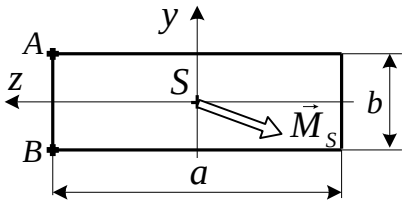
10. MECHANIKA-SZILÁRDSÁGTAN GYAKORLAT

(kidolgozta: dr. Nagy Zoltán egy. adjunktus; Bojtár Gergely egy. Ts.; Tarnai Gábor mérnöktanár.)

10.1. Ferde hajlítás

Adott:



$a = 60$ mm,
$b = 20$ mm,
$\vec{M}_S = (-40\vec{j} - 120\vec{k})$ kNm.

Feladat:

a) Határozza meg és számítsa ki a feszültségi tenzort az A és B pontokban!
b) Számítsa ki a zérusvonal egyenletét és ábrázolja a zérusvonalat!
c) Rajzolja meg a feszültségeloszlást a keresztmetszet y és z tengelye mentén! Határozza meg a keresztmetszet veszélyes pontjait!
d) Rajzolja meg a feszültségeloszlást a keresztmetszet S pontján átmenő, a zérusvonalra merőleges η tengely mentén!
e) Számítsa ki a keresztmetszeten fellépő maximális feszültséget!

Megoldás:

a) A feszültségi tenzor az A és B pontokban:

A keresztmetszet igénybevétele ferde hajlítás: $M_{hy} = -40$ Nm, $M_{hz} = 120$ Nm.

Keresztmetszeti jellemzők:

$$I_y = \frac{a^3 b}{12} = \frac{60^3 \cdot 20}{12} = 360\,000 \text{ mm}^4, \qquad I_z = \frac{b^3 a}{12} = \frac{20^3 \cdot 60}{12} = 40\,000 \text{ mm}^4 = 40 \cdot 10^3 \text{ mm}^4.$$

Feszültség állapot az A és B pontokban:

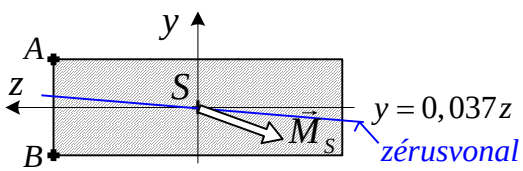
$$\sigma_x(A) = \frac{M_{hz}}{I_z} y_A + \frac{M_{hy}}{I_y} z_A = \frac{120 \cdot 10^3}{40\,000} 10 + \frac{(-40) \cdot 10^3}{360\,000} 30 = 30 - 3{,}33 = 26{,}67 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_x(B) = \frac{M_{hz}}{I_z} y_B + \frac{M_{hy}}{I_y} z_B = \frac{120 \cdot 10^3}{40\,000} (-10) + \frac{(-40) \cdot 10^3}{360\,000} 30 = -30 - 3{,}33 = -33{,}33 \text{ MPa}.$$

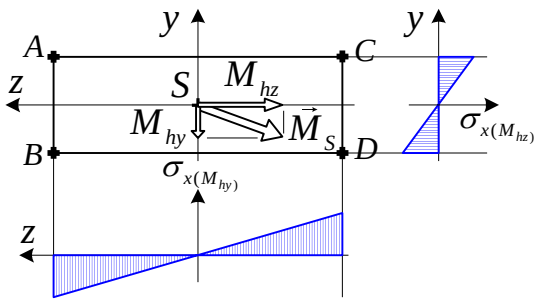
A feszültségi tenzorok: $\left[\underline{\underline{F_A}}\right] = \begin{bmatrix} 26{,}67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ MPa, $\left[\underline{\underline{F_B}}\right] = \begin{bmatrix} -33{,}33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ MPa.

