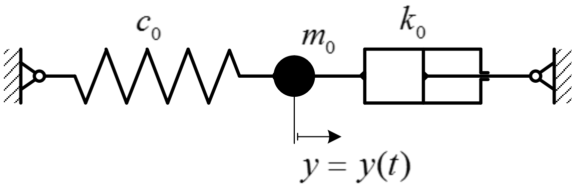
8. MECHANIKA-REZGÉSTAN GYAKORLAT

(kidolgozta: Fehér Lajos, tsz. mérnök; Tarnai Gábor, mérnök tanár;
Molnár Zoltán, egy. adj., Dr. Nagy Zoltán, egy. adj.)

Egy szabadságfokú rezgőrendszer mozgásegyenletének megoldása

8.1. Példa: Szabad, csillapított rezgőrendszer



Adott: az ábrán látható rezgőrendszer, valamint $m_0 = 20$ kg, $c_0 = 2 \cdot 10^{-2}$ mm/N, $k_0 = 1600$ Ns/m, $y_0 = 3$ mm, $v_0 = 0{,}18$ m/s.

Feladat:

a) A rezgőrendszer körfrekvenciájának, frekvenciájának és rezgésidejének meghatározása.

b) Kialakul-e rezgés?

c) A mozgásegyenlet megoldásának előállítása.

d) A logaritmikus dekrementum meghatározása.

e) A kitérés és a sebesség közötti fázisszög meghatározása.

Rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$m_0 \ddot{z} + k_0 \dot{z} + \frac{1}{c_0} z = 0 \text{ vagy } \ddot{z} + 2\beta \dot{z} + \alpha^2 z = 0$$

a) A rezgőrendszer körfrekvenciájának, frekvenciájának és rezgésidejének meghatározása:

$$\alpha^2 = \frac{1}{m_0 c_0} = \frac{1}{20 \cdot 2 \cdot 10^{-5}} = \frac{10^4}{4} = 2500 \ \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2}, \ \alpha = \sqrt{2500} = 50 \ \text{rad/s},$$

$$\beta = \frac{k_0}{2m_0} = \frac{1600}{2 \cdot 20} = 40 \ \frac{\text{Ns}}{\text{m kg}} = 40 \ \frac{1}{\text{s}},$$

$$\nu = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{2500 - 1600} = 30 \ \text{rad/s}.$$

$$\nu = 2\pi f_\nu \quad \Rightarrow \quad f_\nu = \frac{\nu}{2\pi} = \frac{30}{6{,}283} \cong 4{,}77 \ \text{Hz}.$$

$$\nu = \frac{2\pi}{T_\nu} \quad \Rightarrow \quad T_\nu = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{1}{f_\nu} = \frac{6{,}283}{30} \cong 0{,}209 \ \text{s}.$$

b) Kialakul-e rezgés?

$\alpha > \beta$, ezért kialakul rezgés.

c) A mozgásegyenlet megoldásának előállítása:

$$z(t)=(a+ib)e^{(-\beta+i\nu)t}, \quad \dot z(t)=(a+ib)(-\beta+i\nu)e^{(-\beta+i\nu)t},$$

$$z(t=0)=a+ib,$$

$$\dot z(t=0)=(a+ib)(-\beta+i\nu)=-(a\beta+b\nu)+i(a\nu-b\beta),$$

Kezdeti feltételek: $t=0$

$$\mathrm{Im}\left[z(0)\right]=b=y_0 \quad \Rightarrow \quad b=y_0=3\,\mathrm{mm},$$

$$\mathrm{Im}\left[\dot z(0)\right]=\nu a-\beta b=v_0 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{v_0+\beta y_0}{\nu}=\frac{180+3\cdot 40}{30}=10\,\mathrm{mm}.$$

$$z(t)=(a+ib)e^{-\beta t}e^{i\nu t}=e^{-\beta t}(a+ib)(\cos\nu t+i\sin\nu t)=$$
$$=e^{-\beta t}\left[(a\cos\nu t-b\sin\nu t)+i(b\cos\nu t+a\sin\nu t)\right].$$
$$y(t)=\mathrm{Im}\,z(t)=e^{-\beta t}(b\cos\nu t+a\sin\nu t)=e^{-40t}(3\cos 30t+10\sin 30t)\,\mathrm{mm}.$$