b) A zérusvonal egyenlete és ábrázolása: $\sigma_x(A) = \frac{M_{hz}}{I_z} y + \frac{M_{hy}}{I_y} z = 0 \quad \Rightarrow$

$$y(z) = -\underbrace{\frac{M_{hy}}{M_{hz}} \frac{I_z}{I_y}}_{tg\alpha} z = -\underbrace{tg\alpha \frac{I_z}{I_y}}_{tg\beta} z = -\frac{-40 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^3} \frac{40 \cdot 10^3}{360 \cdot 10^3} z = 0{,}037 z.$$

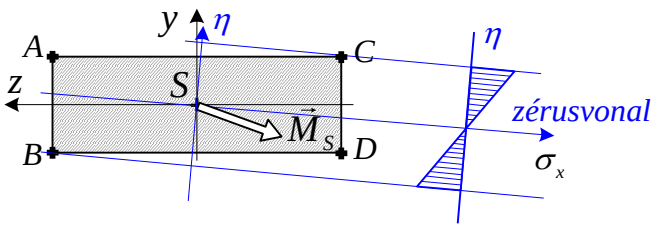


c) A feszültségeloszlás a keresztmetszet y és a z tengelyei mentén, a veszélyes pontok:



A keresztmetszet veszélyes pontjai: B és C pontjai.

d) A feszültségeloszlást a keresztmetszet S pontján átmenő, a zérusvonalra merőleges η tengely mentén:

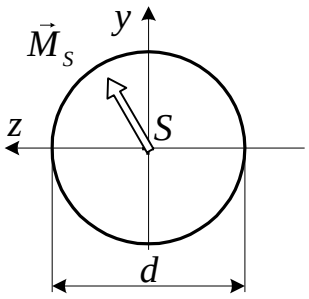


e) A keresztmetszeten fellépő maximális feszültséget!

$\sigma_{x\max} = |\sigma_x(B)| = |\sigma_x(C)| = 33{,}33\,\text{MPa}$.

10.2. Kör keresztmetszetű prizmatikus rúd egyenes hajlítása

Adott:



$\sigma_{meg} = 150\ \text{MPa}$,

$\vec{M}_S = (40\vec{j} + 30\vec{k})\ \text{Nm}$.

Feladat:

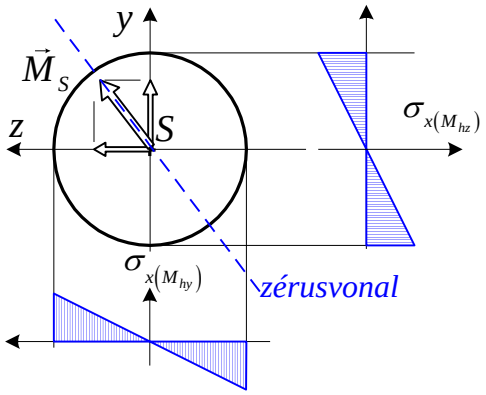
a) Rajzolja meg a feszültségeloszlást a keresztmetszet y és z tengelye mentén! Számítsa ki a zérusvonal egyenletét és ábrázolja a zérusvonalat!

b) Rajzolja meg a feszültségeloszlást a keresztmetszet S pontján átmenő, a zérusvonalra merőleges η tengely mentén! Határozza meg a keresztmetszet veszélyes pontjait!

c) Méretezze a keresztmetszetet feszültségcsúcsra!

Megoldás:

a) Feszültségeloszlás a keresztmetszet y és z tengelye mentén és a zérusvonal egyenlete:



Keresztmetszeti jellemzők:

$$I_y = I_z = \frac{d^4\pi}{64} \quad \Rightarrow \quad tg\alpha = tg\beta \ \text{ egyenes hajlítás!}$$

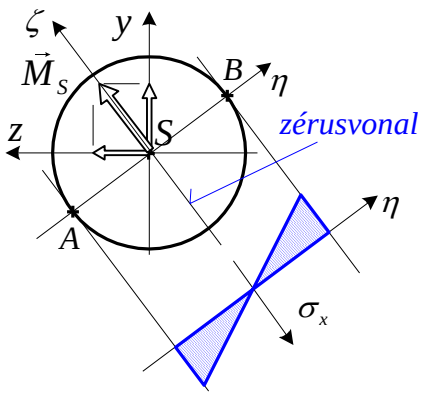
A keresztmetszet igénybevétele:

$M_{hy} = 40\ \text{Nm}$, $M_{hz} = -30\ \text{Nm}$.

A zérusvonal egyenlete:

$$\sigma_x(A) = \frac{M_{hz}}{I_z} y + \frac{M_{hy}}{I_y} z = 0 \quad \Rightarrow \quad y(z) = -\underbrace{\frac{M_{hy}}{M_{hz}}}_{tg\alpha} \frac{I_z}{I_y} z = -\underbrace{tg\alpha \frac{I_z}{I_y}}_{tg\beta} z = -\frac{40 \cdot 10^3}{-30 \cdot 10^3} = 1{,}33z\ .$$

b) A feszültségeloszlás a keresztmetszet S pontján átmenő, a zérusvonalra merőleges η tengely mentén és a keresztmetszet veszélyes pontjai:



A keresztmetszet veszélyes pontjai:

A és B pontjai.

c) A keresztmetszet méretezése feszültségcsúcsra!

$$M_{h\eta} = -\sqrt{M_{hy}^2 + M_{hz}^2} = -\sqrt{40^2 + (-30)^2} = -50\ \text{Nm},$$

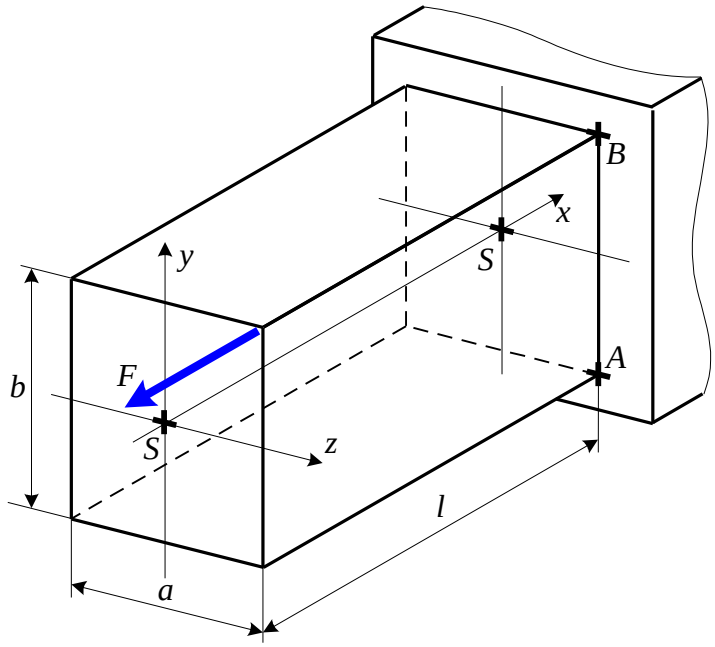
$$\sigma_x(B) = \frac{M_{h\eta}}{I_\zeta}\eta_B = \frac{M_{h\eta}}{\frac{d^4\pi}{64}}\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{-50\cdot 10^3}{\frac{d^4\pi}{64}}\left(\frac{d}{2}\right) = -\frac{1\,600\cdot 10^3}{d^3\pi},$$

$$\left|\sigma_x(B)\right| = \frac{1\,600\cdot 10^3}{d^3\pi},$$

$$\left|\sigma_x(B)\right| \le \sigma_{meg} \quad \Rightarrow \quad \frac{1\,600\cdot 10^3}{d^3\pi} \le 150\ \text{MPa},$$

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{1\,600\cdot 10^3}{150\cdot\pi}} = 15{,}03\ \text{mm} \quad \Rightarrow \quad d = 16\ \text{mm}.$$

10.3. Excentrikus húzás-nyomás



Adott:

$F = 10\,\text{kN}$,
$l = 1\,\text{m},\ a = 20\,\text{mm},\ b = 30\,\text{mm}$.