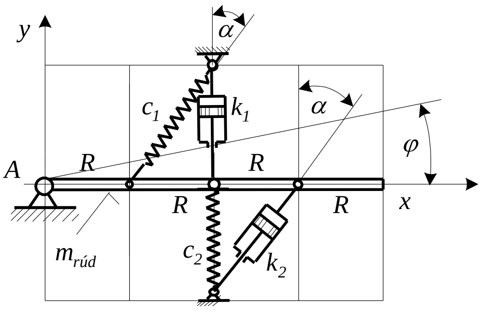
d) A logaritmikus dekrementum meghatározása:

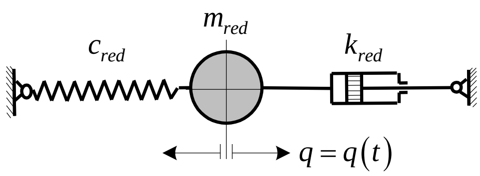
$$\Lambda=\ln\frac{y_1}{y_2}=\ln\left(e^{2\pi\frac{\beta}{\nu}}\right)=2\pi\frac{\beta}{\nu}=6{,}283\frac{40}{30}=8{,}377\,.$$

e) A kitérés és a sebesség közötti fázisszög meghatározása:

$$\Phi=\frac{\pi}{2}+\vartheta, \quad tg\vartheta=\frac{\beta}{\nu}=\frac{40}{30}=1{,}33\dot{3}, \quad \vartheta\cong 53{,}13^{\circ}.$$

8.2. Példa: Szabad, csillapított rezgőrendszer





Adott: az ábrán látható az A pontban csapágyazott rezgőrendszer redukált rezgőrendszere.

Az általános koordináta legyen a rúd szögelfordulása: $q(t)=\varphi(t)$.

A helyettesítő rezgőrendszer jellemzői:

$1/c_{red}=11875\,\mathrm{Nm/rad}$, $k_{red}=1075\,\mathrm{Nms/rad}$, $m_{red}=64\,\mathrm{kgm^2/rad}$.

Kezdeti feltételek: $t_0=0$: $y_0=\varphi_0=8\cdot 10^{-3}$ rad , $\dot y_0=v_0=\dot\varphi_0=40\cdot 10^{-3}$ rad/s.

Feladat: a) Meghatározni a csillapított rendszer ν körfrekvenciáját!

b) Kialakul-e rezgés?

c) Meghatározni a csillapított rezgőrendszer T_ν rezgésidejét és a rezgés f_ν frekvenciáját.

d) Felírni a mozgásegyenletet!

e) A Λ logaritmikus dekrementum kiszámítása.

f) Komplex kitérés(elmozdulás) vektor és a komplex sebességvektorok közötti Φ fázisszög meghatározása.

Kidolgozás:

a) A csillapított rezgőrendszer ν körfrekvenciájának meghatározása:

$$\alpha^2 = \frac{1}{m_{red}\, c_{red}} = \frac{1}{64 \cdot 8,421 \cdot 10^{-5}} = \frac{100000}{64 \cdot 8,421} = 185,548 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2}, \qquad \alpha = \sqrt{185,548} = 13,62 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$\beta = \frac{k_{red}}{2\, m_{red}} = \frac{1075}{2 \cdot 64} = 8,398 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \qquad \nu = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{185,548 - 70,533} = 10,724 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

b) $\alpha = 13,6$ rad/s > $\nu = 10,724$ rad/s . Ezért kialakul a rezgés!

c) A T_ν rezgésidő kiszámítása: $\nu = \dfrac{2\pi}{T_\nu} \quad \Rightarrow \quad T_\nu = \dfrac{2\pi}{\nu} = \dfrac{6,28}{10,724} = 0,585$ s .