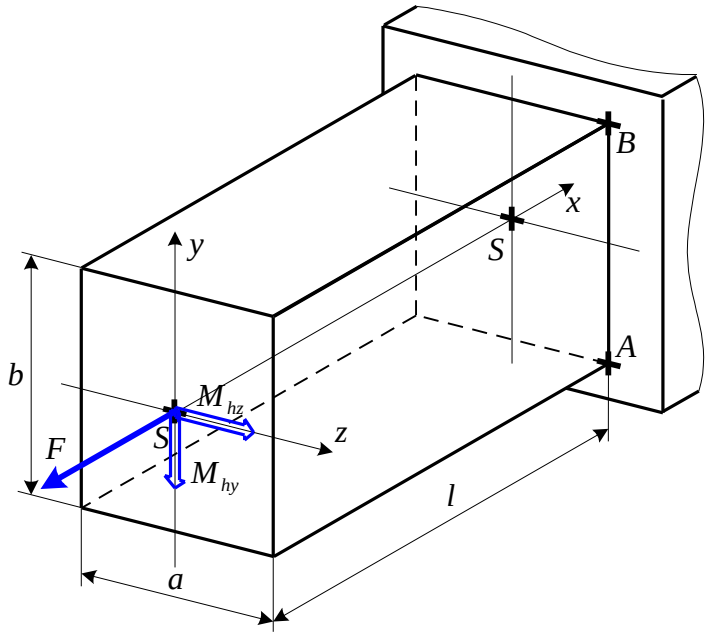
Feladat:

a) Igénybevételek meghatározása a rúd befalazási keresztmetszetében.
b) A feszültségi tenzor fölírása és kiszámítása a befalazási keresztmetszet S, A és B pontjában.
c) Rajzolja meg a feszültségeloszlást a befalazási keresztmetszet S pontján átmenő y és z tengelyei mentén!

Megoldás:

a) Igénybevételek meghatározása a rúd befalazási keresztmetszetében:

Helyezzük át az F erőt a keresztmetszet S súlypontjába.



A redukálás után ébredő nyomatékok:

$$M_{hy} = F\frac{a}{2} = 10\cdot 10^3 \cdot \frac{20}{2} = 10^5\ \text{Nmm}$$

$$M_{hz} = F\frac{b}{2} = 10\cdot 10^3 \cdot \frac{30}{2} = 1{,}5\cdot 10^5\ \text{Nmm}$$

A keresztmetszet igénybevétele: *húzás+ferde hajlítás.*

b) A feszültségi tenzor a befalazási keresztmetszet S, A és B pontjaiban:

Keresztmetszeti jellemzők:

$$I_y = \frac{a^3 b}{12} = \frac{20^3 \cdot 30}{12} = 20\,000\ \text{mm}^4,$$

$$I_z = \frac{b^3 a}{12} = \frac{30^3 \cdot 20}{12} = 45\,000\ \text{mm}^4,$$

$$A = ab = 20 \cdot 30 = 600\ \text{mm}^2.$$

A keresztmetszet tetszőleges pontjában σ_x feszültség:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_{hz}}{I_z} y + \frac{M_{hy}}{I_y} z, \qquad \Rightarrow \quad \sigma_x = \sigma_{x(N)} + \sigma_{x(M_{hz})} + \sigma_{x(M_{hy})}.$$

A feszültségállapot az S pontban:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x(S) &= \sigma_{x(N)} = \frac{N}{A} = \frac{10 \cdot 10^3}{20 \cdot 30} = 16{,}67\ \text{MPa} \\ \sigma_x(S) &= \frac{M_{hz}}{I_z} y_S + \frac{M_{hy}}{I_y} z_S = 0, \text{ mert } y_S = z_S = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\underline{\underline{F_S}}\right] = \begin{bmatrix} 16{,}67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

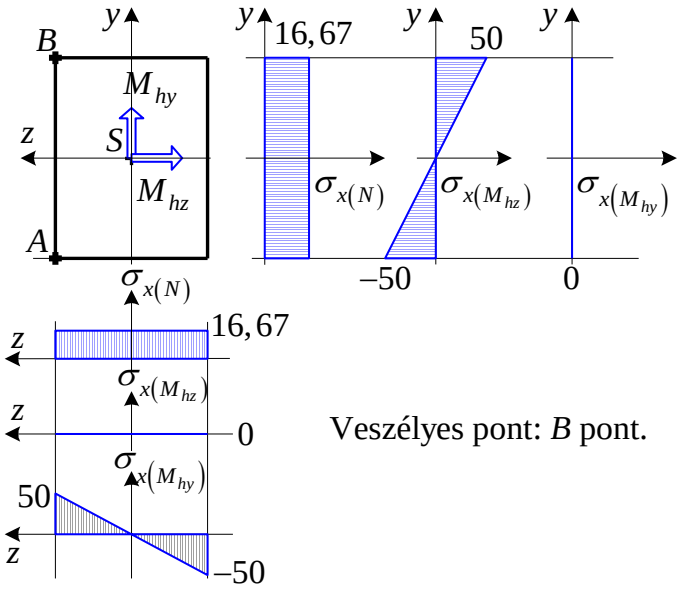
A feszültségállapot az A pontban:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x(A) &= \sigma_{x(N)} = \frac{N}{A} = \frac{10 \cdot 10^3}{20 \cdot 30} = 16{,}67\ \text{MPa} \\ \sigma_x(A) &= \frac{M_{hz}}{I_z} y_A = \frac{M_{hz}}{I_z}\left(-\frac{b}{2}\right) = \frac{1{,}5 \cdot 10^5}{45\,000}\left(-\frac{30}{2}\right) = -50\ \text{MPA} \\ \sigma_x(A) &= \frac{M_{hy}}{I_y} z_A = \frac{M_{hy}}{I_y}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1 \cdot 10^5}{20\,000}\left(\frac{20}{2}\right) = 50\ \text{MPA} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\underline{\underline{F_A}}\right] = \begin{bmatrix} 16{,}67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

A feszültségállapot az B pontban:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x(B) &= \sigma_{x(N)} = \frac{N}{A} = \frac{10 \cdot 10^3}{20 \cdot 30} = 16{,}67\ \text{MPa} \\ \sigma_x(B) &= \frac{M_{hz}}{I_z} y_B = \frac{M_{hz}}{I_z}\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{1{,}5 \cdot 10^5}{45\,000}\left(\frac{30}{2}\right) = 50\ \text{MPA} \\ \sigma_x(B) &= \frac{M_{hy}}{I_y} z_B = \frac{M_{hy}}{I_y}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1 \cdot 10^5}{20\,000}\left(\frac{20}{2}\right) = 50\ \text{MPA} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\underline{\underline{F_B}}\right] = \begin{bmatrix} 116{,}67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

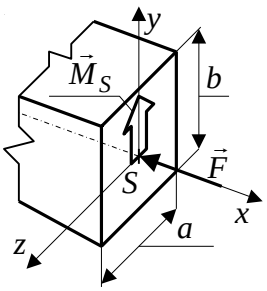
c) Feszültségeloszlást a befalazási keresztmetszet S pontján átmenő y és z tengelyei mentén!



Veszélyes pont: B pont.

10.4. Nyomás és egyenes hajlítás:

Adott:



$a = 40$ mm,
$b = 60$ mm,
$\vec{F} = (-120\vec{i}\ )$ kN,
$\vec{M}_S = (\ \ 4\ \ \vec{j}\ )$ kNm,
M_{hy}
$R_{p\,0,2} = \sigma_F = 420$ MPa.