A csillapított rezgés f_ν frekvenciája: $f_\nu = \dfrac{1}{T_\nu} = \dfrac{1}{0,585} = 1,7 \ \dfrac{1}{\text{s}} = \text{Hz}$.

d) A mozgásegyenlet felírása (A megoldást komplex alakban állítjuk elő.):

$z = z(t) = Ae^{(-\beta + i\nu)t} = (a + i\,b)e^{(-\beta+i\nu)t} = a\,e^{(-\beta+i\nu)t} + i\,b\,e^{(-\beta+i\nu)t}$ a komplex elmozdulás.

Ebből a megoldás képzetes része: $\text{Im}\left[z(t)\right] = b\,e^{(-\beta+i\nu)t} = y(t)$.

A kezdeti feltételből: $y(t_0 = 0) = b\,e^{(-\beta+i\nu)t_0} = b\,\underbrace{e^{(-\beta+i\nu)0}}_{=1} = y_0 = b = 8 \cdot 10^{-3}$ rad.

A komplex sebességvektor: $\dot{z}(t) = A(-\beta + i\,\nu)e^{(-\beta+i\nu)t} = (a + i\,b)(-\beta + i\,\nu)e^{(-\beta+i\nu)t}$.

Elvégezve a kijelölt műveleteket: $\dot{z}(t) = (-a\beta - b\nu)e^{(-\beta+i\nu)t} + i\left[(a\nu - b\,\beta)e^{(-\beta+i\nu)t}\right]$.

Ebből a megoldás képzetes része: $\text{Im}\left[\dot{z}(t)\right] = (a\nu - b\,\beta)e^{(-\beta+i\nu)t} = \dot{y}(t)$.

A kezdeti feltételből: $\dot{y}(t_0 = 0) = \dot{y}_0 = (a\nu - b\beta)e^{(-\beta+i\nu)t_0} = (a\nu - b\beta)\underbrace{e^{(-\beta+i\nu)0}}_{=1} = v_0$.

$$(a\nu - b\beta) = v_0 \ \Rightarrow \ a = \frac{v_0 + b\,\beta}{\nu} = \frac{40 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-3} \cdot 8,398}{10,724} \cong 0,01 \text{ rad.}$$

Az a és b paraméterek meghatározása után a komplex megoldásfüggvény:

$$z = z(t) = Ae^{(-\beta+i\nu)t} = (a + i\,b)e^{(-\beta+i\nu)t} = e^{-\beta t}\left[(a + i\,b)e^{i\nu t}\right] = e^{-\beta t}\left[(a + i\,b)(\cos\nu t + i\sin\nu t)\right],$$

$$z(t) = (a\cos\nu t - b\sin\nu t)e^{-\beta t} + i\left[(a\sin\nu t + b\cos\nu t)\,e^{-\beta t}\right],$$

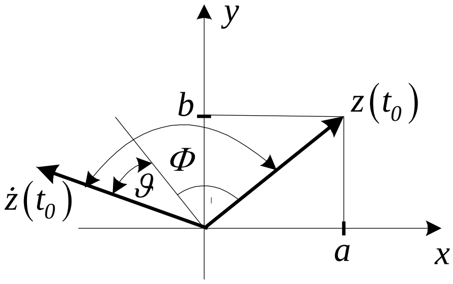
Ebből a megoldás képzetes része: $\text{Im}\left[z(t)\right] = (a\sin\nu t + b\cos\nu t)\,e^{-\beta t} = y(t)$.

$$y(t) = (a\sin\nu t + b\cos\nu t)\,e^{-\beta t} = (0,01\sin 10,724t + 0,008\cos 10,724t)\,e^{-8,39t}$$

A fenti összefüggés a rúd A pont körüli , radiánban értelmezett φ szögelfordulását adja meg az idő függvényében.

e) Logaritmikus dekrementum: $\Lambda = \ln\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right) = 2\pi\dfrac{\beta}{\nu} = 6,28\dfrac{8,398}{10,724} = 4,92$.

e) A komplex kitérés és a komplex sebességvektor közötti fázisszög szemléltetése:



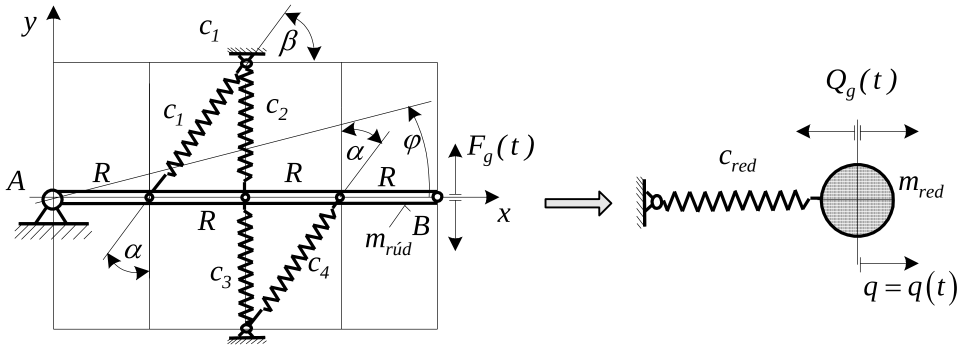
a = 0,01 rad, b = 0,008 rad.

$\Phi = \frac{\pi}{2} + \vartheta$, ahol $tg\vartheta = \frac{\beta}{\nu} = \frac{8,398}{10,724} = 0,783$

$\vartheta = arctg0,783 \cong 38^{\circ}$

$\Phi = \frac{\pi}{2} + \vartheta = 90^{\circ} + 38^{\circ} = 128^{\circ}$.

8.3. Példa: Csillapítatlan, gerjesztett rezgőrendszer



Adott: az ábrán látható az ***A*** pontban csapágyazott rezgőrendszer redukált rezgőrendszere (*4.3.feladat*). Az általános koordináta legyen a rúd szögelfordulása: $q(t)=\varphi(t)$.

$1/c_{red} = 38750\,\text{Nm/rad}$, $m_{red} = 64\ \text{kgm}^2/\text{rad}$, $F_g(t) = F_{g0}\sin(\omega_g t)$, $F_{g0} = 100\ \text{N}$,

$\omega_g = 40\ \text{rad/s}$, $R = 1\text{m}$, $\varepsilon = 0$.

Feladat: a) Határozza meg a redukált rezgőrendszer mozgásegyenletét.

b) A redukált rendszer mozgásegyenletének megoldása.

c) Határozza meg a Z komplex ellenállását.

d) Határozza meg és ábrázolja a komplex gerjesztő erőt (P_0), továbbá a komplex elmozdulás, sebesség és gyorsulás vektorokat az indítás $t_0 = 0\ s$ pillanatában.

Kidolgozás:

a) Általános koordináta: $q=\varphi$.

A *Lagrange*-féle másodfajú mozgásegyenlet: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dE}{d\dot{q}}\right)-\dfrac{dE}{dq}=Q_c+Q_g$.

Az általános gerjesztő erő: $Q_g(t)$

$$Q_g(t)=\vec{F}_g\cdot\vec{\beta}_B=F_{g0}\sin(\omega_g t)\vec{j}\cdot 4R\vec{j}=4R\,F_{g0}\sin(\omega_g t),$$

ahol $\vec{F}_g=F_{g0}\sin(\omega_g t)\vec{j}$, $\vec{\beta}_B=\dfrac{\partial\vec{v}_B}{\partial\dot{q}}=\dfrac{\partial\vec{v}_B}{\partial\dot{\varphi}}=\dfrac{\partial(4R\dot{\varphi}\vec{j})}{\partial\dot{\varphi}}=4R\vec{j}$.

A rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$\frac{64}{12}m_{rúd}R^2\ddot{\varphi}+\left(\frac{R^2\cos^2\alpha}{c_1}+\frac{4R^2}{c_2}+\frac{4R^2}{c_3}+\frac{9R^2\cos^2\alpha}{c_4}\right)\varphi=4RF_{g0}\sin(\omega_g t).$$