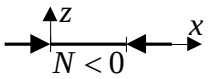
Feladat:

a) A rúd igénybevételeinek meghatározása.
b) A zérusvonal egyenletének felírása.
c) Feszültségeloszlás megrajzolása az y és a z tengelyek mentén, illetve a veszélyes pontok meghatározása.
d) A legnagyobb feszültség meghatározása.
e) A tényleges biztonsági tényező meghatározása.

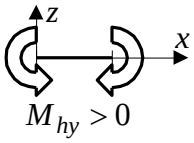
Megoldás:

a) A rúd igénybevételeinek meghatározása:

A rúd nyomott: $N = -120$ kN.



A rúd y tengely körül hajlított: $M_{hy} = 4$ kNm.



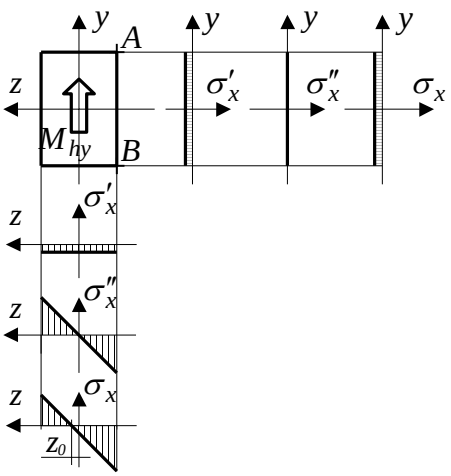
b) A zérusvonal egyenletének a felírása:

$$A = a\,b = 40 \cdot 60 = 2400\ \text{mm}^2, \quad I_y = \frac{b\,a^3}{12} = \frac{60 \cdot 40^3}{12} = 32 \cdot 10^4\ \text{mm}^4,$$

$$\sigma_x = \sigma_x' + \sigma_x'' = \frac{N}{A} + \frac{M_{hy}}{I_y} z = 0 \quad \Rightarrow$$

$$z_0 = -\frac{N}{A}\frac{I_y}{M_{hy}} = -\frac{-120 \cdot 10^3}{2400}\frac{32 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^6} \quad \Rightarrow \quad z_0 = 4\ \text{mm}.$$

c) Feszültségeloszlás az *y* és a *z* tengelyek mentén, illetve a veszélyes pontok meghatározása:



Veszélyes pontok: az *AB* oldalon lévő pontok.

$(z = -\frac{a}{2})$

d) A legnagyobb feszültség meghatározása:

$$\sigma'_x = \frac{N}{A} = \frac{-120 \cdot 10^3}{2400} = -50 \text{ MPa},$$

$$\sigma''_x(z = -a/2) = \frac{M_{hy}}{I_y}\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{4 \cdot 10^6}{32 \cdot 10^4}\left(-\frac{40}{2}\right) = -250 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{x\max} = |\sigma_x(z = -a/2)| = 50 + 250 = 300 \text{ MPa}.$$

e) A tényleges biztonsági tényező meghatározása:

$$\sigma_{x\max} \le \frac{\sigma_{jell}}{n} = \frac{R_{p\,0,2}}{n} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{R_{p\,0,2}}{\sigma_{x\max}} = \frac{420}{300} = 1,4.$$

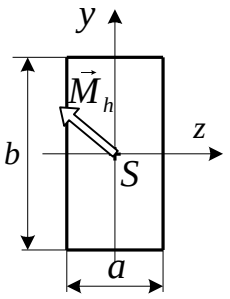
10.5. Ferde hajlítás:

Feladat:
a) A feszültségeloszlás megrajzolása és a veszélyes pontok megkeresése.
b) A feszültségállapot meghatározása az *A* és *B* pontokban.
c) A zérusvonal egyenletének meghatározása.
d) A feszültségi állapot fölírása a *B* pontban.

Adott: A rúd *K* keresztmetszetének méretei és igénybevétele:

$\vec{M}_h = \left(120\vec{j} - 150\vec{k}\right)\text{Nm}$,

$a = 20$ mm, $b = 40$ mm.



Megoldás:

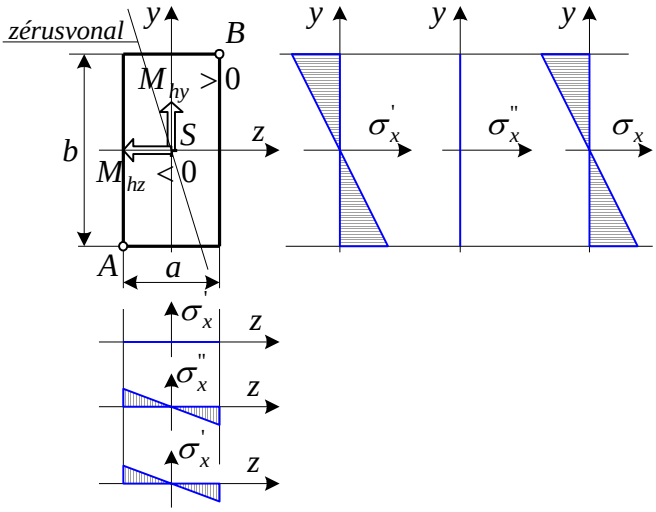
a) Feszültség eloszlása a koordináta tengelyek mentén:

$$\sigma_x = \sigma_x' + \sigma_x'' = \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z,$$

$$M_y = 120 \text{ Nm}, M_z = -150 \text{ Nm},$$

$$I_y = \frac{ab^3}{12} = \frac{2 \cdot 4^3 \cdot 10^4}{12} = \frac{32}{3} 10^4 \text{ mm}^4,$$

$$I_z = \frac{ba^3}{12} = \frac{4 \cdot 2^3 \cdot 10^4}{12} = \frac{8}{3} 10^4 \text{ mm}^4.$$



b) A feszültségállapot meghatározása az *A* és *B* pontokban.

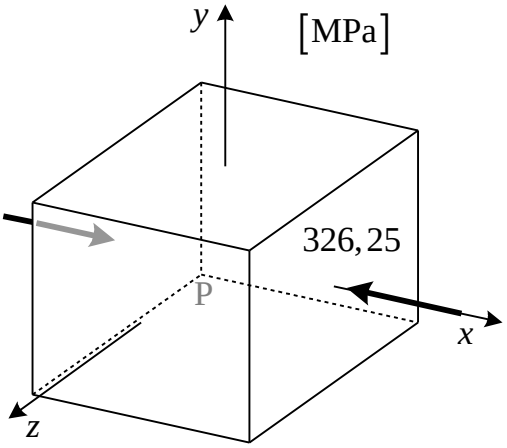
$$\sigma_{x\max} = \sigma_x(A) = \left|\sigma_x(B)\right| = \frac{M_z}{I_z} y_A - \frac{M_y}{I_y} z_A = \frac{M_z}{I_z}\left(-\frac{b}{2}\right) - \frac{M_y}{I_y}\left(-\frac{a}{2}\right),$$

$$\sigma_{x\max} = \frac{-150 \cdot 10^3}{\frac{32}{3} \cdot 10^4}(-20) + \frac{-120 \cdot 10^3}{\frac{8}{3} \cdot 10^4}(-10) = \frac{450}{32} + \frac{360}{8} = 281,25 + 45 = 326,25 \text{ MPa}.$$

c) A zérusvonal egyenlete:

$$\sigma_x(A) = \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = 0 \quad \Rightarrow \quad y(z) = \frac{M_y}{M_z}\frac{I_z}{I_y} z = \frac{120}{-150}\frac{32}{8} z = -3,2z, \qquad tg\beta = -3,2.$$

Veszélyes pontok: A és B.

d) A feszültségi állapot a B pontban:

$$\left[\underline{\underline{F_B}}\right] = \begin{bmatrix} -326 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa},$$