A redukált rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$m_{red}\ddot{q}+\frac{1}{c_{red}}q=Q_g(t)=Q_{g0}\sin(\omega_g t).$$

$$64\ddot{q}+38750q=400\sin(40t)\ \ (\text{Nm}).$$

b) A redukált rezgőrendszer általános megoldása:

$$z(t)=z_h(t)+z_p(t)=Ae^{i\alpha t}+\frac{P_0e^{i\omega_g t}}{i\omega_g Z}.$$

Bennünket a gerjesztett rész, a partikuláris megoldás érdekel, így:

$$m_{red}\ddot{z}_p(t)+\frac{1}{c_{red}}z_p(t)=P_0e^{i(\omega_g t)},\quad \text{ahol } P_0=Q_{g0}e^{i\varepsilon}=4RF_{g0}e^{i\varepsilon}=4RF_{g0}\underbrace{e^0}_{=1}=4RF_{g0}\ \ (\text{Nm}).$$

c) A redukált rezgőrendszer komplex ellenállása:

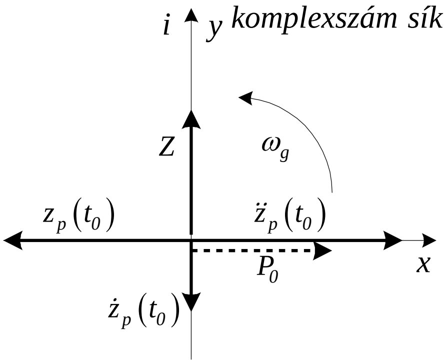
$$Z = i\left(\omega_g m_{red} - \frac{1}{c_{red}\,\omega_g}\right) = i\left(40\cdot 64 - \frac{38750}{40}\right) = i\left(2560 - 968,75\right) = i\left(1591,25\right) \text{ (Nms..perdület).}$$

d) A gerjesztett rezgés (partikuláris rész) megoldásai alapján:

$$z_p(t_0=0) = \frac{P_0}{i\,\omega_g Z}\underbrace{e^{i\,\omega_g t_0}}_{=1} = \frac{P_0}{i\,\omega_g Z} = \frac{4RF_{g0}}{i\,\omega_g Z} = \frac{4\cdot 1\cdot 100}{i\,40\cdot(i\,1591,25)} = \frac{10}{-1591,25} = -6,284\cdot 10^{-3}\ \text{(rad)},$$

$$\dot{z}_p(t_0=0) = i\,\omega_g\,\frac{P_0 e^{i\,\omega_g t_0}}{i\,\omega_g Z} = i\,\omega_g\, z_p\left(t_0\right) = i\,40\cdot\left(-6,284\cdot 10^{-3}\right) = -i\ 0,251\text{(rad/s)},$$

$$\ddot{z}_p(t_0=0) = -\omega_g^2 z_p\left(t_0\right) = -40^2\cdot\left(-6,284\cdot 10^{-3}\right) = 10,05\text{(rad/s}^2\text{)}.$$



$$z_p(t) = \frac{P_0}{i\,\omega_g Z}e^{i\,\omega_g t} = \frac{P_0}{i\,\omega_g Z}\left(\cos\omega_g t + i\sin\omega_g t\right),$$

$$z_p(t) = \left(-6,284\cdot 10^{-3}\cos 40t\right) + i\left(-6,284\cdot 10^{-3}\sin 40t\right),$$

$$\dot{z}_p(t) = \left(0,251\sin 40t\right) + i\left(-0,251\cos 40t\right),$$

$$\ddot{z}_p(t) = \left(10,05\cos 40t\right) + i\left(10,05\sin 40t\right).$$

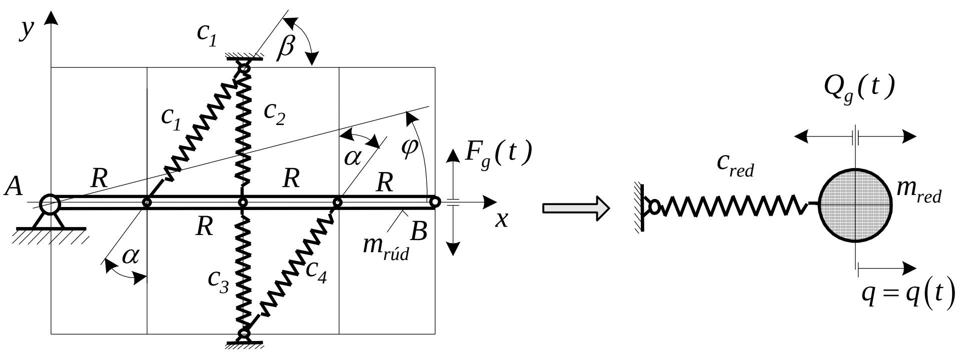
Végső megoldásként az ω_g körfrekvenciával forgó komplex vektoroknak a függőleges, y képzetes tengelyre eső merőleges vetületét tekintjük:

$$y(t) = \mathrm{Im}\left[z_p(t)\right] = -6,284\cdot 10^{-3}\sin 40t\ \ \left(\text{rad}\right),$$

$$\dot{y}(t) = \mathrm{Im}\left[\dot{z}_p(t)\right] = -0,251\cos 40t\ \ \left(\text{rad/s}\right),$$

$$\ddot{y}(t) = \mathrm{Im}\left[\ddot{z}_p(t)\right] = 10,05\sin 40t\left(\text{rad/s}^2\right).$$

8.4. Példa: Csillapítatlan, gerjesztett rezgőrendszer



Adott: az ábrán látható az ***A*** pontban csapágyazott rezgőrendszer redukált rezgőrendszere (*4.3.feladat*). Az általános koordináta legyen a rúd szögelfordulása: $q(t) = \varphi(t)$.

$1/c_{red} = 38750$ Nm/rad , $m_{red} = 64$ kgm^2/rad , $F_g(t) = F_{g0}\sin(\omega_g t)$, $F_{g0} = 100$ N ,

$\omega_g = 40$ rad/s, $R = 1$m , $\varepsilon = 0$.

Feladat: a) Határozza meg a redukált rezgőrendszer α saját körfrekvenciáját.

b) A gerjesztett rezgés maximális kitérésének meghatározása az adott ω_g gerjesztés mellett

c) Ábrázolja a rúd maximális szögelfordulását a gerjesztés függvényében $\varphi^{\max} = \varphi^{\max}(\omega_g)$.

d) Határozza meg c_4 jelű rugóban ébredő maximális Q_4 rugóerőt az adott gerjesztés mellett!

Kidolgozás:

a) A *Lagrange*-féle másodfajú mozgásegyenlet: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dE}{d\dot{q}}\right) - \dfrac{dE}{dq} = Q_c + Q_g$.

A rezgőrendszer mozgásegyenlete :

$$\frac{64}{12} m_{rúd} R^2 \ddot{\varphi} + \left(\frac{R^2\cos^2\alpha}{c_1} + \frac{4R^2}{c_2} + \frac{4R^2}{c_3} + \frac{9R^2\cos^2\alpha}{c_4} \right)\varphi = 4RF_{g0}\sin(\omega_g t).$$

A redukált rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$m_{red}\ddot{q} + \frac{1}{c_{red}} q = Q_g(t) = Q_{g0}\sin(\omega_g t),$$

$$64\ddot{q} + 38750 q = 400\sin(40t) .$$

A rendszer saját körfrekvenciája:

$$\alpha^2 = \frac{1}{m_{red}\, c_{red}} = \frac{38750}{40} = 605,4\,\frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \qquad \rightarrow \qquad \alpha = \sqrt{605,4} = 24,606\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} .$$

b) Maximális kitérés $\omega_g = 40$ rad/s gerjesztés esetén: $\varphi^{\max}$

$$\varphi_{stat} = c_{red}\, Q_{g0} = c_{red}\, 4RF_{g0} = \frac{400}{38750} = 0,01032(rad) \;\rightarrow\; \varphi_{stat} = 0,591^\circ.$$

$$\varphi^{\max} = \varphi_{stat}\frac{\alpha^2}{\sqrt{\left(\alpha^2 - \omega_g^2\right)^2}} = 0,01032\frac{24,606^2}{\sqrt{\left(24,606^2 - 40^2\right)^2}} = 6,284\cdot 10^{-3}\ \text{rad} \;\rightarrow\; \varphi^{\max} = 0,36^\circ.$$

c) A rúd maximális szögelfordulása a gerjesztés függvényében: $\varphi^{\max} = \varphi^{\max}\left(\omega_g\right)$

A függvény jellegzetes pontjai:

- *nyugalmi állapot esetén* $\left(\omega_g = 0 \text{ rad/s}\right)$

$$\varphi^{\max} = \varphi_{stat} \frac{\alpha^2}{\sqrt{\left(\alpha^2 - \omega_g^2\right)^2}} = \frac{0,01032 \cdot 24,606^2}{\sqrt{\left(24,606^2 - 0^2\right)^2}} = 0,01032 \text{ rad} \rightarrow \varphi^{\max} = \varphi_{stat} = 0,591^\circ.$$

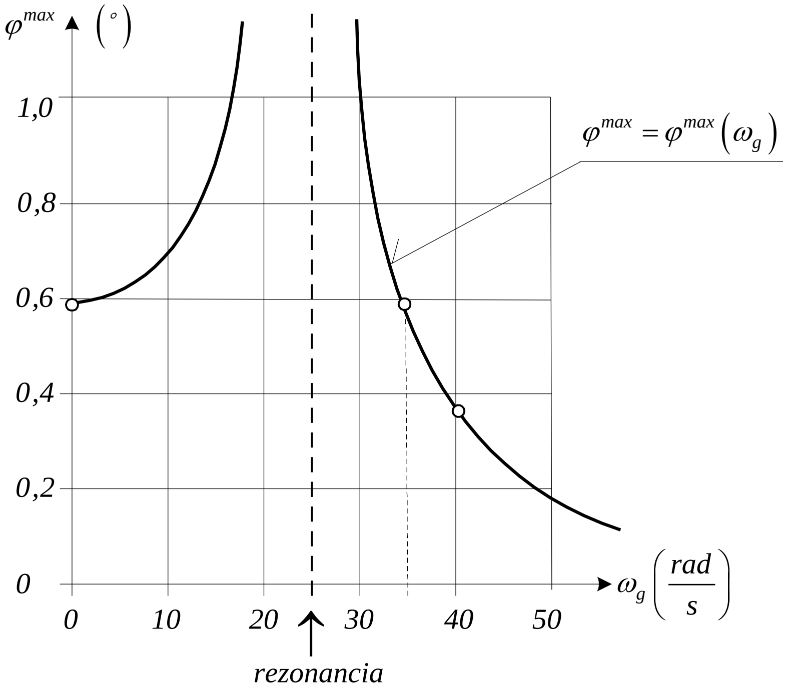
- *rezonancia állapot esetén* $\left(\omega_g = \alpha = 24,606 \text{ rad/s}\right)$

$$\varphi^{\max} = \varphi_{stat} \frac{\alpha^2}{\sqrt{\left(\alpha^2 - \omega_g^2\right)^2}} = \frac{0,01032 \cdot 24,606^2}{\sqrt{\left(24,606^2 - 24,606^2\right)^2}} = \rightarrow \infty \text{ rad.}$$

- $\varphi^{\max}\left(\omega_g\right) = \varphi_{stat}$ esetén

$$\varphi^{\max} = \varphi_{stat} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{\left(\alpha^2 - \omega_g^2\right)^2}} \varphi_{stat} \rightarrow 1 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \xi^2\right)^2}} \rightarrow \xi = \frac{\omega_g}{\alpha} = \sqrt{2} \rightarrow \omega_g = \sqrt{2}\,\alpha ,$$

$$\omega_g = \sqrt{2}\,\alpha = \sqrt{2} \cdot 24,606 = 34,79 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \text{esetén} \quad \varphi^{\max} = \varphi_{stat} = 0,591^\circ$$



d) A c_4 jelű rugóban ébredő maximális Q_4 rugóerő $\omega_g = 40$ rad/s gerjesztés mellett a *(4.6.feladat)* eredményei alapján:

$$Q_4(t) = \frac{9 R^2 \cos^2 \alpha}{c_4} \varphi(t) = \frac{9 \cdot 1^2 \cdot \cos^2 30^\circ}{4 \cdot 10^{-4}} \left(-6,284 \cdot 10^{-3} \sin 40t\right) = -106 \sin\left(40t\right),$$

$$Q_4^{\max} = \left| -106 \underbrace{\sin\left(40t\right)}_{=1} \right| = 106 \text{ N.}$$